



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

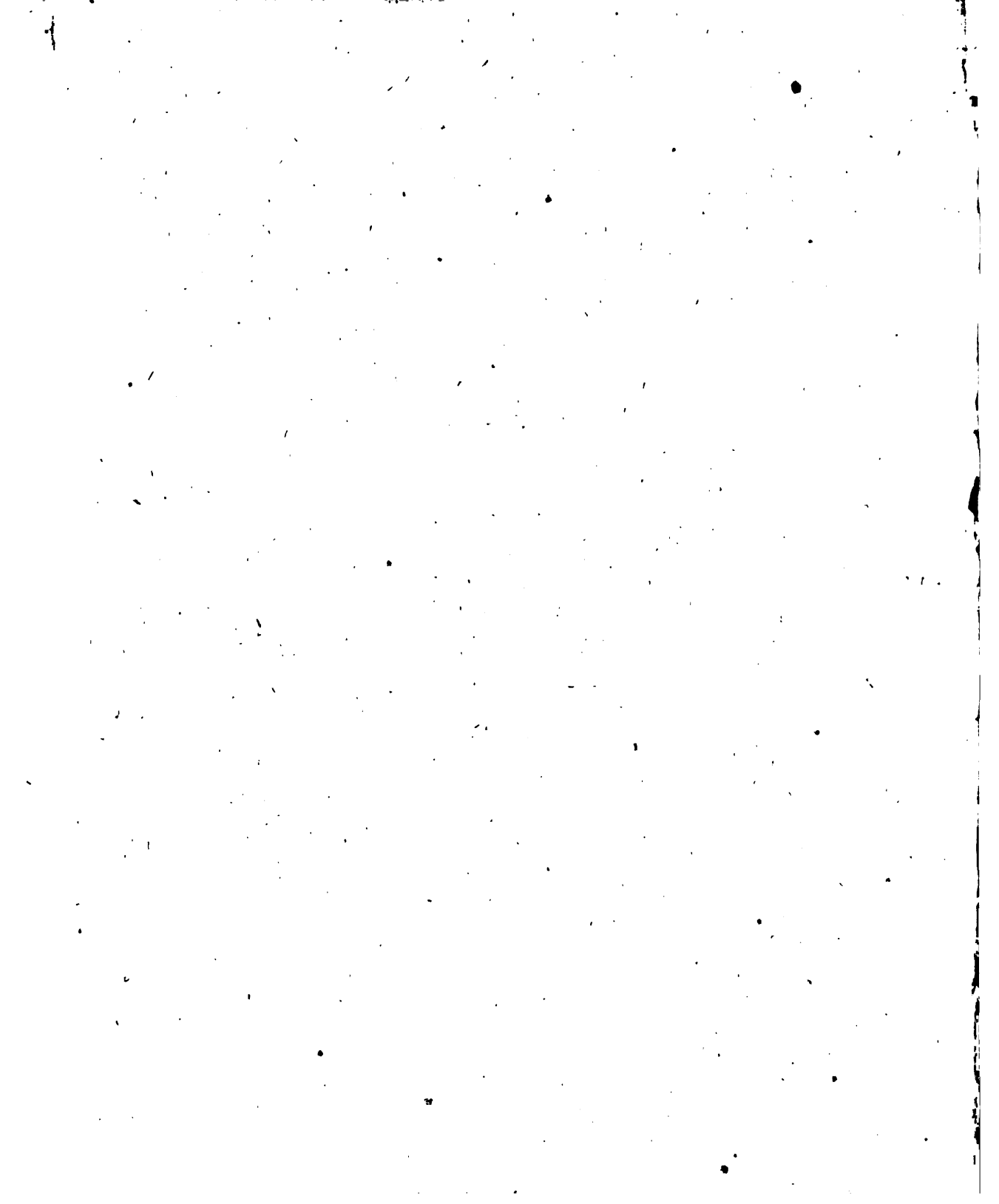
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

3. 10/10/11. Klein

QA

35

5454



Deutliche und vollständige
Vorlesungen

über die

E

und

E **efri**

Zum Gebrauche derjenigen, welche sich in
diesen Wissenschaften durch eigenen Fleiß üben wollen,
ausgefertiget

Von

D. Joh. Andreas Segner

Öffentlichem Lehrer der Arzneykunst, Mathematic und Naturlehre bey der
Königl. und Churfürstl. Georg-Augustus Universität zu Göttingen, und Mit-
gliede der Königl. Grossbritannischen, wie auch der Königl. Preussischen
Societät der Wissenschaften.

L E M G O
Gedruckt bey Johann Heinrich Meyer, Hochgräf.
Kippl. Hof-Buchdrucker. 1747.

[illegible]

10-11-68

1. The first group of people who are interested in the study of the history of the United States are the people who are interested in the history of the United States.

SECRET

the 1990s, the number of people in the United States who are 65 years of age or older is projected to increase from 20 million to 30 million, and the number of people 75 years of age or older is projected to increase from 10 million to 15 million (U.S. Census Bureau, 1996). The number of people 85 years of age or older is projected to increase from 2 million to 4 million (U.S. Census Bureau, 1996). The number of people 90 years of age or older is projected to increase from 500,000 to 1 million (U.S. Census Bureau, 1996). The number of people 95 years of age or older is projected to increase from 100,000 to 200,000 (U.S. Census Bureau, 1996). The number of people 100 years of age or older is projected to increase from 10,000 to 20,000 (U.S. Census Bureau, 1996).

1975. 224 p. \$12.95.

Journal of Management Studies, 19(1), 67-80.

Dem
Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn

H E R R N *X 1526.*

arl ilhelm

erdinand

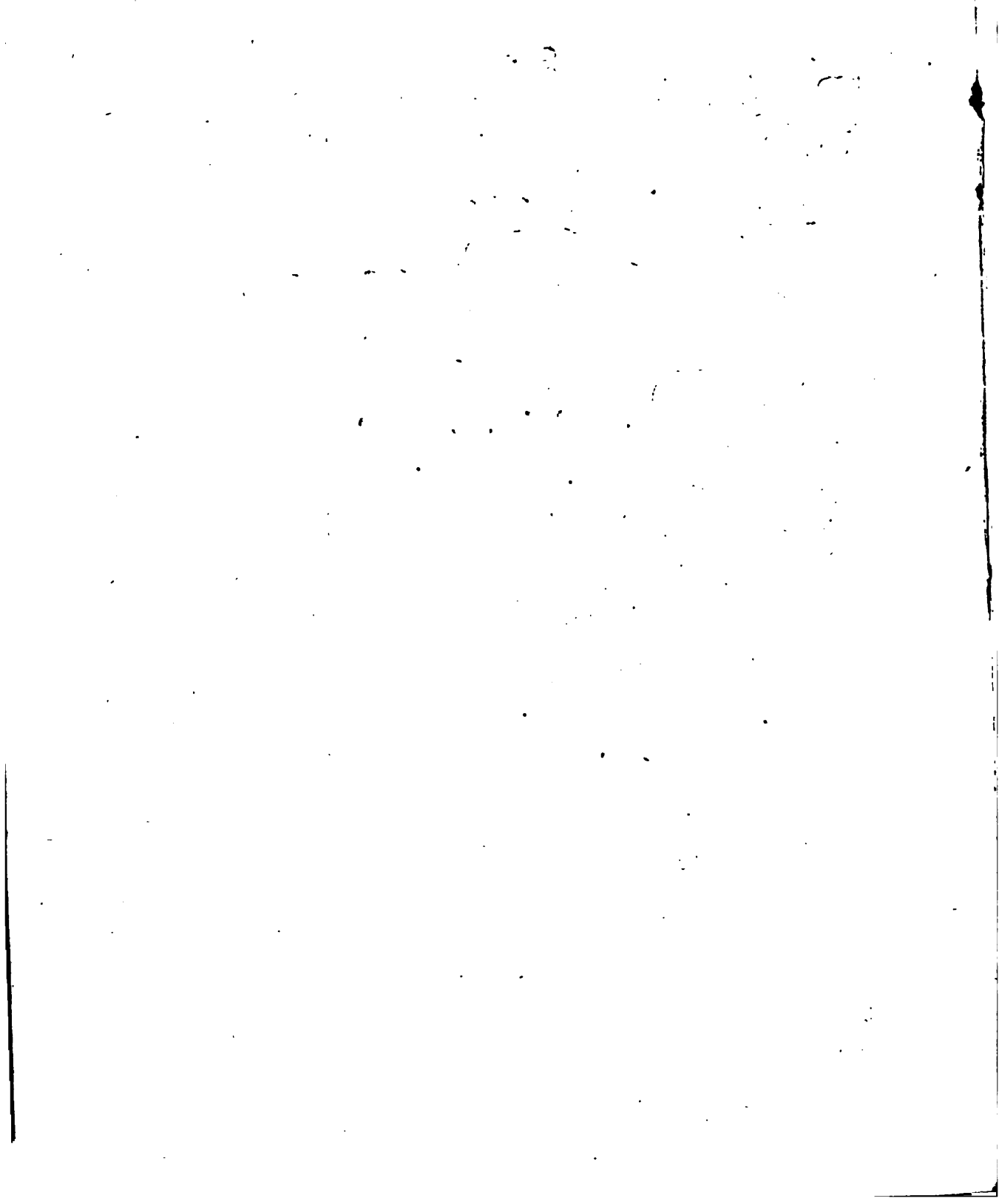
Erb Prinzen und Herzogen

zu

Braunschweig Lüneburg

Meinem gnädigsten Fürsten und Herrn.

X 2



Durchlauchtigster Erb Prinz

Gnädigster Fürst und Herr,

History of science
Harvard Univ.
9-29-29
9731



Unter den vielen und herrlichen Geschenken der gütigen Vorsehung, welche an Eurer Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit mit dem grössesten Rechte bewunderb werden, wird eine recht zärtliche Liebe zur Wahrheit vornehmlich gepriesen, so Dieselben am deutlichsten erblicken lassen, wenn diese ohne allem Puz, in welchem sie gemeiniglich vor erhabenen Personen zu erscheinen pfleget, sich bloss in ihrer natürlichen Schönheit darstellt. Und diese seltene Vollkommenheit ist dasjenige, so mich in der

Hoffnung erhält, es werden Eure Hochfürstliche Durchlauchtigkeit gegenwärtiges Buch einiger Dero erleuchteten Blicke würdigen, und gnädigst vermerken, daß Demenselben es in der tiefsten Unterthänigkeit zu zueignen, mich unterfangen habe. Es wird in demselben eine Wissenschaft vorgetragen, in welcher die Eurer Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit so werthe und schätzbare Wahrheit in ihrem vollen Glanze pranget. Eben diese Wissenschaft ist der Leitfaden bey den meisten Entdeckungen, welche der menschliche Verstand machen kan. Sie öfnet uns insonderheit die Geheimnisse der Natur, in so weit es dem Schöpfer gefallen hat, uns die Einsicht in deren inneres zu verstatten; und zeigt die Spuren einer unendlichen Weisheit an dessen Werken auf das deutlichste. Sie schärfet den Verstand; nicht nur, indem sie ihm eine Menge der nützlichsten Begriffe beibringet: sondern auch, indem sie demselben die verschiedenen Wege zur Wahrheit zu gelangen, und sich derselben mit einer vollkommenen Gewisheit zu versichern, durch die wiederholte Uebung, recht bekannt macht. Die Begierde, allen diesen Nutzen mehr gemein zu machen, ist der Zweck meines Buches. Eure Hochfürstliche Durchlauchtigkeit sind überzeugt, daß es ein vorzüg-

341
Nun mit der Fürstin sey, vor die allgemeine
Böhlfart zu sorgen; und Sie suchen Dero Höheit
hauptsächlich darinnen, daß Sie geböhren sind einen
grossen Theil des menschlichen Geschlechts glücklich zu
machen. Auch kan, bey den vielen, und zum Theil
ganz neuen, Beispielen Dero Durchlauchtigsten
Stammhauses Eurer Höchfürstlichen Durch-
lauchtigkeit nicht verborgen seyn, daß dieses kaum
auf eine edlere und erhabenere Art geschehen könne,
als wenn vielen Gelegenheit gegeben wird, ihren Ver-
stand zu bessern, und wenn sie dazu kräftig ermun-
tert werden. Dieses aber wird, in so weit die Geo-
metrie etwas dazu beitragen kan, ganz gewiß erfol-
gen, wenn Eure Höchfürstliche Durchlauch-
tigkeit sie Dero Achtung zu würdigen geruhen
wollen. Es wird Dero durchdringender Verstand
andern zu einer Richtschnur dienen: und sie werden
anfangen eine Wissenschaft hoch zu schätzen, von deren
Werthe Eure Höchfürstliche Durchlauchtig-
keit ein günstiges Urtheil fällen, ob sie zwar, denselben
vor sich selbst zu ermessen, nicht fähig gewesen wären.
Doch wird bey dem allen Eurer Höchfürstlichen
Durchlauchtigkeit hoher Beifall die allerschätzbar-
ste Frucht meiner Arbeit seyn, wenn sie würdig ist
den-

denselben zu erhalten: und ich werde es vor meine ge-
ste Glückseligkeit achten, wenn künftig, bey den eifrig-
sten Wünschen vor Dero unaufhörliche Zufriedenheit,
welche so vielen Tausend andern beifüge, mich zugleich
Eurer Hochfürstlichen Durchlauchtigkeit ho-
her und unschätzbarer Gnade in der tiefsten Ehrfurcht
werden erinnern können, mit welcher ich bin

Durchlachtigster Erb Prinz

Gnädigster Fürst und Herr

Eurer Hochfürstlichen Durch-
lauchtigkeit

unterthänigster und gehorsamster
Diener

J. H. Segner.

Vorrede.

Der Zweck bey der Ausfertigung des gegenwärtigen Buches war; denjenigen, welche sich die Anfangsgründe der Mathematic durch eigenen Fleiß, oder unter der Anführung eines Lehrmeisters, der selbst nicht allzuweit in denselben gekommen ist, bekannt machen wollen, dazu beförderlich zu seyn: andern aber die Wiederholung des mündlichen Vortrages zu erleichtern, und denselben, wo es nöthig ist, zu ergänzen. Man hat sich zu dem Ende einer an einander hangenden, deutlichen, weitläuftigen und ungezwungenen Schreibart bedienet: und, da man sich den Leser als neu in dieser Wissenschaft, und der geometrischen Schlüsse ungewohnt, vorstellen müssen; so ist man, sonderlich im Anfange, beflissen gewesen, die meisten Dinge von mehr als einer Seite vorzustellen, und durch verschiedene, aus verschiedenen Quellen hergeholte Beweise, recht verständlich zu machen. Doch hat man sich dabey gehütet, den Zusammenhang der Sätze zu unterbrechen, und die Kette der Schlüsse, welche vom Anfange an durch das ganze Buch reicht, zu zerreißen. Selbst die Erklärungen der Wörter sind hievon nicht ausgenommen; welche nicht ehe angebracht worden sind, als, nachdem man, als bereits bekannt, voraus setzen konnte, daß dasjenige, so das Wort bedeuten soll, möglich sey, und nichts widersprechendes enthalte.

So angenehm diese Art des Vortrages einem Anfänger hoffentlich seyn wird; so würde sie doch endlich eckelhaft geworden seyn, wenn man sie durch das ganze Buch

Buch in eben der Weitläufigkeit hätte fortführen wollen. Man ist also auch darinnen der Lehrart gefolget, der man sich bey dem gewöhnlichen mündlichen Vortrage zu bedienen pfleget, daß man sich desto mehr zur Kürze gelenket, je weiter man in der Abhandlung gekommen; und man hat der Einsicht des Lesers desto mehr zu gekrauet, je geübter man sich denselben vorstellen müssen. Es ist wirklich ein grosser Theil dieses Buches zu Papier gebracht worden, nach dem man einem jungen vort Adet den Inhalt desselben nach und nach erkläret hatte; und man hat dessen Einsicht zum Maas der Deutlichkeit und der Weitläufigkeit oder Kürze angenommen, der man sich zu bestreissen hatte. Dieses ist die Ursache, warum es den Namen der Vorlesungen bekommen hat.

Ueberhaupt sind alle Beweise zu der grössesten Kürze und Einfalt gebracht worden, die man erreichen konnte; und man hat sich dabey keine Mühe verdriessen lassen. Es ist aber diese Kürze aus der Menge der Begriffe und Schlüsse, welche in einem Beweise vorkommen, und keinesweges aus der Menge der Zeilen zu ermessen, in welchen er vorgetragen wird. Diese Kürze zu erhalten hat man hier und da von dem gebahnten Strassen abweichen, und solche Wege gehen müssen, welche selten, und zum theil vielleicht niemals, betreten worden sind. Auch hat man sich kein Bedenken gemacht, Grundsätze anzunehmen, welche eben vor den Büchern des Euklides nicht stehen. Doch sind es wahre Grundsätze, und werden zum theile selbst vor dem Euklides gebraucht, ob sie zwar den übrigen Grundsätzen desselben nicht ausdrücklich beygefüget sind:
zum

zum theile aber werden sie von verschiedenen neuern Geometren angenommen, oder verdienen wenigstens, daß sie angenommen werden. Man rechnet hierunter keines weges den Leibnizischen Satz des zureichenden Grundes, und einige andere dieser Art. Denn ob sie wol in den Nebenbeweisen und zur Erläuterung gebraucht werden: so kommen sie doch keines weges mit in die Hauptkette der Schlüsse; und es wäre in meinen Augen ein Fehler, wenn man sie wirklich unter die Grundsätze der Geometrie rechnen wolte; als wozu es ihnen an der nöthigen Deutlichkeit mangelt. Man hat aber die Grundsätze selten von den übrigen abgesondert, sondern sie größten Theils erst alsdamm angebracht, wenn sie anzuwenden waren: weil man bemerkt, daß die Anfänger sich öfters, ich weiß nicht was, vor Schwierigkeiten, bey denselben vorstellen, wenn sie von ihnen, ansser dem Zusammenhange mit dem übrigen, erblicket werden.

Sonst hat man die nöthige Strenge bey den Beweisen überall bezubehalten getrachtet, und ist bemühet gewesen, sich in der Art zu schliessen den griechischen Urbildern eben so sehr zu nähern, als weit man in der Schreibart sich von denselben entfernete: ob zwar die Absicht war, diese Vorlesungen also einzurichten, daß sie auch Kindern vorgeleget werden könnten. Denn es ist niemand deswegen mit Wind zu speisen, weil er einen schwachen Magen hat: Und man muß sich überdies hüten von der Fähigkeit der Kinder aus der Fähigkeit derjenigen zu urtheilen, welche durch die gemeine grammaticalische Uebungen angewöhnet worden sind,

sind, den größten Theil ihrer Zeit, an bloße Töne zu gedenken; welche in der Oratorie der Schulen nichts anders gelernt, als eine Menge klingender Wörter ohne Verstand zusammen zu fügen; bey welchen die natürliche Kraft zu schliessen durch eine übel ausgesonnene Logie, in Unordnung gebracht ist; und die durch eine lächerliche Metaphysic ausser den Stand gesetzt sind, die Schaalen von dem Kerne zu unterscheiden. Man führe ein Kind von acht bis zwölf Jahren ordentlich und bedächtig in die Geometrie, so wird man Ursache genug finden, sich über dessen Einsicht zu verwundern. Es kan aber diese so unumgänglich notwendige Ordnung bey unvollkommenen Beweisen nicht bestehen.

Es wäre zu weitläufig, wenn man durch die Anführung besonderer Stellen eine Probe davon geben wolte, wie man alles dieses zu erreichen getrachtet hat. Ein Leser, so die Geometrie versteht, wird, vermittelst des dem Werke beygefügtten Inhaltes, die Materien leicht finden können, von welcher er insonderheit begierig ist zu wissen, auf was Art sie vorgetragen worden sind. Eben dieser Inhalt kan den ganzen Zusammenhang der Theile, und die Ordnung, welcher man gefolget, gleichsam in einem Blicke, vorstellen; insonderheit wenn auch die Zeichnungen zu Hülfe genommen werden, bey welchen man sich der Ordnung nicht weniger, als bey dem Texte, beflissen hat.

Man schmeichelt sich mit der Hoffnung, es werde bey diesem Durchblättern das Urtheil dahin ausfallen, daß wir alles so von der Rechenkunst und derjenigen
Geo.

Geometrie, welche außer dem Cirkelfreise sich auf keine andere krumme Linie gründet, hauptsächlich zu wissen nöthig ist, in diese Vorlesungen zu bringen bemühet gewesen sind, und daß also dieselben in so ferne vollständig genennet werden können. Indessen ist man gar nicht gemeinet, junge Gemüther durch dieselbe, von Lesung der Bücher des Euklides und anderer scharfsinniger Männer, abzubringen. Man will sie vielmehr in den Stand setzen, diese Schriften mit Nutzen durchzugehen, und dadurch die Einsicht, welche sie mittelst unserer Beihülfe erhalten haben, zu erweitern, und je mehr und mehr in Ordnung zu bringen. Aufgeweckte Gemüther werden dieses auch ohne unserm Rathe thun, und die gegenwärtigen Vorlesungen eben so wol bey Seite legen, nachdem sie dieselben ein oder zweymal durchgegangen sind, als man aufhöret sich der mündlichen Anweisung zu bedienen, nachdem man durch dieselbe in den Stand gesetzt worden ist, sich selbst weiter fort zu helfen. Zumalen da, bey dem weitläuftigen und zusammenhängenden Vortrage, dessen man sich bedienet hat, die Sätze selbst zum öfteren unter dem übrigen gar sehr verstecket sind: welches dem Gedächtnisse eine schlechte Beihülfe giebet, und selbst das Nachschlagen etwas schwer macht. Denn man muß meistens mehr als einen Absatz lesen, ehe man einen Satz und dessen Beweis recht deutlich einfiehet. Es ist aber selten möglich ein Ding zu unterschiedenem Gebrauche gleich bequem zu machen; und man muß von einem Buche keinen andern Nutzen verlangen, als denjenigen, zu welchem es eigentlich bestimmt ist.

Es ist kaum möglich bey einem so langweiligen Vortrage alle Fehler in den Schlüssen und in dem Gebrauche der Wörter gänzlich zu vermeiden, und gar nichts zu verschreiben. Man hat zwar auch in diesem Stücke allen Fleiß angewendet, welchen zu gebrauchen die Zeit erlauben wolte. Doch ist fast nicht zu hoffen, daß sich gar nichts einer Aufmerksamkeit entzogen haben sollte, welche zum öftern und unter andern selbst durch die Gedanken unterbrochen worden ist, zu welchen das wiederholte Durchsehen natürlicher Weise Anlaß geben mußte. Vielleicht sind auch bey dem fremden und etwas eilfertigen Drucke einige Fehler der Setzer stehen geblieben. Doch hoffe ich nicht, daß alle diese Versehen von der Art seyn, daß sie einen bedachtsamen Leser aufhalten könnten. Sinegegen können auch ein paar Fehler der kleinen lateinischen Elemente, insonderheit in der Abhandlung von den dreyseitigen Ecken, aus den gegenwärtigen Vorlesungen gebessert werden.

Uebrigens ist es hauptsächlich die Begierbe, sich nach Vermögen nützlich zu machen, so die Gedult unterhalten können, welche bey der Ausarbeitung dieser Vorlesungen aus vielen Ursachen nöthig war. Dieses ist der einzige Ruhm, welchen man dabey suchet: und man wird es als eine Glückseligkeit ansehen, wenn dieser Zweck bey einem oder dem andern Leser erhalten wird. Geschrieben auf der Georg-Augustus Universität zu Göttingen, den 18 März, 1747.

Inhalt.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheiligen Brüchen.

Allgemeine Begriffe von den Zahlen.	Seit. 1.
Wie die Zahlen durch Worte ausgedrucket werden.	6.
Die Zahlen geschickt zu schreiben.	8.
Die dergestalt geschriebene Zahlen zu lesen.	10.
Wie die Brüche überhaupt bezeichnet werden.	11.
Zehentheilige Brüche.	12.
Die Addition.	15.
Die Subtraction.	19.
Probe der Addition und Subtraction.	23.
Die Anwendung der Addition und Subtraction.	24.
Bezeichnung der Größen, die einander vermehren oder vermindern.	26.
Die Addition und Subtraction gewisser Brüche.	28.
Begriffe von der Multiplication.	29.
Grundsätze zur Multiplication.	30.
Bei der Multiplication gebräuchliche Zeichen und Wörter.	33.
Verfolg der Gründe der Multiplication.	34.
Die Ordnung der Factoren läßt sich verändern.	36.
Nähere Gründe zur Ausübung der Multiplication.	39.
Die Ordnungen der Einheiten in dem Product zu bestimmen.	43.
Die Multiplication am bequemsten zu verrichten.	45.
Die Producte der Zahlen, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, zu finden.	47.
Bestimmung der Ordnung der Einheiten des Products.	49.
Fernere Erläuterung der Ausübung der Multiplication.	51.
Begriffe zur Division.	53.
Gründe der Division.	55.
Vorbereitung zur Ausübung der Division.	61.
Die kürzeste Art des Dividirens.	69.
Die Ordnung der Einheiten der Ziffer des Quotienten zu bestimmen.	72.
Den Quotienten in zehentheiligen Brüchen darzustellen.	75.
Einige Vortheile der Multiplication und Division.	78.
Gebrauch dieser Vortheile bei der Probe der Multiplication.	83.
Eine andere Probe der einfachen Rechnungsarten.	85.

Zweiter Abschnitt.

Von der Berechnung der Brüche.

- Gründe der Bruchrechnung. Seit. 89.
Das Aufheben der Brüche. 91.
Zween Brüche zu einerley Benennung zu bringen. 95.
Brüche von verschiedenen Benennungen zu vereinigen. 97.
Drey oder mehrere Brüche unter eine Benennung zu bringen. 100.
Multiplication durch Brüche. 102.
Division durch Brüche. 105. Einige Anmerkungen. 109.
Von den einfachen und zusammengesetzten Zahlen. 110.
Gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen. 113.
Den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden. 115.
Einige besondere Wege, den gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen zu finden. 119.
Wie die zusammengesetzte Zahlen aus den einfachen entstehen. 121.
Erläuterung der gemeinschaftlichen Theiler verschiedener Zahlen. 127.
Anwendung dieser Betrachtungen auf die Brüche. 128.
Einige Vortheile bey der Bruchrechnung. 131.

Dritter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubiczahlen.

- Begriffe der Quadratzahlen. Seit. 135.
Zusammensetzung der Quadratzahl einer zweytheiligen Wurzel. 137.
Die Quadratzahl einer Wurzel, die mehr als zween Theile hat, zusammen zu setzen. 140.
Die Wurzel aus einer ganzen Quadratzahl auszuziehen. 146.
Ganze Zahlen, deren Quadratwurzeln keine ganze Zahlen sind. 152.
Vorbereitung zu dem Beweis. Quadrate der Brüche. 154.
Nähere Gründe, und wirklicher Beweis. 155.
Wie man sich den Quadratwurzeln nähert, die nicht genau ausgedrucket werden können. 157.
Irrationalzahlen. 162.
Begriffe von den Cubiczahlen. 163.
Wie die Cubiczahl einer zweytheilichten Wurzel zusammen gesetzt wird. 165.
Wie die Cubiczahl einer Wurzel zusammen gesetzt wird, die mehr als zween Theile hat. 171.
Ausziehung der Cubicwurzel. 174.
Cubicwurzeln der Brüche. 179.
Ganze Zahlen deren Cubicwurzeln keine ganze Zahlen sind. 181.
Wie man sich den Cubicwurzeln nähert, wenn sie nicht genau zu haben sind. 182.

Bier.

Vierter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln.

Allgemeine Begriffe von dem ausgedehnten Wesen. Seit. 186.

Begriffe der Punkte und Linien. 191.

Oberflächen. 200.

Von den Winkeln, vor sich betrachtet. 202.

Parallellinien. 217.

Von dem Umkreis der Figuren überhaupt. 219.

Wie der Umkreis eines Dreiecks durch zwei Seiten bestimmt wird, die einen Winkel umschließen. 224.

Der Umkreis eines Dreiecks wird durch zweien Winkel und der einen Seite bestimmt. 232.

Ein Dreieck aus drey gegebenen Seiten zusammen zu setzen, 237.

Verschiedene Aufgaben von gleichen Linien und Winkeln. 243.

Wie die Parallellinien entstehen, und deren Eigenschaften. 253.

Von den Winkeln der geradenlinichten Figuren. 268.

Wie die Seiten der Dreiecke durch die ihnen entgegen gesetzte Winkel bestimmt werden. 278.

Fünfter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln bey den Cirkelfreisen.

Erstere Eigenschaften der Cirkel. Seit. 287.

Von den Sehnen der Cirkel. 292.

Gerade Linien, welche einen Cirkel berühren. 302.

Von den Winkeln gewisser Sehnen und Berührungslinien. 306.

Beschreibung der regulären Figuren. 316.

Von geraden Linien, so den Cirkel schneiden. 327.

Sechster Abschnitt.

Von den Verhältnissen, und deren Gleichheit.

Grundbegriffe. Seit. 331.

Welche Verhältnisse einander gleich oder ungleich sind. 336.

Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse bey Zahlen und getheilten Grössen. 342.

Merkmale, woraus die Gleichheit der Verhältniß ungetheilter Grössen geschlossen wird. 358.

Regeln zur Verandelung der Proportion. Die erste. 361.

Die zweyte Regel 362. Die dritte Regel. 370. Die vierte Regel. 377.

Zu zwei oder drey Proportionalzahlen, die dritte oder vierte zu finden. 378.

X X X

Sie.

Siebender Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

- Die Gründe dieser Lehre. Seit. 384.
Von der Aehnlichkeit der Dreiecke. 392.
Von der Aehnlichkeit der übrigen Figuren. 401.
Von der Aehnlichkeit der Theile der Eirkel. 407.
Die Verhältniß verschiedener geraden Linien, so einen Eirkel schneiden oder berühren. 415.

Achter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

- Begriffe von der Zusammensetzung der Verhältnisse. Seit. 420.
Wie die Verhältnisse zusammen zu setzen. 426.
Die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen zu setzen ist, zu vermindern. 439.
Einige besondere Sätze. 444.

Neunter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verhältniß der Figuren.

- Grund dieser Lehre. Seit. 450.
Gleichheit gewisser Parallelogrammen und Dreiecke. 453.
Die übrigen flachen Figuren mit Dreiecken zu vergleichen. 458.
Allgemeine Gründe, die Dreiecke und Parallelogrammen mit einander zu vergleichen. 466.
Vergleichung eines Quadrats mit einem andern geradewinklichten Vierecke. 477.
Vergleichung solcher Figuren, die einander ähnlich sind. 483.
Aehnliche Figuren zusammen zu setzen; und eine von der andern abzuziehen. 488.
Einige besondere Sätze und Aufgaben von den geradewinklichten Vierecken. 492.

Zehender Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien und Flächen, in Ansehung anderer Flächen.

- Wie die Lage einer Fläche bestimmt wird. 507.
Gerade Linien, so einer Fläche parallel laufen. 510.
Gerade Linien, so auf einer Fläche perpendicular stehen. 514.
Neigung einer Fläche gegen eine andere. 520.
Flächen, deren eine der andern parallel liegt. 524.

Filfter Abschnitt.

Von den Körpern und deren Oberflächen.

Allgemeine Begriffe. Seit. 329.

Erste Art der Körper. 332.

Wie ein Körper der ersten Art mit einem andern solcher Körper verglichen werde. 338.

Einige besondere Sätze zur Vergleichung der Körper der ersten Art. 343.

Körper der zweiten Art. 348.

Wie die Körper der zweiten Art mit einander verglichen werden. 351.

Körper der dritten Art. 357.

Vergleich der Körper der dritten Art mit den Körpern der ersten. 361.

Wie zweien Körper der dritten Art mit einander verglichen werden. 366.

Von den regulären Körpern. 369.

Von den Oberflächen der Körper. 370.

Oberflächen der geraden Cylinder. 372.

Oberflächen der geraden Regel. 373.

Oberflächen der Kugeln. 379.

Zwölfter Abschnitt.

Von den Kugelschnitten.

Die Figur dieser Schnitte. Seit. 385.

Pole der Kugelschnitte. Art der Kugel. 388.

Kugelschnitte, die einander schief schneiden, oder berühren. 393.

Maß des Winkels, welchen zweien der größten Cirkel einer Kugel einschließen. 601.

Solide Ecken. 603.

Sphärische Dreyecke. 605.

Gründe der Gleichheit zweyer dreyseitigen Ecken. 610.

Besondere Eigenschaften der geradewinklichten dreyseitigen Ecken. 620.

Wie die schiefwinklichten dreyseitigen Ecken aus zweien geradewinklichten entstehen. 625.

Dreyzehender Abschnitt.

Gründe der Berechnung ausgedehnter Größen.

Einleitung. Seit. 627.

Gerade Linien durch Zahlen auszudrücken. 629.

Die Winkel durch Zahlen auszudrücken. 631.

Ausmessung der geradelinichten Figuren. 632.

Ausmessung verschiedener Körper. 636.
 Von der Buchstaben Rechnung. Erklärung der Zeichen. 640.
 Vereinigung der Zahlen, so durch Buchstaben angezeigt werden, und deren Subtraction. 647.
 Die Producte zusammen gesetzter Factoren durch Buchstaben auszudrucken. 648.
 Die Division. 655.
 Zahlreihen. Die Arithmetische. 656.
 Von den geometrischen Zahlreihen. 661.
 Geometrische Reihen zu summiren. 664.
 Wie oft eine beliebige Zahl von zweyerley Buchstaben versetzt werden könne. 672.
 Die Dignitäten einer zweytheiligen Wurzel, 680.
 Ein jedes Glied einer geometrischen Reihe zu finden. 685.
 Begriffe der Logarithmen. 689
 Gebrauch der Logarithmen. 699.
 Von der Berechnung der Logarithmen. 703.
 Die logarithmische Linie. 705.
 Wirkliche Berechnung der Logarithmen. 711

Vierzehrender Abschnitt. **Berechnung der Cirkel und Winkel.**

Ein wichtiger Grundsatz. Seit. 723.
 Berechnung des Umkreises eines Cirkels. 726.
 Verschiedene Berechnungen, die sich auf die Ausmessung des Umkreises eines Cirkels gründen. 733.
 Berechnung der Seiten und Winkel der Dreyecke. 738.
 Sinus. Cosinus. 739.
 Tangenten. 742.
 Vorbereitung zur Berechnung der Sinus und Tangenten. 745.
 Berechnung der Sinus. 752.
 Nähere Gründe der Berechnung zur Seiten und Winkel der Dreyecke. 755.
 Wirkliche Berechnung der Dreyecke. 758.
 Vorbereitung zur Erfindung der Regeln, nach welchen die dreyseitigen Ecken zu berechnen sind. 764.
 Regeln zur Berechnung der geradewinklichten dreyseitigen Ecken. 768.
 Anwendung dieser Regeln. 772.
 Regeln zur Berechnung der dreyseitigen Ecken, deren Winkel schief sind. 774.
 Anwendung dieser Regeln. 778.

):o:(

Erster

Erster Abschnitt.

Einfache Rechnungsarten mit ganzen Zahlen und zehentheiligen Brüchen.

Allgemeine Begriffe von den Zahlen.

S. 1.

etwas gezehlet, oder durch eine Zahl ausgedrückt werden sol, so muß dasselbe entweder schon in Theile theilet seyn, oder in dergleichen Theile getheilet werden: und diese Theile müssen entweder gleich seyn, oder man muß sie doch als gleich ansehen: in allen andern Fällen ist das Zehlen ohnmöglich. Es liegen etliche Münzen vor mir, die ich zehlen sol; ich werde dieses leicht verrichten, wenn sie alle von einer Größe, und zum Exempel Gulden sind. Sind sie aber von verschiedenem Werthe, so können sie nicht anders gezehlet werden, als wenn man auf ihren Werth gar nicht Acht hat, sondern sich dieselbe bloß unter dem allgemeinen Begriff der Münzen vorstellt; so bald man dieses annimmt kan man zehlen, eine, zwei, drey Münzen, von was vor einem Werth sie auch seyn mögen, weil sie nemlich darinne alle überein kommen, daß sie Münzen sind.

A

S. 2. Diese

I. Abschnitt. §. 2. Diese Theile mögen im übrigen so groß oder klein seyn als sie wollen. Es sind zuweilen die Dinge, welche gezehlet werden sollen, in solche Theile getheilet, welche ihrer Beschaffenheit nach nicht wohl kleiner können genommen werden, als wenn man eine Heerde Schaafe zehlet, welche man nicht wohl in kleinere Theile als in einzelne Schaafe abgetheilet, sich vorstellen kan: doch verhindert in diesem Fall nichts, daß man die Heerde nicht auch durch Paare oder Duzende, durch Schocke oder etwas dergleichen, zehle. In den meisten Fällen aber können die Theile auch so klein genommen werden als man wil, und man kan zum Exempel eine jede Länge, durch die Zahl der Meilen, der Ruthen, der Schritte, der Ellen, der Schuhe, der Elle, und so ferner, welche in derselben enthalten sind, ausdrücken.

§. 3. Ein dergleichen Theil, aus welchem dasjenige, so gezehlet werden sol, zusammen gesetzt wird, oder verschiedene solche Theile zusammen genommen und als ein Ganzes betrachtet, heisset eine **Einheit**, und es besteht also bloß in unserer Willkühr, wie groß wir die Einheiten annehmen wollen, welche zu zehlen wir uns vorgenommen haben.

§. 4. Wenn man sich aber ein Ding, es mag so groß oder so klein seyn als es wil, aus Einheiten zusammen gesetzt, vorstellt, so wird es zwar oft eben deswegen, weil man es sich so vorstellt, und so lange man es sich so vorstellt, eine Zahl genennet, es mag nun dasjenige Ding, welches man sich dergestalt vorstellt, wirklich aus verschiedenen einzeln Dingen bestehen, wie eine Armee zum Exempel aus vielen Soldaten; oder es mögen die Einheiten, aus welchen man es zusammen gesetzt hat, in einem und dergestalt fortgehen, daß die zweite anfängt, wo die erste aufhöret, wie auf die Art ein Stück Weges aus den Schritten besteht, welche es ausmachen, oder eine gewisse Zeit aus den Stunden oder Minuten, welche in derselben enthalten sind. Doch muß man gestehen, daß dieses die eigentliche Bedeutung nicht sey, welche wir mit dem Wort, Zahl, verknüpfen.

§. 5. Wenn wir genau reden, so verstehen wir unter diesem Worte Zahl, nicht so wohl die Dinge selbst, welche wir zehlen, als vielmehr einen Begriff von der Art und Weise, wie dieselbe aus ihrer Einheit entstehen. Ich zehle eins, zwei, drey Thaler. Nicht diese drey Thaler sind eigentlich die Zahl, sondern sie sind dasjenige, so gezehlet worden ist. Indem ich aber diese drey Thaler zehle, so stelle ich
mir

mit vor, daß, um dieselbe aus einem einzeln Thaler zu machen, ich einen Thaler nehmen, zu demselben den zweyten, und denn noch einen hinzusetzen müsse, und eben dieser Begriff ist es, welchen ich mit dem Worte Drey verknüpfe, womit ich die gegenwärtige Zahl der Thaler ausdrücke. Aus der Ursache drücken wir drey Ducaten, drey Menschen, drey Schritte, durch eben das Zahl-Wort aus, weil nemlich drey Ducaten aus einem Ducaten, drey Menschen aus einem Menschen, drey Schritte aus einem Schritt, eben so werden, wir drey Thaler aus einem Thaler entstehen.

S. 6. Da die Einheiten willkührlich sind, 1, 2, 3. fügt es sich zuweilen, daß dieselbe, wenn sie wiederhohlet werden, eben dasjenige Ding heraus bringen, so gezehlet werden sol, oder ein anderes so ihm gleich ist, wie dieses geschieht, wenn man eine Heerde Schaafse nach einzeln Schaafen zehlet. In diesem Fall wird die Zahl, womit man dieses Ding ausdrucket, eine ganze Zahl, oder auch-schlechtthin eine Zahl genennet.

S. 7. Zuweilen aber bringet die wiederhohlte Einheit das Ding so gezehlet werden sol nicht heraus. Nicht eine jede Heerde Schaafse läßt sich durch Duzende zehlen; es kan eine Heerde aus sieben Duzenden, und einigen einzeln Schaafen drüber, bestehen, oder eine kleine Heerde kan nicht einmal ein einziges Duzend ausmachen. Die Zahlen, welche mir einen Begriff von der Art und Weise machen, wie dergleichen Dinge aus ihrer Einheit entstehen, heißen gebrochene Zahlen oder Brüche. Es wird aber das Ding, welches durch eine gebrochene Zahl bedeutet wird, aus der Einheit, indem man die Einheit in verschiedene gleiche Theile theilet, und deren etliche annimt.

S. 8. Eine gebrochene Zahl ist entweder größer oder kleiner als die Einheit. Ist die Einheit ein Duzend, so ist eine Heerde, welche nicht aus lauter vollen Duzenden besteht, entweder weniger als ein Duzend, oder mehr. Ein Bruch von der ersten Art, welcher nemlich kleiner ist als die Einheit, heißet ein ächter Bruch, der andere aber ein unächter, und kan allzeit in eine ganze Zahl und einen ächten Bruch verwandelt werden. Zuweilen stellet man sich auch eine ganze Zahl als einen Bruch vor, indem man nemlich die ganze Einheit in etliche gleiche Theile theilet, und alle diese Theile zusammen zwey, drey, vier oder mehr mal nimmet. Indem dieses geschieht, wird die ganze Einheit eben so oft genommen, und man bekommt also wirklich eine ganze Zahl.

I. S. 9. Alles dieses noch deutlicher einzusehen, stelle man sich die gerade Linie AB vor, welche durch eine Zahl ausgedrückt werden soll.

F. 1. Man muß zu dem Ende eine andere gerade Linie nach Belieben als eine Einheit annehmen, wenn man sich nicht einer solchen bedienen will, welche bereits im gemeinen Leben dazu angenommen worden ist, dergleichen die Schuhe, Zolle, oder etwas dergleichen sind. Gesezt CD sey diese Einheit, und AB lasse sich in Theile theilen, welche der CD gleich sind, als AE, EF, FB, welche zusammen genommen die gerade Linie AB ausmachen: so kan AB durch eine Zahl ausgedrückt werden. Ich sehe daß man die Einheit AE, welche so groß ist als CD, setzen, und noch eine dergleichen Einheit EF hinzu thun, und so dann FB anfügen müsse, damit die AB aus der CD werde, das ist, daß man die Einheit CD drey mal nehmen müsse, um die AB zu erhalten. Die Zahl drey ist demnach diejenige, welche nunmehr die Größe der Linie AB ausdrückt, und diese ist eine ganze Zahl 1, 6.

F. 2. S. 10. Wenn aber die gerade Linie GH durch eine Zahl ausgedrückt werden sollte, welche sich auf die Einheit IK beziehet, so kan dieses nicht anders geschehen, als wenn man die IK in verschiedene gleiche Theile theilet, und so dann aus solchen Theilen die GH zusammen sezet. Es kan dieses in der vorliegenden Figur geschehen, wenn man der IK drey Theile giebt, denn zwey solche Theile machen die Linie GH aus. So bald man dieses eingesehen, kan man GH durch eine Zahl ausdrücken, aber diese wird keine ganze, sondern eine gebrochene Zahl seyn 1, 7. Man stellet sich diese Zahl eben damit vor, wenn man begreift, daß man die Einheit IK in drey gleiche Theile theilen, und zwey dergleichen Theile nehmen müsse, die Linie GH zu erhalten; oder indem man saget, GH sey zwey Drittel der Einheit. Dieses ist ein ächter Bruch 1, 8.

F. 3. S. 11. Ein Exempel eines unächten Bruchs aber hat man bey der Linie MN, welche durch eine Zahl ausgedrückt werden soll, deren Einheit OP ist. Diese OP ist in drey gleiche Theile getheilet worden, und fünf solcher Theile machen die MN aus. Es ist also diese MN grösser als die Einheit OP, entstehet aber doch, indem man einen gewissen Theil dieser Einheit, nemlich ein Drittel derselben, wiederholet, und kan nicht durch die Wiederholung der OP selbst entstehen.

S. 12. Eine Zahl wird grösser, wenn die Einheiten vermehret werden, welche sie ausmachen, und kleiner, wenn ihrer weniger werden.

den. Und außer dieser Vermehrung und Verminderung kan man mit den Zahlen keine andere Veränderung vornehmen. Eine Zahl bleibt unverändert, ob man zwar die Einheiten, aus welchen sie besteht, in eine andere Ordnung setzt, oder an statt einiger Theile, welche man wegnimmt, andere hinzusetzt, welche jenen gleich sind, oder doch als gleich angesehen werden. Denn man sieht bey dem Zehlen keineswegs auf die Ordnung der Einheiten, und wenn man die Einheiten selbst verändert, und an die Stelle eines jeden Groschen, welchen man vorhero gezehlet, einen Ducaten, oder an die Stelle eines jeden Punctes in der Zahl AB ein Sternchen, wie zwischen CD, setzt, so bleibt doch die Art und Weise, wie alle Sternchen zwischen CD aus einem Sternchen erwachsen, einerley mit der Art und Weise, wie alle Puncte zwischen AB aus einem solchen Puncte worden sind, und wird demnach I, 5. die Zahl durch eine dergleichen Verwechselung nicht geändert, sondern bloß die Einheiten.

F. 4.

§. 13. Einerley Ding kan bald durch eine grössere, bald durch eine kleinere Zahl ausgedrückt werden, nachdem man die Einheiten annimmt, aus welchen man es zusammen setzt. Und nahmentlich wird dasselbe Ding durch eine große Zahl ausgedrückt, wenn die Einheiten, aus welchen man es zusammen setzt, klein angenommen werden, und durch eine kleinere, wenn man die Einheiten grösser nimmt. Eine Armee kan aus sehr vielen einzeln Leuten bestehen; sie besteht aber nothwendig aus ungemein wenigern Regimentern.

§. 14. Und zwar wenn die Grösse eines Dings AB durch eine Zahl ausgedrückt worden, welche sich auf die Einheit CD beziehet, und man nimt an die Stelle dieser Einheit eine andere CE, welche nur halb so groß ist als die vorige CD, so wird die Zahl, welche AB ausdrückt, zweymal grösser als diejenige, welche sie vorher ausgedrückt. Dieses ist selbst aus der Figur sichtlich, und man begreiffet leicht, daß man weiter gehen, und sagen kan, daß wenn die Einheit, drey, vier, fünfmal kleiner gemacht wird, die Zahl, welche die Grösse der AB ausdrückt, drey, vier, fünfmal grösser werde, und so ferner. Wie auch, daß die Zahl, welche die Grösse eines Dinges ausdrückt, zwey, drey, viermal kleiner werden müsse, wenn die Einheit zwey, drey, viermal grösser genommen wird; und so in allen Fällen.

F. 5.

§. 15. Ist aber die Einheit bekannt, nach welcher gezehlet worden, und die Zahl solcher Einheiten, welche die Grösse eines gewissen Dinges ausmachen; so ist uns die Grösse dieses Dinges selbst bekannt.

I. Abschnitt. Und darin besteht eben der Nutzen der Zahlen, daß man vermittelst derselben einem jeden so leicht einen Begriff von der Größe dieses oder jenen Dings beybringen kan. Das Ding, welches durch eine Zahl ausgedrückt worden, ist desto größer, je größer die Einheit ist, nach welcher gezehlet worden, und je größer die Zahl ist, welche das Ding ausdrückt, und desto kleiner, je kleiner die Einheiten sind, aus welchen es bestehet, und je geringer sich ihre Zahl befindet.

§. 16. Man muß sich demnach hüten, daß man nicht die Größe der Dinge aus einem dieser Stücke, nemlich der Größe der Einheit und der Größe der Zahl, welche es ausdrückt, allein ermesse, nach dem wir gesehen, daß einerley Größe durch gar verschiedene Zahlen ausgedrückt werden könne, wenn man verschiedene Einheiten annimmt. Bey den Brüchen ist dieses insonderheit in Acht zu nehmen.

F. 6. Die Theile aus welchen AB zusammen gesetzt wird, sind die Theile der Einheit CD, und diese Theile sind als die Einheiten anzusehen, nach welchen man die AB zehlet. Theilet man nun CD in vier gleiche Theile, so kommen drey solcher Theile auf AB, und AB bestehet demnach aus drey Vierteln der Einheit CD. Theilet man aber CD in acht gleiche Theile, so kommen sechs solcher Theile auf AB, und AB wird nunmehr durch die Zahl sechs Achtel ausgedrückt: doch ist die Größe dieser AB nicht verändert worden. Man kan CD noch auf tausend andere Arten theilen, und aus dergleichen Theilen die AB zusammen setzen, welche dadurch immer durch andere und andere Zahlen ausgedrückt wird, ob sie zwar beständig eben die AB bleibet.

Wie die Zahlen durch Worte ausgedrückt werden.

§. 17. Die Zahlen auszudrücken und andern anzuzeigen, werden gewisse Zeichen und Wörter erfordert. Bey beyden sind gewisse Gesetze zu bestimmen, damit man mit wenigen Wörtern und Zeichen auch große Zahlen ausdrücken könne, wenn man nicht aus der Menge derselben, die äußerste Verwirrung erwarten wil.

§. 18. Das geschickteste, ja das einzige so uns hier zu statten kommen kan, ist, daß man verschiedene Einheiten annimmt, deren einige größer sind als die andern, doch so, daß allzeit die größere eine gewisse Zahl der Kleinern enthalten. Auf die Art werden die Zahlen allzeit klein, und man braucht wenige Wörter und Zeichen dieselben auszudrücken. So zehlen wir die Länge von Eissabon bis Petersburg durch

durch nicht eben sonderlich viele Meilen; welche durch eine gar grosse Zahl würde ausgedrückt werden, wenn man an statt der Meilen, Ruthen vor die Einheiten nehmen wolte, und durch eine noch viel größere, wenn man sich des Fusses als einer Einheit bedienen wolte. Dasjenige aber so seiner Bequemlichkeit wegen heut zu Tage fast überall eingeführet ist, ist nachfolgendes.

I.
Abschnitt.

§. 19. Nachdem man eine beliebige Einheit angenommen hat, setzet man eine andere aus zehn dergleichen Einheiten zusammen, welche man einen Zehner nennet, eben so wie die Landmesser ihre Ruthen aus zehn Schuben machen. Andere Einheiten machet man aus zehn Zehnern, welche Hunderte heißen. Wieder andere aus zehn Hunderten, die heißen Tausende; und so fort nach eben diesen Gesetzen, wie bald umständlicher sol erklärt werden.

§. 20. Um nun eine jede Zahl mit Worten auszudrücken, ist nichts nöthig als daß man anzeige, wie viel Tausende, wie viel Hunderte, wie viele Zehner und wie viele einzelne Einheiten in derselben enthalten sind, und weil jede Zehn einzelne Einheiten, eine Einheit der ersten höhern Ordnung, nemlich einen Zehner, ausmachen, und jede zehn Zehner eine Einheit der zweyten höhern Ordnung, nemlich hundert, und jede zehn Hunderte, eine Einheit der dritten höhern Ordnung, oder Tausende; so ist klar, daß zu gedachter Ausdrückung einer jeden Zahl, ausser den Erklärten, nicht mehr als neun Wörter erfordert werden, welche eine jede Zahl von eins bis auf zehn ausdrücken, die bekannt genug sind. Diefemnach drücken die wenigen Worte, fünf tausend, sieben hundert, dreyßig und viere, eine gar grosse Zahl aus, deren Verstand ist, daß die Zahl aus vier einzelnen Einheiten, aus drey Zehnern oder Einheiten von der ersten höhern Ordnung, aus sieben Hunderten, oder sieben Einheiten von der zweyten höhern Ordnung, und endlich aus fünf Tausenden, oder Einheiten von der dritten höhern Ordnung, bestehe.

§. 21. Besteht die Zahl aus mehr als neun Tausenden, so werden die Tausende ferner eben so gezehlet, wie die einfache Einheiten gezehlet werden. Man spricht nemlich, ein, zwey, drey tausend - - zwanzig tausend, - - dreyßig und sieben tausend, hundert tausend - - zwey hundert siebenzig und drey tausend - - zwey hundert tausend - - neun hundert und neunzig tausend, und so ferner, bis der Tausende wieder tausend werden, welche eine Einheit von der
sech-

I. sechsten höhern Ordnung geben, die eine Million genennet wird.
Wissen. Nehmlich ein Zehner der Tausende, oder einmal zehn tausend ist eine Einheit der vierten höhern Ordnung, ein hundert tausend eine Einheit der fünften, und also eine Million eine Einheit der sechsten höhern Ordnung.

S. 22. Zahlen, welche über Millionen gehen, werden ausgedrückt, wenn man die Millionen anzeigt, so in derselben enthalten sind, und so dann die Tausende, Hunderte, Zehner, und die einfache Einheiten, wie gelehret worden. Es werden aber die Millionen vollkommen so gezelet, wie die einfache Einheiten, man rechnet nemlich derselben eine, zwei, drei, zehn, zwanzig - - - vier und zwanzig - - - hundert - - - vier hundert dreyßig und fünf - - - tausend - - - hundert tausend - - - neun hundert neunzig und neun tausend, neun hundert neunzig und neune, bis endlich eine Million von Millionen erwachse, welche eine Billion heisset, und welche wieder als eine besondere Einheit von einer hohen Ordnung angesehen wird, welche die größste ist.

S. 23. Nun ist hoffentlich nichts mehr zu sagen nöthig, wenn man ohne Ende weiter gehen sol, als bloß das einzige, daß eine Million von Billionen eine Trillion heisse, eine Million von Trillionen eine Quadrillion, und so ferner beständig fort. Und dieses setzt uns in den Stand, eine jede Zahl, sie mag so groß seyn als sie wil, mit Worten geschickt auszudrücken, und wenn sie von andern ausgedrückt worden, deutlich zu übersehen.

Die Zahlen geschickt zu schreiben.

S. 24. Im schreiben der Zahlen kan man außer der gezeigten noch eine andere Leichtigkeit haben, welche bloß deswegen nicht von allen nach Würden geschätzt zu werden scheint, weil sie so sehr bekant ist. Jede Zahl wird durch Einheiten von verschiedenen Ordnungen ausgedrückt I, 20. Die Zahl keiner dieser Einheiten steigt über neune. Was ist weiter nöthig, als daß man sich neun Zeichen erwöhle, mit welchen man die Zahlen der Einheiten bis auf neune be-merke, es mögen nun diese Einheiten einfach, oder von einer höhern Ordnung seyn; dabey aber auch etwas anders ausmache, wodurch man unterscheiden könne, ob die also angenommenen Zeichen einfache Einheiten bedeuten, oder ob sie Einheiten von der ersten, andern oder dritten

dritten höhern Ordnung, und so ferner, ausdrücken. Die Zeichen der Zahl der Einheiten bis auf neune, sind bey uns diese bekannte 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Die Ordnung aber der Einheiten, welche sie bedeuten, wird aus dem Ort ermessen, welchen jedes dieser Zeichen einnimmt. Und dazu hat man nachfolgendes festgesetzt.

§. 25. Wenn eine Zahl bloß vor sich da steht, so bedeutet sie allezeit einfache Einheiten; als 5, 7, 3. Stehen aber zwei Zahlen neben einander als 45, so bedeutet die, so gegen der rechten Hand steht, wieder einfache Einheiten, die nächste zur linken aber Einheiten von der erstern höhern Ordnung, oder Zehner, und demnach 45, vier Zehner oder vierzig, und fünf.

§. 26. Sollten nun bloss vier Einheiten der ersten höhern Ordnung oder vierzig ausgedrückt werden, so müste zwar die 5 fehlen, aber damit so dann 4 noch vier Zehner bedeuten könnte, derselben ein Zeichen beygefüget werden, so an sich nichts bedeutete, aber doch dienen könnte, das Zeichen 4 am nächsten Ort von demjenigen in welchem die 5 stund, nach der linken zurück zu setzen, welches Zeichen 0 ist, so in allen ähnlichen Fällen auf die Art gebraucht wird.

§. 27. Und auf eben die Art verfähret man auch bey den Einheiten von noch höhern Ordnungen. Gleichwie eine Ziffer die zu nächst an der letzten steht, Einheiten von der ersten höhern Ordnung, oder Zehner bedeutet, also bedeutet eine Ziffer, so zunächst auf diese folget, und folgend die dritte Stelle einnimmt, Einheiten von der andern höhern Ordnung, oder Hunderte, die in der vierten Stelle, Tausende und so ferner, und überall werden die Stellen, in welchen keine Ziffer stehen, weil nemlich dergleichen Einheiten fehlen, als die Ziffer in denselben Stellen bedeuten würden, mit 00 vollgefüllet, weil man ohne denselben nicht wissen könnte, den wie vielsten Ort die wirklich vorhandene Ziffer einnehme. Wenn also dreystausende und vierzig und sieben bezeichnet werden sollen, da keine Einheiten von der andern höhern Ordnung, oder keine Hunderte vorkommen, werden die Ziffer also 3047 stehen müssen, 3007 aber wird dreystausend und sieben bedeuten, und so in allen übrigen Fällen.

§. 28. Wenn demnach Einheiten von der ersten höhern Ordnung alleine vorkommen, bekommen die Ziffern welche sie ausdrücken eine 0, also 30: Einheiten von der andern höhern Ordnung alleine bekommen zwei 00, also 700, die von der dritten Ordnung drey 000,

I. als 4000, und überall ist die Zahl der 0000, die zur Rechten angehängt werden, einerley mit der Zahl, welche die Ordnung der Einheiten angiebt, die durch die vorstehende Ziffer ausgedrückt werden. Wenn der Nullen zu viele wären, pflegt man die Zahl derselben zuweilen nur zu bemerken, und über die Ziffer eine andere zu setzen, welche diese Zahl anzeigt, also 7, welches so viel seyn soll 730000000, und in diesem Fall zeigt die übergeschriebene Ziffer, als hier 7, allezeit die Ordnung der Einheiten der darunterstehenden Ziffer an, und folgendes auch die Ordnung der Einheiten, welche die übrigen Ziffern, als hier 5, ausdrücken.

Die dergestalt geschriebene Zahlen zu lesen.

§. 29. Setzt man dieses alles mit dem, was von Aussprechung der Zahlen gesagt worden, zusammen, so wird es unschwer seyn, eine jede Zahl, welche mit nunmehr erklärten Ziffern geschrieben ist, auch mit Worten geschickt auszudrücken. Zur Erleichterung theile man die vorgegebene Zahl erstlich in Classen von sechs Ziffern, indem man von der ersten Ziffer zur Rechten anfängt, und nach der Linken zugehet, und schreibe über die erste Ziffer zur Rechten gar nichts oder 0, über die siebende oder die erste der folgenden Classe aber 1, über die drey zehende, oder die erste der dritten Classe II, über die erste der vierten Classe III, und so fort.

§. 30. So dann theile man zweytens jede dieser Classen wieder in zwey von dreyen Ziffern, und bemerke die Abtheilung mit einem (·). Kan man nun drey Ziffern lesen, die so geschrieben stehen 472, oder 301, oder 035, oder 006, welches keine Schwierigkeit hat, da die erste zur Linken Hunderte, die zweyte Zehner und die dritte einfache Einheiten bedeutet, so kan man eine jede also getheilte Reihe ebenfalls aussprechen. Man darf nur jede Classe von drey Ziffern eben so lesen wie die, deren wir eben erwöhnet haben, so dann aber ein jedes (·) so die kleinen Classen unterscheidet, durch tausend, und die oben geschriebene Ziffern I, II, III u. durch Million, Billion, Trillion u. aussprechen, eben so als wenn an statt dieser Zeichen, die eben genannte Wörter geschrieben wären, vor (·) nemlich tausend, vor I, Million, vor II, Billion, vor III Trillion, und so fort. Und diesem zu folge wird nachstehende Zahl 73.524'287.503'724.315'030.515' ausgesprochen: 73 tausend und 524
Tril-

Trillionen, 287 Tausend und 503 Billionen, 724 Tausend und 315 Billionen, 30 Tausend und 515 Einheiten.

I.
Abchnitt.

S. 31. Nämlich alle Ziffern die vor den bezeichneten 3, 5, 3, 4 stehen, bedeuten dergleichen Einheiten, als die über diesen stehende Zeichen 0, I, II, III, andeuten, und demnach die in der ersten Classe zur Linken 73 tausend Trillionen, und noch über dieses 524 Trillionen, die in der nächsten 287 tausend Billionen, und noch über dieses 503 Billionen, und so fort.

Wie die Brüche überhaupt bezeichnet werden.

S. 32. Da eine gebrochene Zahl entsteht, indem man die Einheit in verschiedene gleiche Theile theilet, und einen oder etliche solche Theile annimmt, welche den Bruch ausmachen I, 7, so sind einen Bruch zu bezeichnen zwei ganze Zahlen nöthig, deren erstere anzeigt, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilet werden müsse, die andere aber, wie viele dieser Theile zusammen genommen den Bruch ausmachen. Die erstere dieser Zahlen heißet der Nenner, weil sie die Größe der Theile bestimmt, in welche man die Einheit getheilet hat, die andere aber der Zehler, weil sie die Zahl dieser Theile in dem Bruch angiebet. In dem Bruch, welcher das Stück GH aus der Einheit IK ausdrückt, ist der Nenner 3 und der Zehler 2, denn die Einheit IK ist in 3 Theile getheilet, deren zweye die GH ausmachen. Und dieses ist ein achter Bruch. In dem Bruch aber welcher MN aus der Einheit OP ausdrückt, und welcher unächt ist, ist der Nenner wieder 3, und der Zehler 5.

F. 2.

F. 3.

S. 33. Es ist durchgehends eingeföhret, daß man den Zehler über eine Linie, und den Nenner darunter schreibt, folgender massen, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, und auf die Weise werden alle Brüche bezeichnet, sie mögen ächt oder unächt seyn.

S. 34. Man kan aber auch einen unächtten Bruch anders schreiben, indem man nämlich die ganze Einheiten, welche in demselben enthalten sind, voraus setzet, und den Ueberschuß hinten anfüget, folgender gestalt: $1\frac{2}{3}$, $3\frac{3}{5}$, $153\frac{5}{7}$. Im Gegentheil kan man auch eine jede ganze Zahl in Form eines Bruchs schreiben, als 7, bedeutet so viel als $\frac{7}{1}$, und $\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{1}{2}$.

I.

Abschnitt.

Zehentheilige Brüche.

S. 35. Es giebt eine besondere Art von Brüchen, welche von sonderbarer Bequemlichkeit sind, nemlich die so genannten Zehentheilige. Die Nenner derselben sind entweder 10, oder 100, oder 1000, und also allzeit eine Einheit von einer der höhern Ordnungen. Diese Brüche kan man auſſer der eben gewiesenen noch auf eine andere Art bezeichnen, welche ganz und gar aus den Geſetzen fließet, nach welchen die ganzen Zahlen bezeichnet werden, und ſind dieſelben nur zu dem Ende etwas wenigſes weiter auszudehnen.

S. 36. Ein Bruch deſſen Nenner 10 iſt, und der Zehler 1, oder $\frac{1}{10}$ iſt der zehende Theil der Einheit. Ein Bruch deſſen Nenner 100 iſt, und der Zehler wieder 1, oder $\frac{1}{100}$ iſt der zehende Theil des vorigen $\frac{1}{10}$, weil jedes Theil ſo in den vorigen gezelet wird, oder jedes $\frac{1}{10}$ wieder in zehn Theile getheilet werden muß, damit ihrer 10 mal 10 oder hundert heraus kommen, und eben ſo iſt $\frac{1}{1000}$ der zehende Theil von $\frac{1}{100}$, und ſo beſtändig fort. Schreibet man alſo $\frac{1}{10}$ und wiederum $\frac{1}{100}$, ſo ſind die Einheiten, welche der Zehler des erſten Bruchs zehlet, zehn mal größer, als die Einheiten, die der Zehler des andern Bruchs anzeigt, und wiederum ſind die Einheiten des Zehlers in dem Bruch $\frac{1}{100}$ zehn mal größer als die Einheiten des Zehlers in dem Bruch $\frac{1}{1000}$, und ſo fort. Denn es zehlet der Zehler eines jeden Bruchs nichts anders als die Theile, deren Größe der Nenner dadurch ausdrückt, daß er anzeigt, wie viele derſelben in der ganzen Einheit enthalten ſind.

S. 37. Nach den Geſetzen von der Bezeichnung der Zahlen, welche I, 24. gelehret worden ſind, enthält jede Einheit einer Ziffer die Einheiten derjenigen, welche nach der rechten Hand zu unmittelbar an derſelben ſtehet, zehn mal, und die Einheiten welche in dieſer gezelet werden, ſind zehn mal kleiner als die Einheiten, die jene zehlet. In der Reihe von Ziffern 5372 ſind die Einheiten welche die Ziffer 5 bemerkt, Tauſende, und folgendes zehn mal größer als die Einheiten der Ziffer 3, welche Hunderte ſind. Dieſe ſind wieder zehn mal größer als die Einheiten der Ziffer 7, da dieſe Zehner ſind, und dieſe ſind zehn mal größer als die einfache Einheiten, welche von der nächſt folgenden Ziffer 2 gezelet werden. Und hieraus folget, daß wenn geſetzt wird, daß in eben der Reihe 5372 die letzte Ziffer 2, einfache Einheiten bedeute, und man ſetzt noch eine Ziffer zur Rechten darzu, als,

als, 5372, 6; diese Ziffer 6 nichts anders als 6 Zehentheile der Einheit oder $\frac{6}{10}$ bedeuten könne, und wenn noch eine Ziffer daran gesetzt wird, als 5372, 64, diese $\frac{64}{100}$ bedeuten müsse, und so fort.

I.

Abchnitt.

S. 38. Dieses sage ich, wird in unserm Exempel geschehen, wenn die Ziffer 2, beständig einzelne Einheiten bedeutet. Daß man aber dieser Ziffer 2, oder einer jeden andern diese Bedeutung gebe, könnte nicht errathen werden, wenn man die Ziffer ohne Absatz in einer Reihe nach einander fort schreiben wolte, dergestalt 537264, da vielmehr jederman die letzte Ziffer 4, nach den gegebenen Gesetzen, vor die Zahl der einzelnen Einheiten halten würde. 1, 25. Man hat ein Zeichen nöthig, wodurch die Ziffer bemerkt wird, so die einzeln Einheiten zehlet, und dieses ist meistens, und bey uns allezeit, ein (.), so nach derselbigen Ziffer gesetzt wird, dergestalt 5372, 64. Andere haben andere Zeichen, welche, wenn sie vorkommen, leicht abzumerken sind.

S. 39. Es können nach dieser Anweisung auch diejenige zehentheilige Brüche bezeichnet werden, bey welchen gar keine einzelne Eintheile anzutreffen sind, es muß aber auch hier der Ort dieser Einheiten bemerkt werden, damit man wissen möge, welcherley Einheiten durch eine jede der in der Bezeichnung des Bruchs vorkommenden Ziffer bedeutet werden. Dieses geschieht, indem man an die Stelle der einzeln Einheiten 0 setzt, mit darauf folgenden (.), wie dieses ordentlich gebraucht wird, diesen Ort zu bezeichnen. Demnach bedeutet 0, 6, sechs zehentheil, 0, 659, sechs zehentheil, 5 hundertheil und 9 tausendtheil. Aber 0, 05 bloß fünf hunderttheil, und 0, 009 neun tausendtheilchen.

S. 40. Nachdem der Ort der einfachen Einheiten auf die Art bezeichnet worden, kan man zu jeder Ziffer, oder zu jeder Reihe von Ziffern beiderseits so viel Nullen hinzusetzen als man will, ohne die Zahl, welche durch dieselbe ausgedrückt wird, zu verändern. Es bedeutet 003, 7000 nichts anders als 3, 7 oder drey und 7 Zehentheilchen. Denn die Nullen können niemals etwas anders wirken, als daß sie den Ort verändern, welchen eine jede Ziffer einnimmet: dieser aber ist unveränderlich, so bald durch die Bemerkung des Ortes der einfachen Einheiten, oder durch das (.) der Ort einer jeden Ziffer fest gestellt wird, so daß man denselben zu erkennen auf die beschriebene Nullen ferner gar nicht zu sehen hat, welche demnach gänzlich unnütz sind, und keine Wirkung haben können.

I. S. 41. Ob zwar im übrigen die zehentheilichte Brüche dem ersten Abschnitt. Anblick nach ziemlich unnütze scheinen dürften, weil unter den unendlichen Arten, nach welchen die Einheit kan getheilet werden, die zehentheilichte Theilungen nur sehr selten vorkommen können: so wird man doch bey genauerer Betrachtung die Sache ganz anders finden. Es ist an dem, daß sich diese Theilung der Einheit nicht schicket, einen jeden Bruch genau auszudrücken. Als zum Exempel $\frac{1}{2}$ sind grösser als $\frac{1}{3}$ und kleiner als $\frac{1}{4}$ und können also durch zehentheil nicht ausgedrückt werden, es geht dieses auch nicht durch zehentheil, hundertheil und tausendheil an, ja man kan diesen Bruch $\frac{1}{2}$ gar nicht durch zehentheilige Brüche ausdrücken, wie aus dem folgenden erhellen wird. Aber es ist auch im Gegentheil richtig, daß je mehr der Theile sind, in welche die Einheit getheilet wird, je kleiner dieselben werden, und daß, so groß auch die Einheit seyn mag, man durch eine wiederholte Theilung der Theile endlich auf Kleinigkeiten hinaus komme, welche in Ansehung des Ganzen fast vor nichts zu achten sind, so daß wenig daran gelegen ist, ob man um ein oder anderes dergleichen Theilchen fehlet oder nicht. In Ansehung eines Thalers ist $\frac{1}{10}$ von einem Pfennig vor nichts zu halten, ja es ist diese Kleinigkeit auch vor sich allein so anzusehen, als ob sie von ganz und gar keinem Werthe wäre, weil in der That wenig nütliches damit kan geschaffet werden. Nun kommt man aber bey den zehentheilichten Brüchen, wenn man forts gehet, endlich allezeit auf dergleichen Kleinigkeiten, welche in der Anwendung vor nichts können gehalten werden, weil deren Abgang in keine Betrachtung kommet, und es kan demnach in einem solchen Fall der bequeme zehentheilichte Bruch mit eben solcher Richtigkeit gebraucht werden, als ob er alles genau ausdrückte. Zum Exempel, 0, 5732 wären Theilchen eines Thalers, so ist es mir in der Anwendung eines, ob ich 0, 5732 eines Thalers habe, oder ob mir die letzte 0, 0002 mangle, und in diesem Fall ist demnach 0, 5732, und 0, 573 vor einerley zu halten, weil 0, 0002 eines Thalers eine an sich ganz und gar unnütze Kleinigkeit sind, indem sie kaum den $\frac{1}{10}$ eines Pfennigs ausmachen. Demnach ist vielmehr der Bruch 0, 5732 genau genug, ob ich zwar versichert seyn kan, daß derselbe den Theil des Thalers, welchen er ausdrücken solte, nicht genau darstelle, sondern ihm eine oder andere Ziffer von hinten zu mangle. Und es folgt demnach, daß wenn die zehentheilige Brüche nicht geschickt sind, einen jeden Theil der Einheit genau zu bezeichnen, sie doch dieses jederzeit mit so geringen Fehlern thun können, daß an diesen Fehlern gar nichts

nichts gelegen ist, und sie begehen und gar nicht fehlen, in der Anwendung auf eins hinaus kommt.

I.
Addition.

§. 42. Nimt man nun dasjenige, so von den zehentheiligen Brüchen gesagt worden, mit dem zusammen, so wir oben I, 20. von der Bezeichnung der ganzen Zahlen beygebracht, so siehet man, daß eine jede Zahl so groß oder so klein seyn mag, bequem auszudrücken, man sich ausser den angegebenen Einheiten der höhern Ordnung, andere Einheiten von niedrigeren Ordnungen, als die einfachen Einheiten sind, vorstellen könne, von welchen die unmittelbar größern allezeit die nächstfolgende kleinere zehnmal in sich faßt, und deren allergrößte der zehnte Theil der einfachen Einheiten ist. Diesem zu folge wird die Einheit der erstern niedrigeren Ordnung ein Zehentheil des Ganzen, die Einheit der zweyten niedrigeren Ordnung ein Zehentheil der Einheit der ersten niedrigeren Ordnung, und ein Hundertheil des Ganzen, und so ferner.

Die Addition.

§. 43. Der Nutzen dieser Bezeichnung der Zahlen besteht nicht bloß darinne, daß wir dieselben bequem ausdrücken. Sie giebt uns auch die bequemsten und leichtesten Arten an, eine Zahl in eine andere zu verwandeln, und aus einigen Zahlen andere von verlangter Größe, und welche sich auf jene auf eine vorgegebene Art beziehen, zu finden, welches eben der Hauptzweck der Rechenkunst ist.

§. 44. Es können diese Veränderungen der Zahlen, wie wir oben I, 12. gewiesen, nicht anders als durch die Vermehrung und Verminderung derselben, vorgenommen werden. Man vermehret eine Zahl, indem man andere beliebige Zahlen zu selbigen hinzusetzt: man vermindert sie, indem man eine oder andere Zahl von derselben hinweg nimt: Dieses sind die Grundveränderungen alle, aber man kan so wohl das eine als das andere auf verschiedene Art, und nach verschiedenen Gesetzen verrichten: wenn man nemlich die Zahlen so oder so annimt, welche zu einer vorgegebenen Zahl nach und nach hinzusetzt, oder von derselben hinweg genommen werden sollen.

§. 45. Dasjenige, so bey allen diesen Veränderungen der Zahlen, oder bey allen Rechnungsarten bey demjenigen zum Grund gesetzt werden muß, der sie ausüben soll, ist daß er ohne Anstoß bis zu nicht fehlen, und von einer jeden Zahl wieder um 9 Einheiten zurück gehen

L. gehen könne. Weiß man diese Kleinigkeit, so ist es leicht zu sagen, wie viel heraus komme, wenn man jede Zahl, die nicht größer ist als neun, um eine andere dergleichen Zahl vermehret oder vermindert. Und diese Wissenschaft ist demjenigen, welcher alles andere ausüben will, so von der Veränderung der Zahlen und deren Verwandlung in andere gesagt werden soll, zum ersten Anfang hinlänglich.

S. 46. Indem man eine Zahl vermehret durch Zufegung anderer Zahlen, wird eine neue Zahl gefunden, welche alle Zahlen, die zusammen gesetzt worden sind, in sich begreift, und denselben zusammen gleich ist. Diese heisset die Summe aller der Zahlen, welche man zusammen gesetzt hat. Die Rechnung aber, durch welche die Summe verschiedener gegebenen Zahlen gefunden wird, heisset die Addition. Zum Exempel, die Zahlen 3 und 5 und 9 zusammen, bringen die Zahl 17, und 17 begreift alle die vorigen Zahlen in sich. Diese Zahl 17 ist also die Summe der Zahlen 3 und 5 und 9, und indem ich die ersten Zahlen nach und nach zusammen setze, und dadurch finde, daß sie die Zahl 17 bringen, und zusammen dieser gleich sind, so addire ich gedachte Zahlen.

S. 47. Wenn wir auch hier die Zahlen aus den Theilen zusammen gesetzt uns vorstellen, aus welchen wir sie bis anhero mit so vieler Bequemlichkeit zusammen gesetzt haben, nemlich aus ihren einfachen Einheiten, und den verschiedenen Einheiten der höhern und niedrigeren Ordnungen, so ist jede Addition leicht zu verrichten. Gesezt, es wären die nachstehenden Zahlen zusammen zu addiren:

5327	957, 32	58, 3279
235	50, 2	0, 0701
18	0, 7318	0, 008
<u>7954</u>	<u>57,</u>	<u>132, 7</u>

so setze man sie unter einander wie gesehen, so nemlich, daß jede Ziffer, welche Einheiten von einerley Ordnungen zehlen, gerade unter einander zu stehen kommen, und folgendes die einfachen Einheiten unter einander, und die Zehner, die Hunderte, und so ferner, und wider die Zehentheil, die Hundertheil, und was sonst vor zehentheilige Brüche vorkommen, wieder unter einander. Dieses alles giebt sich von selbst, wenn man nur zuvorderst die Ziffern, welche die einfache Einheiten bedeuten, gerade unter einander gesetzt hat, denn nach diesen richten sich so dann alle übrige.

S. 48. Nun fängt man am bequemsten von der rechten Hand an, oder von den Ziffern, welche die niedrigsten Einheiten zählen, und rechnet dieselbe nach und nach zusammen: so doch, daß, so oft man auf zehn kommt, man diese zehn als eine Einheit der nächst folgenden Ordnung bey derselben bemerkt. Die übrige Einheiten schreibt man unter die Säule von Ziffern, welche man dergestalt zusammen gerechnet, und gehet so dann zur nächsten nach der linken fort, da man aber die von der vorhergehenden übergetragene Einheiten zugleich mitnehmen muß. Ist man mit dieser Säule fertig, so verfähret man eben so mit der dritten und auf eben die Art mit den übrigen, bis an die äußerste zur linken.

S. 49. In dem ersten der gegebenen Exempel

$$\begin{array}{r}
 5327 \\
 235 \\
 18 \\
 \hline
 7954 \\
 \hline
 13534
 \end{array}$$

ist 7 und 5 so viel als 12, ich bemerke die 10 als eine Einheit der nächsten Säule, und sage die übrigen 2 (denn 12 ist 10 und 2) und die nächste 8 machen wieder 10, welche eine neue Einheit in der nächsten Säule sind, und also stehet unter der letzten nur 4, als der Ueberschuß aller Einheiten dieser Säule über die darin enthaltene Zehner. Nun machen die zwey Zehner so herüber gegangen und die oberste Ziffer der zweyten Säule 2, so viel als 4, die nächste 3 dazu giebt 7, und die nächste 1 noch dazu 8, endlich die letzte 5 hinzugesetzt, 13, oder 10 und 3. Die 10 dieser Säule sind wieder Einheiten der folgenden, und müssen zu derselbigen gerechnet, und nur die übrigen 3 als Einheiten von der ersten höhern Ordnung, unter diese Säule gesetzt werden. Ferner giebt die Einheit, so von der zweyten Säule herüber gegangen mit 3, der obersten Ziffer der dritten, 4; die nächste 2 dazu macht 6, und diese mit der nächsten, 15, oder 10 und 5. Man bemerkt demnach unter dieser Säule wieder die 5, und rechnet vor die 10 eine Einheit zur nächst folgenden Säule, deren Ziffer demnach mit dieser Einheit zusammen 13 ausmachen, welche neben der vorigen geschrieben werden.

S. 50. Es ist leicht einzusehen, daß man auch in Zusammenrechnung

1. **Wdhalt.** nung der Ziffer in den Säulen beständig fortzählen, und am Ende auf einmal die ganze Zahl der gefundenen Zehner zur nächsten Classe bringen könne. Als in unserm Exempel giebt die ganze erste Säule 24, da denn die 4 Einheiten geschrieben, die zwey Zehner aber zu den übrigen der nächsten Säule, in welcher eben dergleichen Zehner enthalten sind, gerechnet werden müssen, und dieses ist zum fertigen Rechnen bequemer. Die übrigen Exempel machen nicht die geringste Schwierigkeit, wenn man das erste eingesehen hat. Es wird alles eben so gemacht als in dem bereits erklärten, und in der Summe wird das (,) so den Ort der einfachen Einheiten bezeichnet, gerade unter die (,) in denen gegebenen Zahlen gesetzt. Denn es ist an sich deutlich, daß durch Zusammenrechnung einer jeden Säule keine andere Einheiten heraus kommen können, als solche, die in den Ziffern der Säule, welche zusammen gerechnet worden, selbst vorkommen, weil, wenn ja durch die Zusammensetzung derselben endlich zehne kommen, dieselbe allezeit zu den Einheiten der nächsten Säule, wohin sie gehören, gebracht werden.

§. 51. Weil bey den zehentheiligen Brüchen die Einheiten auf eben die Art wachsen als bey den ganzen Zahlen, und auch hier die Einheit so von einer jeden Ziffer gezehlet wird, zehnmal so groß ist, als die Einheit der Ziffer welche auf dieselbe zunächst nach der Rechten zu folget; so muß überhaupt alles was hier mit den ganzen Zahlen vorzunehmen gewiesen worden ist, sich auf diese Brüche ebenfalls ziehen lassen. Demnach wird die Summa in den vorgesezten Exempeln also stehen:

957, 32	58, 3279
50, 2	0, 0701
0, 7318	0, 008
57,	132, 7
<hr/> 1065, 2518	<hr/> 191, 1060

§. 52. Daß auf diese Art die richtige Summe, oder eine Zahl welche allen vorgegebenen zusammen genommen gleich ist, gefunden werde, ist selbst aus dem gesagten deutlich. Man hat in die gefundene unter dem Querstreich stehende Zahl alle Theile aller vorgegebenen Zahlen gebracht. Alle Theile sind beständig das Ganze, und von diesem gar nicht unterschieden. Also hat man die ganze obere Zahlen alle in die Zahl unter den Strich gebracht. Diese enthält also jene alle

alle zusammen, jene können als Theile dieser Zahl betrachtet werden; also muß diese unter den Strich geschriebene Zahl denen obern zusammen genommen gleich, und demnach die richtige Summe derselben seyn I, 46. Und dieses ist alles, so von der Addition zu sagen war.

Die Subtraction.

S. 53. Indem man eine Zahl um eine andere vermindert, 9 zum Exempel um 4, oder indem man die Zahl 9 um vier Einheiten kleiner macht als sie vorher war, bringet man eine neue Zahl 5 heraus, welche der Ueberschuß der größern der gegebenen Zahlen, 9, über die Kleinern 4 ist, und anzeigt was zu der Kleinern hinzu gesetzt werden müsse, damit die größere Zahl heraus komme. Dieser Ueberschuß, oder dieser erforderliche Zusatz zu der Kleinern Zahl, heißet auch der Unterscheid der gegebenen zwei Zahlen. Denn bloß derselbe, indem er der Kleinern mangelt, macht, daß sie von der größern Zahl verschieden ist, I, 12. und die kleinere Zahl wird der größern gleich, so bald als dieser Unterschied zu ihr hinzu gethan wird.

S. 54. Die Rechnungsart, durch welche man den Unterschied zweyer bekannten Zahlen findet, heißet die Subtraction, und wird demnach dieselbe verrichtet, indem man eine kleinere Zahl von einer größern wegnimmt, oder deutlicher, indem man von einer bekannten Zahl einen Theil wegnimmt, welcher eine ebenfalls bekannte Zahl gleich ist.

S. 55. Dasjenige was hier voraus gesetzt wird, ist bloß dasjenige dessen oben I, 45. erwähnt worden, daß man nehmlich von einer jeden Zahl bis neun Einheiten zurück zu zählen wisse. Kan man dieses, so ist es leicht den Unterscheid einer Zahl, die nicht größer ist als 9, von einer jeden andern Zahl zu finden. Wil ich wissen wie viel 5 läßt wenn ich es von 12 abziehe, so zehle ich von 12 fünf Einheiten zurück. Es bleiben sieben, und dieses ist der gesuchte Unterschied.

S. 56. Bey Zahlen welche aus Einheiten von verschiedener Ordnung zusammen gesetzt sind, verfähret man nach folgender Anweisung. Nachdem man die zwei bekannte Zahlen, wie bey der Addition, unter einander geschrieben, so ziehet man nach und nach die Ziffer der kleinsten Zahl von den Ziffern der größern, welche mit jenen einerley Einheiten bedeuten, ab, und bemerket den Ueberschuß der letz-

I.
Wegschneit.

tern über die erstern, gerade unter denselben, wobey man einen Strich, wie bey der Addition, zur bequemen Absonderung der bekannten Zahlen von der gesuchten machet.

§. 57. Es ist oft nicht viel daran gelegen, wo man anfanget, wenn nemlich die kleinere der bekannten Zahlen aus lauter solchen Ziffern bestehet, welche weniger oder doch nicht mehr bedeuten, als die Ziffer der größern Zahl, deren Einheiten mit den Einheiten der erstern von einerley Ordnung sind, als in nachfolgenden Exempeln:

$$\begin{array}{r} 87325 \\ 13023 \\ \hline 74302 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 742,18 \\ 31,04 \\ \hline 711,14 \end{array}$$

da man leicht einsiehet, daß einerley heraus kommen müsse, man mag vorne oder hinten, oder irgendwo in der mitte anfangen.

§. 58. Wenn es sich aber füget, daß ein oder andere Ziffer der Kleinern Zahl mehr Einheiten in sich hält als diejenige Ziffer der größern Zahl, welche Einheiten von eben der Ordnung bedeutet, und also gerade über oder unter derselben stehet, so könnte aus dieser Art abzuziehen Verwirrung entstehen, und man thut also am besten, man fängt die Subtraction allzeit von den Ziffern zur rechten Hand an, deren Einheiten die allerkleinsten sind.

§. 59. Denn in diesem Fall, da nemlich eine Ziffer der Kleinern Zahl mehr Einheiten enthält, als die Ziffer der größern, welche jener vergestalt zusaget, muß man erstlich von der nächsten Ziffer zur linken Hand in der größern Zahl eine Einheit wegnehmen, oder, wie man es gemeiniglich nennet, borgen, welche zu der besagten Ziffer, welche zu klein war, hinzu gesetzt, dieselbe um 10 vermehren wird, und so dann die Subtraction verrichten, wie in den beygefügten Exempeln,

$$\begin{array}{r} 95326 \\ 17408 \\ \hline 77918 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 573,48 \\ 94,25 \\ \hline 479,23 \end{array}$$

da die untern Zahlen die Kleinern sind.

§. 60. In dem ersten dieser Exempel läßt sich 8 von 6 nicht abziehen. Ich nehme derowegen von der, der 6 zunächst stehenden Ziffer, eines, und bringe diese 1 in den Ort der 6, welche daselbst 10 ist, und mit der 6 die Zahl 16 ausmachet. Nun nehme ich 8 von 16 hinweg,

so bleiben 8, welche ich unter dem Strich, und unter der Ziffer 8 be- L
merke. Allein die nächst an der 6 stehende Ziffer 2, von welcher ein ~~Weschnitt~~
bereits abgezogen oder geborget worden, gilt nunmehr eins weniger
als vorher, und demnach nur eins, welches, damit man es nicht ver-
gesse, ihr ein (.) beigesetzt worden ist, dessen man sich in allen der-
gleichen Fällen zu bedienen pfleget. Wenn man demnach in der
Subtraction fortfahren wil, so hat man nunmehr zu sagen, 0 von 1
läßt 1, und diese 1 an gehörigen Ort, unter die 0 oder 1 zu setzen. Die
nächste 4 kan man von der 3, welche über ihr steht, und eben die
Einheiten enthält, nicht abziehen, und muß demnach von der 5 eine
Einheit hierüber bringen, welche mit der 3 zusammen 13 Einheiten von
der Ordnung, als in der 3, oder ihr zusagenden 4, gezehlet werden,
geben. Nun läßt 4 von 13 abgezogen 9 übrig, welche an gehörigen
Ort bemerkt wird. Die in der untern Zahl nächst folgende 7 kan
von der obersten 4 wieder nicht abgezogen werden, und man muß wie-
der von der in der obern Zahl folgenden 9 eine Einheit zu diesen her-
über bringen, mit welcher diese 4 die Zahl 14 ausmacht. Nun läßt 7
von 14 abgezogen, anders 7 übrig, und die folgende 1 von 8 genom-
men läßt auch 7.

§. 61. Es ist bey der Rechnung des zweyten Exempels nichts
weiter zu beobachten, ob zwar in demselben zehentheilige Brüche ent-
halten sind. Eine Ueberrechnung desselben wird alles klar machen.
Die Einheiten der Ziffer, welche übrig bleiben, sind allzeit einerley mit
den Einheiten derjenigen Ziffer, deren Unterschied man gesucht. Die
letzte 5 der untern Zahl läßt von der letzten 8, der obern abgezogen 3.
Diese 3 bedeutet 3 Einheiten der zweyten niedrigern Ordnung, weil 5
und 8 dergleichen Einheiten bedeuten, und so ist es mit den übrigen
allen. Demnach kommt die Ziffer in dem gefundenen Unterschied,
welche die Zahl der einfachen Einheiten anzeigt, gerade unter der
Ziffer, welche in den vorgegebenen Zahlen einzelne Einheiten bedeu-
ten, zu stehen, und demnach muß das Zeichen dieser Einheiten (.)
auch gerade unter das Zeichen der einfachen Einheiten in den gegeben-
nen Zahlen, gesetzt werden.

§. 62. Und nach eben den Regeln werden auch nachstehende
Exempel gerechnet :

I.	53,073	9,003	0,5734
Abchnitt.	8,32	5,8	0,25748
	<u>44,752</u>	<u>3,203</u>	<u>0,31592</u>
	3000	8,03	7,...
	<u>573</u>	<u>2,574</u>	<u>0,354</u>
	2427	5,456	6,646

Bei welchen keine Schwierigkeit seyn kan, wenn man nur nicht vergessen, was oben I, 40 gesagt worden ist, daß nemlich denen zehentheiligen Brüchen von hinten zu zur rechten so viele 000 beigesetzt werden können, als man ihnen zusetzen will, ohne ihre Bedeutung im geringsten zu verändern, und daß demnach wo eine Reihe Ziffer, von den zweyen, welche gegeben sind, keine Einheiten von dieser oder jener Ordnung hat, man an den Ort derselben Einheiten allzeit eine 0 setzen, oder doch sich vorstellen könne.

§. 63. Ferner aber ist zu beobachten, daß von der 0 man zwar eigentlich nichts borgen, und an den nächsten Ort zur rechten überbringen könne, weil nichts an derselben Stelle befindlich ist: daß aber von der vor der 0 oder den 000 zur rechten stehenden Ziffern in der größern Zahl, (es muß aber allzeit wenigstens 1 da stehen) erstlich eine Einheit in die Stelle der nächsten 0 könne übergebracht werden, welche daselbst 10 gilt, von welchen 10 wieder 1 in den nächsten Ort übergetragen, hier 9 läßt, und in dem Ort, in welchen es übergetragen worden, wieder 10 bedeutet, und so fort. Diesem zufolge kan man zum Exempel die Zahl 3000 durch das Uebertragen der Einheiten so zergliedern 2000 und 900 und 90 und 10, und 3000 kan nichts anders bedeuten, als die eben angezeigte Zergliederung.

§. 64. Wenn demnach von der Zahl 3000 eine andere 573 sol abgezogen werden, so wird man, nachdem dieselbe wie 3000 zusehen ist, mit Puncten bezeichnet worden, sagen müssen, 3 von 10, 7 von 9, 5 von 19, nichts von 2. Oder man wird die nicht punctirte 0 ein 10 müssen bedeuten lassen, eine punctirte 0 aber 9, und die punctirte Zahl wie allezeit, eines weniger als sie ohne Punct bedeutet hätte, sie mag stehen wie sie wil.

§. 65. Wil man sich nach diesem allen so gesagt worden nochmals kurz überzeugen, daß auf die gewiesene Art die Subtraction richtig

tig verrichtet, und der Ueberschuß der einer der gegebenen Zahlen über die andere genau gefunden werde, so hat man nur darauf Acht zu haben, daß in allen gegebenen Regeln die grössere Zahl in die Theile, aus welchen sie besteht, zu zertheilen gelehret worden, nemlich in ihre Einheiten von verschiedenen Ordnungen, und so ebenfalls die kleinere, und daß so dann befohlen worden, die Theile der Kleinern nach und nach von den Theilen der grössern abzutziehen, und den Ueberschuß eines jeden Theils der grössern Zahl über den Theil der Kleinern, welcher von jenem abgezogen worden, unter der Querlinie anzumerken. Es ist klar, daß wenn man dieses alles beobachtet, endlich nothwendig unter diese Linie der Ueberschuß aller Theile der grössern Zahl über alle Theile der Kleinern zu stehen kommen müsse. Der Ueberschuß aber der ganzen grössern Zahl über die ganze kleinere, ist dem Ueberschuß aller Theile der grössern Zahl über alle Theile der Kleinern gleich. Denn alle Theile sind auch hier das Ganze. Demnach wird durch die angegebene Rechnungs-Art der Ueberschuß der grössern zweier gegebenen Zahlen über die Kleinern allzeit richtig gefunden.

I.
Abschnitt.

Probe der Addition und Subtraction.

§. 66. Man sieht hieraus zugleich, daß wenn man sich versichern will, man habe in der Anwendung der gegebenen Regeln nicht gefehlet, wie dieses aus Mangel der Aufmerksamkeit leicht geschehen kan, man nur den gefundenen Ueberschuß zu der Kleinern der gegebenen Zahlen addiren dürfe. Ist richtig gerechnet und also der wahre Ueberschuß gefunden worden, so muß die Summe dieser Zahlen der grössern Zahl gleich seyn, nach dem ersten Begriff, welcher von dem Ueberschuß zu haben. I. 53 Man könnte eben diesem zufolge die Addition durch eine wiederholte Subtraction probiren. Denn wenn man von der Summe dreier Zahlen die erste abziehet, und von dem Ueberschuß wider die zweyte, so muß endlich die dritte Zahl bleiben. Und so ist es auch wenn mehr als drey Zahlen zusammen gesetzt worden. Es bleibt allzeit die letzte übrig, wenn man alle andere ausser der letzten nach und nach von der Summe wegnimt. Erfolget dieses nicht, so hat man sich gewiß in Anwendung der Regeln verstoßen. Allein diese wiederholte Subtraction ist schwerer als die Addition selbst, und man kan in dieser leichter als in jener fehlen. Da denn, wenn der letzte Ueberschuß nicht genau mit der letzten der zusammen addirten Zahlen überein komt, man nicht wissen kan, ob man in der Addition oder in der

wie-

I. **Abchnitt.** wiederholten Subtraction gefehlet. Man hat noch andere Arten der Proben von der Addition, welche aber alle diese Unbequemlichkeit haben, daß man sich bey denselben leichter verstoßen kan, als bey der Addition selbst, und es ist also am besten, daß man die Addition nicht anders probire, als indem man eine jede Säule Ziffer, welche man zusammen gerechnet, deren Einheiten nemlich von einerley Ordnung sind, zweymal addire, und man kan, um desto gewisser zu seyn, einmal von den obersten anfangen und zu denselben nach und nach die untern zehlen, das zweyte mal aber von den untern Ziffern aufwärts steigen. Kommt einerley Summe, so ist es nicht wahrscheinlich daß man gefehlet habe: sind aber die Summen verschieden, so ist ein Fehler da, welchen man durch die zum dritten mal wiederholte Addition zu verbessern trachten muß.

Die Anwendung der Addition und Subtraction.

§. 67. Von der Anwendung dieser beyden Arten der Rechnung ist nur noch etwas wenig zu gedenken. Es ist an sich klar, daß keine andere Zahlen können addiret, oder daß der Unterschied keiner andern Zahlen könne gefunden werden, als solcher, deren einzelne Einheiten von einerley Grösse sind. Niemand kan sagen wie viel zwey Pferde zu vier Thalern hinzu gesetzt ausmachen, oder wie viel übrig bleibt wenn man 3 Meilen von 7 Centnern abziehet. Die Sache ist bereits oben I, 1. berührt worden, da wir von den ersten Grund-Eigenschaften der Zahlen gehandelt haben.

§. 68. Zahlen also welche addiret werden sollen, oder deren eine von der andern weg zu nehmen ist, müssen einerley Einheiten haben. Aber in welchen Fällen sind sie zu addiren, und in welchen Fällen oder bey was vor Aufgaben ist die Kleinere von der größern abzuziehen? Dieses einzusehen hat in allen besondern Fällen keine Schwierigkeit. Es nunt jemand im Januario 38 Rthl. ein, und im Februario 41, im Merz aber 52, und es wird gefragt wie viel er in diesen 3 Monaten zusammen eingenommen habe? so ist klar, daß man die vorgegebene 3 Zahlen zusammen setzen müsse, um die ganze Einnahme der 3 Monaten zu bekommen, welche 131 Thlr. beträgt. Gesezt wieder, es hat jemand zu Anfang des Januarii 63 Rthlr. giebt aber diesen Monat durch aus 47, wie viel hat er nach Verfließung des Monats? Hier ist wieder klar, daß man die Kleinere Zahl von der größern abziehen müsse um

um die Zahl 16 zu finden, welche den Ueberschuß anzeigt. Wiederum L.
 gesetzt, es habe jemand zu Anfang des Februarii 16 Thlr. und verzehre Abschnitt.
 diesen Monat durch 27 Rthlr., so wird er zu Ende desselben 11 Thlr.
 schuldig seyn, welches ebenfalls durch die Subtraction gefunden wird.
 Alles dieses ist gar natürlich und ohne die geringste Schwierigkeit.

S. 69. Eben so ist es auch mit sehr vielen andern Dingen be-
 schaffen. Gesezt, es gehet jemand von dem Ort A aus nach B zu, und F. 7.
 kommt bis in C, kehret aber in C um, und gehet bis in D zurück, so
 mindert dieser Rückweg den Weg, welchen er vorher von A nach B
 zu gemacht hatte, um seine ganze Grösse, und die Entfernung von A
 nach B zu ist nunmehr nicht grösser als AD. Wäre aber jemand
 aus A auf der Linie A B gegangen, bis an C, und wäre an diesem
 Ort C umgekehret, und gerade zurück bis nach E gereiset, so wäre
 seine Entfernung von A nach der andern Seite AE. In beyden Fäl-
 len komt die Entfernung von dem Ort A, vorwärts oder rückwärts,
 wenn man die kleinere Entfernung von der grössern abziehet. Ist der
 Weg vorwärts AC grösser als der Weg rückwärts CD, so liegt die
 Entfernung AD vorwärts; ist aber der Weg vorwärts AC kleiner,
 als der Weg rückwärts CE, so ist die wirkliche Entfernung von dem
 Ort A rückwärts, AE.

S. 70. Wenn wir aber auf diese Dinge etwas Acht haben, so
 finden wir, daß die Grössen von einerley Art, und die Zahlen welche
 diese Grössen ausdrücken, dergestalt beschaffen seyn können, daß sie, wenn
 sie zusammen kommen, einander vermehren, daß sie aber auch einander
 dergestalt zuwider seyn können, daß so bald sie zusammen gebracht
 werden, und mit einander eine Grösse oder eine Zahl, welche diese
 Grösse ausdrückt, ausmachen, die kleinern die grössern dergestalt ver-
 mindere, daß dieser Abgang der kleinern Zahl oder Grösse genau gleich
 wird. Ein Thaler ist allezeit ein Thaler, ich mag ihn ausgeben oder
 einnehmen. Allein in Ansehung auf mein Vermögen ist es nicht ei-
 nerley, ob ich den Thaler einnehme oder ausgabe. Nehme ich ihn
 ein, so wird mein Vermögen, welches zum Exempel aus 13 Thlr. be-
 stehen mag, vermehret, und ich habe nunmehr deren 14, gebe ich ihn
 aber aus, so wird es vermindert, und ich habe nur noch 12 Thlr.
 und also vermehret alle Einnahme mein Vermögen, und verschiedene
 Einnahmen vermehren einander. Die Ausgabe vermindert das Ver-
 mögen, und verschiedene Ausgaben vermehren einander. Eben so
 vermehren auch die Schulden einander, vermindern aber das Vermö-
 gen,

I.
Abschnitt.

gen, und das Vermögen vermindert die Schulden, denn ich kan diese dadurch tilgen, so daß sie ganz und gar nicht mehr da sind. So vermehren alle die Wege, die ich vor mich nehme, ein ander, und die Wege die ich zurück nehme, vermehren einander wiederum, im Gegentheil vermindert der Weg, den ich vor mich genommen, den Rückweg, und der Rückweg den erstern, nachdem nemlich dieser oder jener kleiner ist, und so ist es in vielen andern dergleichen Fällen.

§. 71. In der Anwendung also, wenn man eine Zahl haben wil, welche aus verschiedenen andern erwächst, wird man allzeit diejenigen addiren müssen, welche Größen bedeuten, die einander vermehren. Im Gegentheil muß man die Subtraction gebrauchen, wenn man die Zahl haben wil, welche durch die Zusammensetzung zweyer solcher Zahlen wird, die da Größen bedeuten, deren eine die andere vermindert, und zwar muß man jederzeit die kleinere Zahl von der größern wegnehmen. Der Ueberrest ist so dann von der Beschaffenheit der größern.

Bezeichnung der Größen, die einander vermehren oder vermindern.

§. 72. Damit man sich aber hier desto weniger verwirre, und etwa aus Uebereilung diejenige Größen addire, welche einander vermindern, oder diejenige von einander subtrahire, welche einander vermehren, welches desto leichter geschehen kan, weil beyderley Größen von einerley Art sind, und einerley Einheiten haben, und die Schulden zum Exempel eben so wohl als baares Geld nach Thalern; der Rückweg eben so wohl als der Weg vorwärts nach Meilen, gerechnet werden: so hat man zwey Zeichen beliebt, welche den Zahlen, oder überhaupt den Zeichen, womit man etwa die Größen bezeichnen wil, vorgesetzt werden. Diese sind + und —, und werden nachfolgender massen gebraucht. Diejenige Zahlen vor welchen einerley Zeichen steht, es mag nun dieses + oder — seyn, vermehren einander, wenn sie zusammen kommen. Im Gegentheil aber, wenn vor einer Zahl oder andern Zeichen + steht, und vor einer andern —, so wird dadurch angezeigt, daß sie dergleichen Größen bedeuten, welche einander vermindern. Es ist sonst nichts bey der Sache zu merken. Sind verschiedene Zahlen da, deren einige einander vermehren, andere aber vermindern, so kan ich der ersten vorsehen was ich wil. Gemeiniglich schreibt man zu derselben +, oder läßt vielmehr dieselbe ohne einiges

Zei

Zeichen, indem man eine Zahl, vor welcher gar kein Zeichen steht, L. allzeit so ansiehet, als ob sie mit + bezeichnet wäre. Vor die übrigen Zahlen setzt man + wenn sie die erste, welcher eben dieses Zeichen vorgeschrieben ist, vermehren, und — wenn sie dieselbe vermindern.

§. 73. Ein Exempel kan die Sache in ihr völliges Licht setzen, welche an sich selbst klar genug wäre, wenn sie nicht zuweilen verdunkelt würde. Es wird angegeben, es nehme jemand von seinen Gütern des Jahrs 395, gebe aber dargegen aus vor Wohnung 57, vor seinen Tisch 175, ferner nehme er von einer Besoldung jährlich 342 und gebe vor Kleider aus 45. An Nebendingen habe er einzunehmen 97, und gebe dargegen noch aus 185, und man fragt, wie viel er übrig behalte, oder wie viel er mehr ausgabe als er einnimmt; denn eins oder das andere wird hier gefunden; so sehe ich, daß das gesuchte sey $395 - 57 - 175 + 342 - 45 + 97 - 185$. Die Zahlen nun vor welchen + steht, vermehren hier das Vermögen, die andern vermindern es. Die erstern zusammen geben + 834, die andern — 462, und dieses letztere von dem erstern abgezogen, läßt + 372, um welche Summe nach Ablauf des Jahrs das Vermögen vermehrt wird. Eben dieses wäre gefunden worden, wenn man gesetzt hätte — 395 — 57 — 175 + 342 + 97 + 185, da die Zahlen von der erstern Art, die das Vermögen vermehren, mit —, die andern aber, welche es vermindern, mit + bezeichnet sind.

§. 74. Man würde diese Zeichen nicht nöthig haben, wenn man die Einnahme auf eine Seite, und die Ausgabe auf die andere setzen,

	57
395	175
97	45
342	185
<hr/>	<hr/>
834	462

beides zusammen zählen, und hernach das Kleinere von dem größern abziehen wolte. Der Ueberschuß ist Gewinnst oder Verlust, nachdem nemlich die Einnahme oder die Ausgabe größer ist. Allein es ist nicht allezeit bequem, diese Weitläufigkeit zu machen. In diesem Fall unterscheiden die Zeichen + und — dergleichen Zahlen eben so wohl, als wenn man sie in zwey verschiedene Reihen gebracht hätte.

§. 75. Man hat sich mit Fleiß enthalten die Namen dieser Zei-

I. **Abchnitt.** chen +, — anzugeben. Sie können falsche Begriffe beybringen, wenn man auf ihre eigentliche Bedeutung Acht hat. Man nennet das erste *plus* und das andere *minus*. Diese Worte können so verstanden werden, als ob die Gröſſen, so mit dem ersten + bezeichnet sind, allezeit vermehren, und die andern mit — vermindern. Und doch vermindern die mit + gezeichnete eben so wohl als die, welche — vor sich haben, und verschiedene, die mit — bezeichnet sind, vermehren einander, wie auch alle diejenige thun, so + vor sich haben. Das Beste ist also, daß man diese Wörter als Thone annehme, die zu nichts, als bloß die Zeichen + — anzudeuten, bestimmt sind, ohne sich um ihre anderweltige Bedeutung im geringsten zu bekümmern.

Die Addition und Subtraction gewisser Brüche.

S. 76. Hat man verschiedene Brüche von einerley Benennung, die sich auf einerley Einheiten beziehen, zu einander zu addiren, oder den Kleinern von dem größern abzuziehen, so läßt man die Nenner stehen, und verrichtet die aufgegebene Rechnungsart bloß mit den Zählern. Denn die Nenner zeigen bloß an, was das vor Theile sind, welche die Zehler zehlen, als in den beyden Brüchen $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ die neunten Theile der Einheit: die Zehler bestimmen die eigene Zahl dieser Theile. I. 32. Die Gröſſe der Theile, welche gezehlet werden, ist in den gegebenen und ähnlichen Fällen einerley, denn man setzt bey den zwey Brüchen, einerley ganze Einheiten zum voraus, und die neunten Theile von einerley ganzen Dingen, und überhaupt die Theile welche kommen, indem einerley Ganzes zwey oder mehr mal in gleich viele gleiche Theile getheilet wird, können nicht verschieden seyn: Demnach zehlen die Zehler der Brüche einerley Theile, und wenn man also die Zahlen aller der Theile, die in beyden Brüchen vorkommen, und folgendes die beyden Brüche selbst, zusammen rechnen wil, so hat man nichts als die Zehler zusammen zu rechnen, und die Nenner zu lassen wie sie sind. Denn in der Summe kommen allezeit solche Einheiten heraus, als in den Zahlen angedeutet worden, welche zusammen gesetzt werden, und folgendes in unserm Exempel Neuntheil. Und demnach ist $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ so viel als $\frac{3}{3}$. Und auf eben die Art erhellet, daß $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ nichts anders als $-\frac{1}{3}$ seyn könne. Man kan nach dieser Anweisung so viel Brüche von einerley Benennung mit einander vereinigen als man wil: $\frac{1}{17} - \frac{1}{17} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} + \frac{1}{17}$, ist so viel $\frac{1}{17} - \frac{1}{17}$ das ist $\frac{1}{17}$, und $\frac{1}{17} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17}$ ist so viel als $-\frac{1}{17}$.

S. 77. Da

§. 77. Damit wir inskünftige dergleichen Sätze bequemer ausdrücken können, als in dem nächsten Absatze vorkommen, werden wir uns des gewöhnlichen Zeichens = bedienen, welches bedeutet, daß die Zahlen oder andere beliebige Zeichen der Grössen, welche vor diesen Zeichen stehen, denjenigen gleich sind, welche nach denselben gesetzt sind, oder daß die erstern so viel ausmachen, als die letztern: welchem zufolge die eben erwähnte Sätze dergestalt auszudrücken sind, $\frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} - \frac{1}{7} = \frac{1}{7}$, und $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}$.

§. 78. Man siehet übrigens, daß wenn verschiedene Zahlen zu vereinigen sind, als die eben bemerkte Brüche, und wenn eine einzige Zahl zu finden ist, welche so viel beträgt als sie alle, es gar nicht darauf ankomme, in was Ordnung man sie vereinige. In dem Exempel, dessen oben erwähnt worden, giebt der erste Bruch $\frac{1}{7}$ mit dem andern $-\frac{1}{7}$ den Bruch $\frac{1}{7}$, dieser mit dem dritten $-\frac{1}{7}$ giebt $-\frac{1}{7}$, wenn man zu diesem den vierten $\frac{1}{7}$ setzt, hat man $\frac{1}{7}$, und noch der fünfte $\frac{1}{7}$ dazu, bringt $\frac{1}{7}$, eben wie vorher. Und eben dieses kommt, wenn man die Brüche in einer andern Ordnung setzt, und so dann vereinigt. Denn man setzt doch allemal die mit + bezeichnete alle zusammen, und zieht von denselben alle die ab, die das andere Zeichen — haben.

Begriffe von der Multiplication.

§. 79. Multipliciren, eine neue Rechnungsart, heisset eine Zahl aus einer bekannten dergestalt machen, wie eine andere ebenfalls bekannte Zahl aus der Einheit entsteht. Sol ich 7 durch 3 multipliciren; so habe ich mir vor allen Dingen die Art und Weise vorzustellen, wie die letztere dieser Zahlen 3, durch welche ich die erstere 7 multipliciren sol, aus der Einheit entsteht. Dieses einzusehen ist etwas leichtes. Die Zahl 3 wird aus der Einheit, wenn man die Einheit dreyimal nimmet, oder wenn man dieselbe dreyimal setzt, und diese Einheiten addiret: Eben so sol ich nun auch aus der Zahl 7 eine neue Zahl machen. Ich sol diese Zahl 7 dreymal setzen, und so dann addiren, die Summe, die dergestalt gefunden wird 21, ist diejenige Zahl, welche durch die Multiplication sollte gefunden werden.

§. 80. Es kommen demnach bey der Multiplication drey Zahlen vor, deren zwei bekannt oder gegeben sind, und die dritte aus den zwei ersten durch die Multiplication gefunden wird. Die erste ist diejenige, welche zu multipliciren ist; das ist, aus welcher eine neue

I. **Beispiel.** Zahl soll gemacht werden, dergleichen in unserm Exempel die Zahl 7 war. Die zweyte diejenige, nach deren Vorschrift aus jener eine neue Zahl zu machen ist, indem man nemlich darauf siehet, wie dieselbe aus ihrer Einheit entstehet. Diese heisset die multiplicirende Zahl, und war in dem vorstehenden Exempel 3, und endlich wird die dritte Zahl, welche durch die Multiplication sollte gefunden werden, als hier 21, das Product genennet.

§. 81. Dieser allgemeine Begriff der Multiplication begreift zwey Fälle in sich, welche insonderheit wohl von einander zu unterscheiden sind. Die multiplicirende Zahl ist nemlich entweder eine ganze Zahl, oder ein Bruch. Es kan zwar auch die Zahl, welche durch jene zu multipliciren ist, entweder eine ganze Zahl oder ein Bruch seyn, allein man hat nicht nöthig darauf zu sehen, weil die Multiplication fast nach eben den Regeln, wenigstens nach eben den Grundsätzen verrichtet wird, es mag diese Zahl ganz oder gebrochen seyn.

§. 82. Daß aber eine Multiplication durch eine ganze Zahl ganz was anders sey, als eine Multiplication durch einen Bruch, siehet man daraus, weil eine ganze Zahl ganz anders aus der Einheit entstehet als ein Bruch. Eine ganze Zahl zu erhalten, wird die Einheit vervielfältiget, und die Zahl wird dadurch grösser als die Einheit. Ein Bruch aber entstehet, indem man ein oder etliche dergleichen Theile, in welche man die Einheit zerfällt hat, annimt, und der Bruch ist kleiner als die Einheit, wenn er ein ächter Bruch ist. I. 10. Soll demnach aus einer Zahl eine andere eben so gemacht werden, wie ein Bruch aus einer Einheit wird, das ist, soll eine ganze Zahl durch einen Bruch multipliciret werden, so muß man die ganze Zahl in so viele gleiche Theile theilen, als viele der Theile sind, in welche man die Einheit getheilet hat, den Bruch herauszubringen, und dieser Theile muß man so viele annehmen, als viele Einheiten in dem Zehler des Bruchs enthalten sind. Dieses ist viel schwerer als das erste, und gründet sich auf dasselbe. Wir werden demnach uns vor allen Dingen die Multiplication durch ganze Zahlen bekannt machen müssen. Wozu doch auch die Multiplication durch gebentheilichte Brüche kan gebracht werden, weil diese aus eben den Grundsätzen hergeleitet werden kan, der wir uns bedienen werden, die Multiplication durch ganze Zahlen begreiflich zu machen.

Grundsätze zur Multiplication.

§. 83. Damit man sich aber diese Grundsätze recht deutlich vorstellen

stellen möge, so nehme man eine beliebige Zahl von Einheiten, von was Art sie auch seyn mögen, dergleichen in der Zahl zwischen AB durch die $**$ angedeutet werden, unter welchen man sich vorstellen kan was man will, auch so gar beliebige Theile der Einheiten, als siebentheil, zwölftel oder etwas dergleichen. Diese Zahl AB ist die, welche zu multipliciren ist. Die andere Zahl sey diejenige, welche zwischen CD steht, deren Einheiten durch $***$ ausgedrückt worden sind, um sie mit den vorigen nicht zu verwirren. Wir stellen uns vor, daß diese CD eine ganze Zahl sey, und es bedeuten demnach die $**$ ganze Einheiten und keine Theile derselben. Diese Zahl CD ist diejenige, durch welche die vorige AB multiplicirt werden soll. Man setze nunmehr vor eine jede Einheit, welche in der Zahl CD angetroffen wird, die Zahl AB ganz, und bringe auf diese Art die in Form eines Vierecks zwischen ABEF geschriebene Zahl heraus. Diese wird das Product seyn, und aus der Betrachtung dieser Zahl wird man verschiedene Eigenschaften der Producte einsehen können, welche auf eine andere Art etwas schwerer heraus zu bringen wären.

I.
Abschnitt.
Fig. 8.

S. 84. Daß die Zahl zwischen ABEF das würkliche Product sey, welches durch die Multiplication der Zahl AB durch die Zahl CD entstehet, ist klar genug. Denn man siehet vollkommen deutlich, daß diese Zahl ABEF aus der Zahl AB eben so entstehe, wie die CD aus der Einheit entstehet, weil man vor jede Einheit, welche in der CD anzutreffen war, die Zahl AB selbst in die Zahl ABEF gebracht hat. Man siehet aber auch, daß die Multiplication der Zahl AB durch die ganze Zahl CD, nichts anders als eine wiederholte Addition der zu multiplicirenden Zahl AB erfordere, und daß folglich die Einheiten des Products ABEF von den Einheiten der Zahl AB, welche zu multipliciren war, nicht verschieden seyn können. Denn die Einheiten der Summe sind von den Einheiten der Zahlen, welche man zusammen gesetzt hat, niemals verschieden.

S. 85. Die Einheiten der multiplicirenden Zahl CD aber haben in das Product ABEF ganz und gar keinen Einfluß. Es wird eben die Zahl ABEF heraus gebracht, was man sich auch vor Dinge unter den $***$ vorstellen mag. Es dienet die Zahl CD bloß dazu, daß sie anzeige, wie das Product ABEF aus der zu multiplicirenden Zahl AB zu machen ist, und dieses zeigt sie durch die Art und Weise an, wie CD selbst aus ihrer Einheit entstehet. Es entstehen aber vier Pferde aus einem Pferd nicht anders, als vier Thaler aus einem Tha-

I. *Abkürz.* **Thaler, oder vier Ellen aus einer Elle.** Deswegen hat man auf die Größe oder Art der Einheiten der multiplicirenden Zahl gar nicht zu sehen, und deswegen pflegt man auch nicht zu sagen, man soll zum Exempel 5 Ellen durch 3 Thaler multipliciren, ob zwar dieses eine gar richtige Bedeutung hätte und anzeigete, man soll aus 5 Ellen eine andere Zahl der Ellen eben so machen, wie man 3 Thaler durch die wiederholte Zusammensetzung eines einzelnen Thalers heraus bringen kan. Es kommt uns diese Redensart 5 Ellen durch 3 Thaler zu multipliciren, und andere dergleichen, wunderlich vor, und dieses aus keiner andern Ursache, als weil die Benennung der Einheiten in der multiplicirenden Zahl überflüssig ist, und man bloß hätte sagen sollen, man soll 5 Ellen durch die Zahl 3 multipliciren, oder dreyimal nehmen, ohne anzuzeigen, was in dieser Zahl drey vor Einheiten enthalten sind.

§. 86. Wenn demnach ein Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren ist, $\frac{1}{4}$ zum Exempel durch 4, so hat man bloß den Zehler des Bruchs durch die Zahl 4 zu multipliciren, durch welche der Bruch multipliciret werden soll, und das Product 20 an die Stelle des Zehlers in einen Bruch zu setzen, dessen Nenner der vorige 7 ist. Dieser Bruch $\frac{20}{7}$ ist das Product aus dem Bruch $\frac{1}{4}$ durch 4 multipliciret. Man siehet dieses aus der Figur ein, wenn man setzt, daß die Einheiten der Zahl AB siebentheil sind, und folgendes die Zahl AB $\frac{1}{4}$ betrage. In dem Product AB EF sind 20 Einheiten, von der Größe derjenigen, welche in AB enthalten sind, und folgendes ebenfalls siebentheil, und es ist demnach allerdings das Product $\frac{20}{7}$. Oder man stelle sich vor, daß wenn der Bruch $\frac{1}{4}$ durch 4 zu multipliciren ist, man denselben viermal setzen, und so dann addiren müsse. Es ist demnach das Product welches kommt $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Will man die Addition wirklich verrichten, so werden nur die Zehler addiret, der Nenner bleibt unverändert; L. 76. Es ist aber diese Addition der Zehler $5 + 5 + 5 + 5$ nichts anders, als eine Multiplication des Zehlers 5 durch die Zahl 4, durch welche der Bruch sollte multipliciret werden. Es ist nichts leichter als diese Betrachtungen auf alle ähnliche Fälle anzuwenden.

Fig. 8.
C 9.

§. 87. Multipliciret man die Zahl CD, welche vorher die multiplicirende Zahl war, durch AB, welche vorher multipliciret wurde, (wobey man sich aber vorstellen muß, daß AB aus ganzen Einheiten bestehe, um nicht außer die Gränzen unserer gegenwärtigen Betrachtung

tung zu kommen,) so wird das Product dasjenige werden, welches sich in der 9ten Figur CDEF darstellt. Die Einheiten dieses Products können von den Einheiten des vorigen AB EF in der 8ten Figur verschieden seyn, denn sie sind von der Art der Einheiten in der Zahl CD, da die vorige von der Art der Einheiten in AB waren. Doch ist die Zahl der Einheiten in dem Product CDEF einerley mit der Zahl der Einheiten in dem Producte AB EF, wie man sehen kan, wenn man auf die Art, wie diese beyde Producte entstanden sind, etwas Acht haben will. Es können nemlich die Zahlen der Einheiten, dieser in Form der Vierecke geschriebenen Producte, deswegen unmdglich verschieden seyn, weil in beyden so wohl nach ihren Längen gleich viele Einheiten stehen, als auch nach ihren Breiten. Wenn man demnach bloß auf die Zahl siehet, und sich darum nicht bekümmert, von was Größe die Einheiten sind, welche gezelet werden, wie dieses bey den ganzen Zahlen gemeiniglich zu geschehen pfleget, so muß man überhaupt sagen, daß jede zwey ganze Zahlen, wenn man eine durch die andere multipliciret, einerley Product bringen, man mag die erste durch die andere, oder die andere durch die erste multipliciren. Also ist 2 mal 3 so viel als 3 mal 2, nemlich 6, und so in allen übrigen Fällen.

Bey der Multiplication gebräuchliche Zeichen und Wörter.

§. 88. Derowegen unterscheidet man auch die zwey gegebene Zahlen, deren eine durch die andere zu multipliciren ist, in den meisten Fällen nicht einmal durch die Benennung, und giebt der einen so wohl als der andern den Namen eines Factors des herauszubringenden Products, welches man auch ein Factum nennet. Man pflegt wohl zuweilen die eine den ersten, und die andere den zweyten Factor zu nennen; allein es ist willkührlich, welche man zum ersten und welche man zum zweyten nehmen will, und werden sie also auch durch diese Benennung nicht von einander unterschieden. So sind 2 und 3 die zwey Factoren des Products 6, und zwar 2 der erste, 3 der zweyte, oder 3 der erste und 2 der zweyte, nachdem man sie nemlich in dieser oder jener Ordnung geschrieben. Wir werden hernach sehen, daß dieser Satz auch von den Brüchen richtig ist, und man kan also diese Benennung auch bey dieser Art Zahlen gebrauchen. Doch bis dieses wird können erwiesen werden, wollen wir, was hier gesagt worden, bloß von ganzen Zahlen verstanden haben.

I. S. 89. Aus dieser Ursache pflegt man ein Factum dessen zwey Abschnitt. Factore die Zahlen 3 und 4 sind, ohne Unterschied dergestalt zu bezeichnen 3×4 oder 4×3 , und das geschriebene Kreuz ist allezeit ein Zeichen der Multiplication; und des dadurch entstehenden Products. Man bedienet sich auch zuweilen eines blossen Puncts, und bezeichnet das Product der Factore 4 und 3 dergestalt $4 \cdot 3$ oder $3 \cdot 4$. Sind verschiedene Zahlen in einander zu multipliciren 3, 4, 5, 6, zum Exempel, dergestalt, daß man die erste derselben 3 durch die zweyte 4, und das hieraus entstehende Product 12 durch die dritte Zahl 5 multipliciren, und endlich das Product 60 welches nunmehr erhalten worden durch die vierte Zahl 6, wodurch 360 kommt; so zeichnet man dieses Product dergestalt: $3 \times 4 \times 5 \times 6$, und so in allen übrigen Fällen, es mögen so viele Factore seyn als man sich nur vorstellen will.

S. 90. Wir werden zuweilen die Producte aus verschiedenen Zahlen auch dergestalt schreiben $5 \times 3 \times 2 \times 4$, in welchem Fall allezeit die zwey Ziffern, über welche der Strich gezogen worden, eine einzige Zahl, nemlich das Product, so aus denselben entsteht, hier 6, bedeuten sollen, und also obiges so viel seyn wird, als wenn wir geschrieben hätten $5 \times 6 \times 4$. Nemlich da $5 \times 3 \times 2 \times 4$ andeutet, man müsse 5 durch 3, was heraus kommt durch 2, und das Product so hieraus entsteht durch 4 multipliciren, und auf die Art ein Product aus allen Factoren 5, 3, 2, 4 schaffen, so bedeutet $5 \times 3 \times 2 \times 4$, man soll ein Product aus den dreyen Factoren 5, 3×2 oder 6, und 4 machen, deren mittlerer 6 wieder ein Product aus den zwey Zahlen 3 und 2 ist.

Verfolg der Gründe der Multiplication.

Fig. 10. S. 91. Wenn man den Factor AB, welchen wir als die zu multiplicirende Zahl ansehen, theilet wie man will in C und D, und multipliciret denselben so dann nach der jetzt beschriebenen Art, so bekommt das Product AE eben so viele Theile AF, CG, DE, als man der zu multiplicirenden Zahl AB gegeben, und diese Theile des Products sind Producte, welche aus den Theilen der Zahl AB entstanden sind, indem diese Theile durch eben die Zahl multipliciret worden, durch welche man die ganze AB multipliciret hat. AF nemlich ist das Product aus AC dem ersten Theil des Factors AB, und aus der multiplicirenden Zahl; CG ist das Product aus CD, dem zweyten Theil des Factors AB und der multiplicirenden Zahl, und DE das Product aus dem dritten Theil eben dieses Factors DB, und der mul-

multiplizirenden Zahl, und die Summe dieser drei kleineren Producte $AF + CG + DE$ ist dem ganzen Producte AE gleich: In der *Fig. II.* Figur deren wir uns hier bedienen, ist $AB = 10$, getheilet in die Theile 3, 5, 2, und es besteht das Product aus 10 und der multiplizirenden Zahl 4, welches 40 ist, aus den Producten 4 mal 3 oder 12, 4 mal 5 oder 20, 4 mal 2 oder 8, und 40 ist der Summe dieser Zahlen $12 + 20 + 8$ gleich.

S. 92. Man kan demnach ein jedes Product einer jeden Zahl, so durch eine andere Zahl multipliciret werden soll bekommen, wenn man jene in Theile zerfället, durch deren Addition sie heraus kommt, hernach jedes dieser Theile durch die multiplizirende Zahl wirklich multipliciret, und die also heraus gebrachten Producte zusammen setzt, oder addiret. Zum Exempel, ich soll sagen, wie viel kommt, wenn man 598 durch 7 multipliciret, so zerfalle ich die erste Zahl 598 in Theile wie ich will, am bequemsten in diese 500, 90, 8. Nun ist $7 \text{ mal } 500 = 3500$, $7 \text{ mal } 90 = 630$, und $7 \text{ mal } 8 = 56$, und demnach ist $7 \text{ mal } 598 = 3500 + 630 + 56$ oder 4186.

S. 93. Wenn man die Theile der zu multiplizirenden Zahl AB gleich annimt, wie in der 1ten Figur geschehen ist, da die Theile der zu multiplizirenden Zahl AB sind AC , CD , DB , so werden auch die kleinern Producte AF , CG , DE , aus welchen das grössere AE besteht, alle gleich, und dieses AE kommt demnach, wenn man eins der kleinern Producte AF so oft nimt, als viele der Theile des getheilten Factors AB sind. Es ist nemlich AB in dieser Figur $= 6$, und diese Zahl ist in 3 gleiche Theile getheilet, deren jedes 2 Einheiten hat. Es kommt das Product aus 6 und 4, das ist 24, wenn man 2 durch 4, und das Product dieser Zahlen durch 3 multipliciret.

S. 94. Wenn man also die Helfte einer Zahl, was sie vor eine seyn mag, durch eine andere Zahl multipliciret, kommt halb so viel heraus, als wenn man jene Zahl ganz genommen durch diese multipliciret hätte; multipliciret man den dritten Theil einer Zahl durch eine andere, so kommt der dritte Theil desjenigen, so durch die Multiplication der ganzen Zahl entstanden wäre, und so immer fort. Im Gegentheil wenn man eine Zahl verdoppelt oder zweymal nimt, und multipliciret so dann die also verdoppelte Zahl durch eine andere, so kommt zweymal so viel, als wenn man nur die einfache Zahl multipliciret hätte, nimt man sie dreyfach, so kommt auch dreymal so viel

I. und so ferner. Zum Exempel, die Helfte von 8 ist 4, 8 mit 5 multipliciret bringt 40, und 4 mit 5 multipliciret giebt 20, welches die Helfte ist von 40. Der dritte Theil von 12 ist wieder 4, 12 aber mit 10 multipliciret giebt 120, und 4 auch mit 10 multipliciret, giebt nur 40, welches ebenfalls der dritte Theil von 120 ist.

S. 95. Ferner ist auch aus der Betrachtung eben der Figur klar, daß wenn man die Zahl AH durch eine andere AC multipliciret, und das dadurch entstehende Product wieder durch eine andere, als hier durch drey, eben die Zahl AE kommen müsse, welche gekommen wäre, wenn man die Zahl AH so gleich durch das Product aus AC und 3, das ist durch AB, multipliciret hätte. Oder deutlicher: wenn man eine Zahl durch eine andere, und das hieraus entstehende Product durch eine dritte multipliciret, so kommt eben das Product, welches man erhält, wenn man die erste Zahl durch das Product der zweyten und der dritten Zahl multipliciret. Die Zahl 2 durch 4 multipliciret giebt 8, und dieses Product durch 3, bringt 24, aber eben die 24 entstehen, wenn man 2 durch 3 mal 4, das ist durch 12 multipliciret; das ist, es ist nach den I, 89. erklärten Zeichen allezeit

$$2 \times 4 \times 3 = 2 \times 4 \times 3$$

Die Ordnung der Factoren läßt sich verändern.

S. 96. Und hieraus ist weiter zu schliessen, daß wenn man verschiedene Zahlen 2, 3, 4, 5 in einander zu multipliciren, und deren Product $2 \times 3 \times 4 \times 5$ machen soll, man sich an die Ordnung dieser Ziffer gar nicht zu kehren habe, und daß eben diese Ziffer in einer jeden andern Ordnung, als $5 \times 4 \times 3 \times 2$, oder $4 \times 2 \times 3 \times 5$ in einander multipliciret, einerley Product bringen müssen. Das Exempel zeigt die Richtigkeit des Satzes bey den vorliegenden Ziffern. Daß er aber seine allgemeine Richtigkeit habe, kan aus folgenden Betrachtungen erhellen.

S. 97. Wenn man die Zahlen $2 \times 3 \times 4 \times 5$, in der Ordnung, in welcher sie stehen, multipliciret, so fängt man an, die erste 2 durch die zweyte 3 zu multipliciren; Es ist aber I, 87. erwiesen, daß drey mal zwey so viel sey, als zwey mal drey, und man bringt also gleich Anfangs einerley Product heraus, wenn man die erste zwey Zahlen ersehet, und dieselbe in verkehrter Ordnung schreibt 3×2 . Es ist nemlich $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 3 \times 2 \times 4 \times 5 = 3 \times 2 \times 4 \times 5$, und bloß diese

Aus

Ausdrücke können, was wir sagen wollen, deutlich machen, wenn man auf dieselbe einige Aufmerksamkeit wenden will.

I.
Abschnitt.

§. 98. Wiederum und wenn man nachmals die Zahlen $2 \times 3 \times 4 \times 5$ in der Ordnung, in welcher sie stehen, multipliciren soll, so ist es einerley, ob man die erste Zahl 2 durch die zweyte 3, und was heraus kommt durch die dritte 4 multipliciret, oder ob man an statt dessen die erste Zahl 2 durch das Product der dritten und vierten multipliciren will. I, 95. Das ist, es ist $2 \times 3 \times 4 = 2 \times 3 \times 4 = 2 \times 4 \times 3$, weil nemlich auch hier die Producte 3×4 und 4×3 gleich sind. An die Stelle aber, daß man durch das letztere Product 4×3 multipliciret, kan man auch durch die Factoren 4, 3 einen nach dem andern multipliciren, I, 95. und es ist $2 \times 4 \times 3 = 2 \times 4 \times 3$, und demnach auch $2 \times 3 \times 4 = 2 \times 4 \times 3$. Führet man nachhero im Multipliciren fort, so wird $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 4 \times 3 \times 5$. Es kommen also auch einerley Producte aus den Zahlen 2, 3, 4, 5 wenn man die zweyte 3 mit der dritten 4 verwechselt, und hernach in dieser neuen Ordnung multipliciret.

§. 99. Eben so wird auch erwiesen, daß man die dritte Zahl mit der vierten verwechseln könne, ohne das Product zu ändern. Denn wenn man nach Anweisung der Ordnung $2 \times 3 \times 4 \times 5$ die erste Zahl 2 durch die zweyte 3 multipliciret hat, so ist es hernach einerley, ob man das Product 2×3 durch 4, und was hier kommt durch 5 multipliciret, oder ob man das erstere Product 2×3 durch das Product aus den beyden letztern Zahlen 4×5 , oder 5×4 multipliciret, und es ist demnach $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 4$. Nun kan man an statt desjenigen, so $2 \times 3 \times 5 \times 4$ ausdrucket, wieder das Product 2×3 durch 5, und das hieraus entstehende neue Product durch 4 multipliciren, und es ist demnach $2 \times 3 \times 5 \times 4 = 2 \times 3 \times 5 \times 4$, und also auch $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3 \times 5 \times 4$. Man siehet leicht, daß man in diesem Beweis fortfahren könne, wie viel auch der Zahlen seyn mögen, durch deren Multiplication ein Product heraus zu bringen ist, und daß man jederzeit jede zwey dieser Zahlen versehen, und nach dieser neuen Ordnung multipliciren könne, ohne in dem Product etwas zu ändern.

§. 100. Lassen sich aber jede zwey Zahlen verwechseln, ohne daß dadurch in dem Product etwas geändert werde, so kan man sie auch

I. alle versehen wie man will, und es kommt einerley heraus, in was
 Abschnit. Ordnung man die Zahlen, aus welchen ein gewisses Product hervor
 zu bringen ist, multiplicire. Denn durch die Versekung zweyer Zah-
 len, wenn man dieselbe wiederholt, kommt endlich jede Ordnung her-
 aus, welche man nur haben will. Es ist nemlich $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 2 \times 3$
 $\times 5 \times 4 = 2 \times 5 \times 3 \times 4 = 5 \times 2 \times 3 \times 4 = 5 \times 2 \times 4 \times 3 = 5 \times 4 \times 2 \times 3$
 $= 5 \times 4 \times 3 \times 2$, und man hat die letzte Ordnung der Factoren bloß
 dadurch heraus gebracht, daß man immer zwey Ziffern in derjenigen,
 welche unmittelbar vorher gegangen, verwechselt hat.

Fig. 12.. S. 101. Es ist noch eine einzige Betrachtung zu machen übrig,
 ehe wir zur würllichen Ausübung der Multiplication übergehen, welche
 diese ist. AB und CD sind zwey Zahlen, welche man nehmen kan wie
 man will, nur müssen ihre Einheiten von einerley Größe seyn. Man
 hat sie beyde durch einerley Zahl AE multiplicirt, und dadurch sind
 die in Form der Vierecke, zwischen ABFE und CDGH geschriebene
 Producte gekommen. Wenn man diese betrachtet, so findet man, daß
 das Product ABFE aus dem Product CDGH eben so entstehen
 könne, wie die Zahl AB aus der Zahl CD entsteht. Jedes dieser
 Producte ABFE, CDGH besteht aus verschiedenen Zahlen, deren
 Einheiten in Form der Säulen über einander stehen, dergleichen sind
 AE, BF, CH, DG. Diese Zahlen sind einander alle gleich. Und
 es sind derselben in dem Producte ABFE so viele als viele Einheiten
 in der multiplicirten Zahl AB sind, und in dem Product CDGH sind
 eben dieser Zahlen als CH, DG so viele, als viele Einheiten die Zahl
 CD enthält. Und hieraus ist was gesagt worden von den Zahlen,
 welche die Figur darstellt, gar leicht einzusehen. Denn gleichwie die
 Zahl AB aus der Zahl CD werden kan, wenn man diese CD in ihre
 zwey einzelne Einheiten theilet, und dieser Einheiten fünf annimt, eben
 so wird die Zahl ABFE aus der Zahl CDGH, wenn man diese letz-
 tern in zwey Theile von der Größe der multiplicirenden Zahl CH thei-
 let, und dieser Theile fünf zusammen sezet.

S. 102. Oder man stelle sich eine Säule als AE, CH als ei-
 ne Einheit vor, so siehet man, daß gleichwie AB aus fünf Einheiten
 besteht, deren zwey die Zahl CD ausmachen, eben so bestehe auch
 das Product ABFE aus fünf Einheiten von der Größe AE, deren
 zwey das Product CDGH ausmachen. Es zweifelt aber niemand,
 daß fünf Einheiten aus zwey Einheiten immer auf einerley Art entste-
 hen können, von was Größe auch diese Einheiten seyn mögen. Der
 Satz

Das ist allgemein, und auch in dem Fall richtig, wenn die *** in L. AB Theile der Einheiten sind, und folgender AB eine gebrochene Zahl ^{Abbruch} bedeutet.

Nähere Gründe zur Ausübung der Multiplication.

S. 103. Die Ausübung der Multiplication durch ganze Zahlen, erfordert zwar, dem zu Folge so wie L. 84. gesehen haben, nichts anders als eine wiederholte Addition. Man siehet aber auch leicht ein, daß diese viel zu weitläufig werden müßte, wenn die multiplicirende Zahl etwas groß ist, und man die Addition so schlechterdings, wie gewiesen worden, anwenden wolte. Doch kan man vermittelst eines leichten Vortheils diese Addition gar sehr in die Enge ziehen, welchen wir zuvörderst weisen wollen, weil er sehr geschickt ist, die Gründe der Ausübung dieser Rechnungsart, wie sie gemeiniglich bey etwas großen Zahlen verrichtet wird, recht deutlich zu zeigen.

S. 104. Es gründet sich diese Sache auf nachfolgenden. Eine Zahl wird zehn mal größer als sie war, oder sie wird durch Zehn multiplicirt, wenn man ihr am Ende ein 0 befüget. Denn dadurch werden aus den Einheiten Zehner, aus den Zehnern Hunderte, aus den Hunderten Tausende, und mit einem Wort alle Einheiten aller Ordnungen zehn mal größer als sie vorher waren: oder alle Theile der Zahl, (denn die Einheiten von verschiedenen Ordnungen sind ihre Theile) werden zehn mal größer, und also auch die ganze Zahl. Man siehet leicht, daß man aus eben dem Grunde sagen kan, eine Zahl werde hundert mal größer als sie war, wenn man ihr am Ende zwey 00 befüget, tausend mal, wenn man drey 000 ans Ende derselben setzet, und so fort. Also ist 2360 zehn mal so groß als 236, und 23600 ist hundert mal, 236000 aber tausend mal so viel als die Zahl 236.

S. 105. Man kan eben dieses auch anders ausdrücken. Wenn man eine Zahl nimt, in welcher der Ort der einzeln Einheiten, wie gewöhnlich, mit einem (,) bezeichnet ist, und welche hinter diesem Zeichen noch einige andere Ziffern, oder 00 hat, dergleichen die nachstehenden sind:

3573, 29514 ; 2753, 00000

und man setzet das (,) um eine Ziffer weiter nach der rechten zu, dergestalt,

35732, 9514 ; 27530, 0000

I. Abschnitt. so wird die Zahl zehn mal grösser, oder sie wird durch zehn multipliziert, I, 38: setzt man in eben der Zahl das Zeichen (,) noch um eine Ziffer weiter, und also um zwey Ziffern nach der rechten, so wird die Zahl hundert mal grösser und so fort, wie begeschriebene Zahlen weisen:

a	3573, 29514	;	2753, 00000
b	35732, 9514	;	27530, 0000
c	357329, 514	;	275300, 000
d	3573295, 14	;	2753000, 00
e	35732951, 4	;	27530000, 0

deren erstern bey a, man als einfach ansiehet, die zweyten bey b sind zehn mal, die dritten bey c hundert mal, die vierten bey d tausend mal, endlich die fünften bey e zehn tausend mal so groß als jene.

S. 106. Kehret man aber dieses um, so siehet man, daß eine Zahl zehn mal kleiner zu machen, man nichts nöthig habe, als das Zeichen der einzeln Einheiten um eine Stelle weiter nach der linken Hand zu rücken, und daß, wenn man eine hundert mal kleinere Zahl haben will, man dieses Zeichen noch um eine Stelle, und also in allen um zwö Stellen weiter nach der linken Hand rücken müsse, und so weiter. Die Zahlen welche eben hingesezt worden, zeigen dieses deutlich. Denn, ist eine jede derselben, zum Exempel, die bey d, welche unmittelbar unter der bey c steht zehn mal grösser als diese Zahl: so muß nothwendig die obere bey c in welcher das Zeichen der einzeln Einheiten (,) um eine Ziffer weiter nach der linken zu steht, zehn mal kleiner seyn, als die nachfolgende bey d.

S. 107. Ist nunmehr die Zahl, 2753, 00000, welche eigentlich keine Brüche bey sich hat, sondern eine ganze Zahl ist, durch diese ganze Zahl 4235 zu multipliciren, so setze man vor die 5 Einheiten, die in der multiplicirenden Zahl anzutreffen sind, die zu multiplicirende Zahl einfach fünf mal hin; vor die 3 Zehner, welche in der multiplicirenden Zahl enthalten, setze man die zu multiplicirende Zahl, nachdem man sie zehn mal grösser gemacht, drey mal; vor die zwey hunderte schreibe man sie hundert mal vergrößert, zwey mal, und vor die vier tausende der multiplicirenden Zahl setze man sie endlich tausend mal vergrößert, vier mal, und eben so verfähre man auch mit der Zahl 3573, 29514 welche durch eben die Zahl 4235 zu multipliciren

mit ganzen Zahlen und zehentheiligen Brüchen.

plirciren ist, und addire sodann die dergestalt untereinander geschriebene Zahlen, folgender gestalt :

I.
Abganz

F, 2753,	3573, 29514
2753, } A	3573, 29514 } A
2753, }	3573, 29514 }
2753, }	3573, 29514 }
2753, }	3573, 29514 }
27530, }	35732, 9514. }
27530, } B	35732, 9514. } B
27530, }	35732, 9514. }
275300, }	357329, 514. }
275300, } C	357329, 514. }
2753000, }	3573295, 14. }
2753000, } D	3573295, 14. }
2753000, }	3573295, 14. }
2753000, }	3573295, 14. }
<u>11658955</u>	<u>15132904, 91790</u>

Die Summen werden die Producte seyn, welche man suchte. Denn die Zahlen bey A sind die gegebene zu multiplicirende Zahlen F 5 mal. Alle Zahlen B enthalten eben die Zahlen F. zehen mal genommen, drey mal oder überhaupt dreyßig mal, 1, 95. und die Zahlen bey C enthalten eben diese Zahlen F hundert mal genommen, zwey mal, das ist zwey hundert mal, und endlich enthalten die Zahlen bey D eben diese Zahlen F tausend mal genommen, fünf mal, oder fünf tausend mal. Daß also, wenn man alle die Zahlen bey A, B, C, D zusammen sezet, man in der That in die Summe die zu multiplicirende Zahl F 5 mal und 30 mal und 200 mal, und noch 4000 mal bringet, so oft nemlich als in der Zahl 5 + 30 + 200 + 4000 oder 4235 die Einheit enthalten ist: und demnach wird nach der gegebenen Anweisung allerdings die vorliegende Zahl 2753, oder 3573, 29514 durch 4235 multipliciret.

§. 108. Eben diese Rechnungsart hat auch statt, wenn die multiplicirende Zahl zehentheilige Brüche bey sich hat, oder aus bloßen zehentheiligen Brüchen bestehet. Es seyen die Zahlen 2753 und 325, 94 zu multipliciren durch 43, 523, so seze ich vor die 3 welche in der multiplicirenden Zahl am Ende stehet und welche ein Tausendtheil bedeu-

L
Aufgabe

tet, die zu multiplicirende Zahlen; tausendmal verkleinert, 3 mal; vor die nächst daran stehende 2, setze ich die zu multiplicirende Zahl hundertmal verkleinert 2 mal; vor die darauf folgende 5 schreibe ich sie zehnmal verkleinert, 5 mal, und so fort nach Anweisung des vorigen, wie im nächst stehenden geschrieben:

Multiplicirende Zahl $43,523 = M$

zu multiplicirende Zahlen

$2753 = E$

$325,94 = F$

$5,753$		$0,32594$	
$2,753$	A	$0,32594$	A
$2,753$		$0,32594$	
$27,53$	B	$3,2594$	B
$27,53$		$3,2594$	
$275,3$	C	$32,594$	C
$275,3$		$32,594$	
$275,3$		$32,594$	
$275,3$		$32,594$	
2753	D	$325,94$	D
2753		$325,94$	
2753		$325,94$	
2753	E	$3259,4$	E
2753		$3259,4$	
2753		$3259,4$	
2753		$3259,4$	

119818,819

14185,88662

Und mache wieder die Summen dieser Zahlen, so sind diese Summen die gesuchten Producte, wie aus eben verglichen Betrachtungen erhellet, als diejenigen sind, deren wir uns eben bedienen.

§. 109. Nämlich, gleichwie die multiplicirende Zahl $43,523 = M$ aus der Einheit gemacht wird, wenn man erstlich die Einheit in tausend gleiche Theile theilet, oder tausend mal verkleinert, und solcher Theile 3 annimt, so dann die Einheit hundert mal verkleinert und 2 solcher Theile zu den vorigen setzet, ferner aber eben die Einheit zehnmal verkleinert, und 5 solcher Theile noch zu den vorigen füget, endlich noch 3 ganze Einheiten, und die Einheit zehn mal vergrößert, vier

Vier mal hinzu thut: eben so hat man die zu multiplicirende Zahlen F bey A tausend mal verkleinert 3 mal, und bey B hundert mal verkleinert 2 mal, und bey C zehen mal verkleinert 5 mal, und bey D die Zahlen F selbst 3 mal, und endlich eben die F, bey E zehen mal vergrößert, 4 mal gesetzt, 1,104; und indem diese Theile alle zusammen gesetzt worden sind, hat man die Summen heraus gebracht, welche demnach allerdings aus den Zahlen F eben so entstanden sind, wie die multiplicirende Zahl M aus der Einheit entstanden, und also die richtige Producte sind, welche man suchte. 1,80.

§. 110. Aus diesen erhellet nun, daß die Multiplication auf einer ley Art verrichtet werde, von was Ordnung auch die Einheiten seyn mögen, welche in den Zahlen vorkommen, die einander multipliciren. Man siehet leicht, daß das Zeichen der einzeln Einheiten in die Arbeit selbst nicht den geringsten Einfluß hat, man mag es zwischen diese oder jene Ziffer der einander multiplicirenden Zahlen setzen. Die Ziffern des Productes werden dadurch nicht geändert, nur komt dieses Zeichen in dem Product an andere und andere Stellen, nachdem es in den Zahlen, deren eine die andere multipliciret, da oder dort steht.

Die Ordnungen der Einheiten in dem Product zu bestimmen.

§. 111. Diesen Ort aber der einzeln Einheiten und ihres Zeichens in dem Product zu bestimmen, ist gar nicht schwerer, und man kan bloß aus dem letzten Exempel einsehen, wie mit der Sache zu verfahren sey. Die zu multiplicirende Zahl desselben war 32594, und diejenige durch welche sie solte multipliciret werden, 41523. Man mußte, die Multiplication gehörig zu verrichten, von der erstern, gleich anfangs den tausenden Theil schaffen; dieses geschah, indem man das Zeichen der einzeln Einheiten um drey Stellen weiter nach der linken zurük brachte, dergestalt 0,32594, wodurch nunmehr hinter das Zeichen der einzeln Einheiten so viele Ziffern mehr kommen, als vorher daselbst gestanden, als viele Ziffern in der multiplicirenden Zahl hinter der Stelle der einzeln Einheiten stehen. Nämlich in der zu multiplicirenden Zahl stunden vorher zwey Ziffern hinter dieser Stelle, und in der multiplicirenden Zahl waren ihrer drey daselbst anzutreffen. In der Zahl aber welche dergestalt heraus gebracht worden ist, sind fünf Ziffern hinter dem Ort der einzeln Einheiten befindlich. Man sieht nach einer kleinen Ueberlegung, daß es immer so gehen müsse, und daß allezeit, indem

1. — man anfängt, nach gegenwärtiger Anweisung zu multipliciren, in der ersten Ziffer hinter dem Ort der einzeln Einheiten so viele Ziffern zu stehen kommen werden, als in den beyden Factoren zusammen dergleichen Ziffer anzutreffen sind. So viele Ziffern aber in dieser ersten Zahl hinter dem Zeichen der einzeln Einheiten (,) stehen, so viele stehen auch in dem Product hinter diesen Zeichen, wie bloß aus Betrachtung des Exempels, und aus dem, so von der Addition L. 50. gesagt worden, zu ersehen ist. Und demnach stehen allezeit in dem Product so viele Ziffern hinter dem Ort der einzelnen Einheiten, als viele Ziffern in den beyden Factoren zusammen daselbst anzutreffen sind. Man kan also, so bald die Zahlen, deren eine die andere multipliciren sol, gegeben sind, wissen, wie viel Ziffern in dem Product hinter das (,) Zeichen der einzelnen Einheiten zu stehen kommen werden, oder, wie hoch oder niedrig die Ordnung der Einheiten seyn werde, die von der letzten Ziffer des Products bedeutet wird.

§. 112. Es ist nemlich die Zahl, welche diese Ordnung, angiebet, und anzeigt, ob sie die dritte, vierte, fünfte oder eine noch niedrigere Ordnung sey, die Summe der Zahlen, welche die Ordnungen der Einheiten anzeigen, welche von den letzten Ziffern der Factoren bedeutet werden. Nachstehende kleine Exempel können die Sache noch deutlicher machen, wenn man bey denselben etwas stille stehen und sie überdenken wil. Es sind in denselben die Zahlen 352; 35, 2; 3, 52; 0,352 erstlich durch 32, so dann durch 3, 2, und ferner durch 0,32 multiplicirt worden.

352	35, 2	3, 52	0,352
352	35, 2	3, 52	0,352
352	352	35, 2	3, 52
352	352	35, 2	3, 52
352	352	35, 2	3, 52
<u>352</u>	<u>352</u>	<u>35, 2</u>	<u>3, 52</u>
11264	1126, 4	112, 64	11, 264

35, 2	3, 52	0,352	0,0352
35, 2	3, 52	0,352	0,0352
352	35, 2	3, 52	0,352
352	35, 2	3, 52	0,352
352	35, 2	3, 52	0,352
<u>352</u>	<u>35, 2</u>	<u>3, 52</u>	<u>0,352</u>
1126, 4	112, 64	11, 264	1, 1264

3,52	0,352	0,0352	0,00352
3,52	0,352	0,0352	0,00352
35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
35,2	3,52	0,352	0,0352
112,64	11,264	1,1264	0,11264

L.
Abkürzung

§. 113. Dieses ist schon eine Erleichterung der Arbeit bey solchen Multiplicationen, bey welchen zehentheilige Brüche vorkommen. Es erspart uns das Nachdenken, wie das Zeichen der einzelnen Einheiten (,) zu setzen sey, und man kan, nachdem man dieses weiß, bey allen Multiplicationen, eben so wie bey der Multiplication ganzer Zahlen durch ganze Zahlen, verfahren, ohne sich ehe um den Ort dieses Zeichens zu bekümmern, als bis man das Product fertig hat, da es denn leicht gehörig zu setzen, und dadurch die Ordnung der Einheiten, welche von jeder Ziffer des Products bedeutet wird, zu bestimmen ist. Die übrige Erleichterung fließet aus nachfolgenden.

Die Multiplication am bequemsten zu verrichten.

§. 114. Wenn man eins von den vorigen Exempeln, oder auch das nachstehende vor sich leget, in welchem 357 2 multipliciret ist durch 432

$$\begin{array}{r}
 357 \ 2 \\
 357 \ 2 \\
 \hline
 3572 \ . \\
 3572 \ . \\
 3572 \ . \\
 \hline
 3572 \ . \\
 3572 \ . \\
 3572 \ . \\
 3572 \ . \\
 \hline
 1543 \ 104
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \} A = 7144 \\
 \\
 \} B = 10716 \\
 \\
 \} C = 14288 \\
 \\
 = 1543104
 \end{array}$$

so siehet man leicht, daß man die Addition, welche bey der gewöhnlichen Art zu multipliciren, erfordert wird, auch also verrichten kan, daß man erstlich die Zahlen bey A zusammen setz, hernach die bey B setzet die bey C, und nachdem man dergestalt die Summen A, B, C

L. Abschnitt: gefunden, dieselbe in eine einzige Summe zusammen ziehe, welche das gesuchte Product seyn wird. Diese Addition der Zahlen bey A, B und C ist leicht: denn die Ziffern, welche zusammen zu setzen sind, sind von einerley Grösse. Aber man kan sie noch nicht erleichtern, wenn man sich bekannt macht, was die einzeln Zahlen bla auf 9, wenn sie zwey, drey, vier bis neun mal zusammen gesetzt, oder welches auf eben das hinaus komt, wenn sie durch 2, 3, 4 bis 9 multiplicirt werden, vor Summen oder Producte geben. Denn man siehet, daß bey A hernus gebracht werde, wenn man die Zahlen, sieben mal nimmt, oder multiplicirenden Zahl multiplicirt. Eben so B, wenn man jede Ziffer der Zahlen, man sie durch die zweyte Ziffer der Zahl, multiplicirt: und jede an jede Ziffer der Zahlen bey eben lehes die dritte Ziffer von der letzten, es sind aber, wie vielleicht abet A, B, C allzeit einerley, und bloß von verschiedenen Ordnungen bestehend, welche die zu multiplicirende Zahl

§. 115. Demnach kan man nunmehr, ohne der Weitläufigkeit der Addition, mit der Multiplication folgender gestalt verfahren: Man schreibet die zu multiplicirende Zahl, und die multiplicirende dergestalt darunter, daß die letzten Ziffern derselben gerade untereinander stehen, ohne sich um die Ordnung der Einheiten, die in diesen Ziffern gezelet werden, zu bekümmern, ob sie, nemlich einerley oder verschieden sey; nachhero multipliciret man alle Ziffern der obern Zahl durch alle Ziffern der untern, und schreibet die Producte welche heraus gebracht werden dergestalt, daß man jedes Product unter derjenigen Ziffer der multiplicirenden Zahl zu schreiben anfängt, durch welche man die zu multiplicirende Zahl wirklich multiplicirt hat, um dieses Product heraus zu bringen. Hat man mit allen Ziffern der multiplicirenden Zahl dergestalt verfahren, so addire man alle diese Producte zusammen, die Summe ist das gesuchte Product. Man fängt auch hier von den Ziffern an, welche die kleinsten Einheiten bedeuten, und die Ursache davon ist theils bey der Addition gegeben, theils eine bloße Gewohnheit, welche eine Uebereinstimmung im Rechnen zur Grunde hat.

S. 116. Es sey zum Exempel, eben die Zahl 3572, welche wir letz-
tens durch 432 multiplicirtes haben, durch eben die Zahl nach diesem
kürzern Weg zu multipliciren, so sieht die Rechnung folgender gestalt:

$$\begin{array}{r} 3572 \\ 432 \end{array}$$

$$A. 7144$$

$$B. 10716$$

$$C. 14288$$

$$1343104$$

Man halte diese Rechnungsart mit der letzten zusammen, oder ver-
richte sie lieber selbst beyde zugleich mit einemley Exempel, so wird man
gar leicht einsehen, daß sie im Grund einerley sind, und man wird
also an der Richtigkeit desseligen, so wir eben gezeigten, nicht zweis-
eln können, nachdem man die Richtigkeit von jenem eingesehen. Man
wird aber auch finden, daß einerley Product heraus gebracht worden
wäre, wenn man mit der ersten Ziffer der multiplicirenden Zahl 4 den
Anfang gemacht, und also die Zahl bey C zuerst gesetzt hätte, so dann
aber zu der zweyten Ziffer 3 der multiplicirenden Zahl, und folgender
zur dritten 2 übergegangen wäre. B hätte in diesem Fall die zweyte, und
A die dritte Stelle unter den Zahlen welche zu addiren sind, bekom-
men, und das wäre die ganze Veränderung, welche, wie man leicht
sieht, in die Summe nicht den geringsten Einfluß haben kan. Daß
man diese Ordnung gemeinlich nicht beobachtet, ist dasjenige, so wir
der Gewohnheit zugeschrieben. Man kan demnach, so oft diese letztere
oder eine andere Ordnung im Multipliciren erwählen, als man Be-
quemlichkeit davon hat. Nur muß man sich in Acht nehmen, daß die
kleinern Producte, dergleichen die bey A, B und C sind, gehörig unter
einander geschrieben, und die Ordnungen der Einheiten nicht vermis-
set werden.

**Die Producte der Zahlen, welche nur mit einer Ziffer
geschrieben werden, zu finden.**

S. 117. Die Producte nun welche kommen, wenn eine jede der
Zahlen von 1 bis 9 durch eine andere Zahl, welche ebenfalls die 9 nicht
übersteiget, multiplicirt wird, und welche bey der Multiplication be-
rücksichtigt seyn müssen, wenn dieses nicht verrichtet worden ist, Es mag
findet man nachfolgendes massen. Man schreibe diese Zahlen vor sich,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

231

I. Will man wissen wie viel jede derselben zwey mal genommen ausmache, so addire man sie zu sich selbst, und mache auf die Art eine neue Reihe, welche diese Producte enthalten wird,

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Und da jede Ziffer in dieser Reihe diejenige, welche in der ersten Reihe gerade über derselben steht, zwey mal in sich hält, so folget, daß wenn man diese über einander stehende Ziffer dieser zwey Reihen wieder zusammen setzet, neun Zahlen kommen müssen, welche die erstern drey mal genommen enthalten. Diese sind,

3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27.

Wenn man zu diesen Zahlen wieder die Zahlen der ersten Reihe setzet, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, bekomt man die Producte derselben Zahlen durch viere, welche sind,

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36.

Und eben so machet man alle übrige Producte, welche man in eine Tafel verfaßten, und diese so lang vor sich legen kan, bis man sie in dem Gedächtniß eingepreget. Diese Tafel hat folgende Gestalt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

S. 118. Der Gebrauch dieser Tafel erhellet aus dem gesagten gar deutlich. Ich wil, zum Beispiel wissen wie viel 6 mal 7 beträgt. Weil in der sechsten Reihe von welcher die erste Zahl 6 ist, die Producte jeder Zahl der ersten Reihe durch 6 multipliciret, enthalten sind, so sehe ich, daß das gesuchte Product in dieser Reihe stehen müsse. Es ist aber auch gerade unter der 7 der obersten Reihe, denn man hat alle Producte dieser Ziffer 7 gerade unter dieselbe gesetzt. Und demnach kan das gesuchte Product nirgends anders als in der sechsten Reihe, gera-

Gerade unter der 7 stehen, und ist demnach 42. Man hätte auch 6 in der obersten Reihe annehmen, und gerade bis an die siebende Reihe herunter fahren können, um eben dieses Product 42 zu finden. Und so hat man überhaupt den einen Factor in der obersten Reihe anzunehmen, und von demselben so lang gerade unter sich zu gehen, bis man an diejenige Reihe der Zahlen kömmt, zu deren Anfang der andere Factor steht, so ist man an den gesuchten Product. Wie viel ist 8×6 ? Ich nehme 8 oben und gehe herunter bis an die sechste Reihe, deren erstes Ziffer 6 ist, so finde ich das gesuchte Product 48. Oder ich nehme 6 oben und gehe gerade herunter, bis an die Reihe, bey deren Anfang 8 steht, so finde ich eben das Product.

I.
Abschnitt.

Bestimmung der Ordnung der Einheiten des Products.

S. 119. Ob zwar diese Tafel dem Ansehen nach bloß auf die einfachen Einheiten gerichtet ist, so kan man doch aus derselben auch die Producte nehmen, welche heraus kommen, wenn man eine jede Zahl der Einheiten, von welcher der höhern Ordnungen sie auch seyn mögen, welche nicht über neune ist, durch eine andere dergleichen Zahlen einheiten von eben der oder einer jeden andern Ordnung, multipliciret. Die Sache ist leicht, und fließet aus dem vorhergehenden, 1, 104. doch kan es nicht schaden, wenn wir sie auch von einer andern Seite vorstellen. 2 mal 3 ist 6, und demnach ist 2 mal 30 nothwendig 60; denn der eine Factor ist zehn mal größer als vorher, und also auch das Product. Eben so gibt 2 mal 300 das Product 600, und $2 \times 3000 = 6000$. Setzt man die Factore 2 und 30 noch mal, von welchen das Product 60 war, und nimt denn an statt des ersten 20, so wird das Product 600, denn der eine Factor ist wieder zehn mal größer geworden, als er vorher war, und aus eben dem Grund ist klar, daß 200 durch 30 multipliciret 6000 geben müsse, und daß überhaupt vor eine jede 0 welche zu einer einzeln Ziffer des einen oder des andern Factors hinzugesetzt wird, in das Product ebenfalls eine 0 komme. Daß demnach die 00 in einem dergleichen Product an der Zahl so viele sind, als viele deren in beyden Factoren zusammen angetroffen werden, und man bey der Multiplication aller solcher Zahlen als 6000×300 nichts nöthig hat, als erstlich die Ziffern zu multipliciren $6 \times 3 = 18$ und diesem Product so dann so viele 000 zu setzen, als deren in beyden Factoren vorkommen: welchemnach das Product

I. **Bestimmt.** duct aus 6000×300 seyn wird 1800000 . Und also entsteht die Zahl, welche anzeigt, von welcher der höhern Ordnungen die Einheiten des Productes sind, jederzeit, indem man die Zahlen, welche die Ordnung der Einheiten derer Factoren anzeigen, zusammen addiret. Denn die Zahl, welche die Ordnung anzeigt, ist allezeit der Zahl der 00 gleich, welche hinten angehängt werden müssen, damit die vorstehende Ziffern Einheiten von dieser Ordnung ausdrücken I, 28. Die Zahl aber der 00 in dem Product ist wiederum so groß als die Zahl aller 00 in beyden Factoren. Als in unserm Exempel, da die Einheiten der 6 in der Zahl 6000 von der dritten Ordnung sind, und die Einheiten der 3 in 300 von der zweyten, so sind die Einheiten von 18 in dem Product 1800000 von der fünften höhern Ordnung.

§. 120. Wir haben oben I, 112. ausführlich gezeigt, daß eben dieses auch zutreffe, wenn in einer oder beyden der einander multiplicirenden Zahlen Einheiten von einer der niedrigeren Ordnungen gezelet werden, und ist also dasjenige, so von der Ordnung der Einheiten in den Producten gesagt worden ist, allgemein. Hieraus schließet man in der Anwendung leicht, von was Ordnung die Einheiten des Productes seyn werden, wenn in einem der Factoren dieselben von einer der höhern, in dem andern aber von einer der niedrigeren Ordnung sind. Denn gesetzt, es sey 3000 zu multipliciren durch 0, 2 so ist das Product, wie bereits gesehen $600, 0 = 600$, und wenn 3000 durch 0, 02 multipliciret wird, so ist das Product $60, 00 = 60$, und wenn man eben die 3000 durch 0, 002 multipliciret, so bekommt man $6, 000 = 6$. In diesen Fällen war die Ordnung der höhern Einheiten in dem Factor 3000, die dritte, und in dem andern Factor war die Ordnung der niedrigeren Einheiten, die erste in 0, 2, die zweyte in 0, 02, die dritte in 0, 002, und in den Producten kamen allezeit Einheiten von einer der höhern Ordnung, welche durch die Zahl angezeigt wird, die übrig bleibet, wenn man die Zahl, welche die Ordnung der niedrigeren Einheiten des einen Factors anzeigt, von der Zahl abziehet, durch welche die Ordnung der höhern Einheiten des andern Factors ausgedruckt wird. Und also bekommt man jederzeit die Ordnung der Einheiten des Productes, wenn die Zahl, welche die Einheiten der höhern Ordnung anzeigt, die in einem der Factoren vorkommen, größer oder doch nicht kleiner ist, als die Zahl, welche die niedrigeren Ordnung der Einheiten des andern Factors anzeigt.

S. 121. Behält man aber noch den Factor 3000 und fährt fort die Ordnung der Einheiten des andern Factors zu vermindern, und setzt erstlich, derselbe sey 0,0002, so wird das Product, wie bekannt ist $0,6000 = 0,6$, und wenn man ferner vor dem zweyten Factor 0,000002 annimmt, so wird das Product $0,06000 = 0,06$, und das Product welches entsteht, wenn der zweyte Factor 0,000002 ist, wird $0,006000 = 0,006$. Denn man muß wie L. III. gewiesen worden, jedes mal die Zahl 3000 durch 2 multipliciren, und von dem Product so viele Ziffern vermittelst des (.) Zeichens der einfachen Einheiten abschneiden, als viele deren in den beyden Factors zusammen hinter diesen Zeichen stehen. Hieraus aber folget diese Regel, daß wenn die Zahl, welche die Ordnung der niedrigen Einheiten des einen Factors anzeigt, größer ist, als die Zahl, welche die Ordnung der höhern Einheiten in dem andern Factor anzeigt, in dem Product Einheiten von derjenigen niedrigeren Ordnung kommen werden, welche durch die Zahl ausgedrückt wird, die übrig bleibt, wenn man die Zahl, welche die Ordnung der höhern Einheiten des einen Factors anzeigt, von der Zahl abziehet, welche die Ordnung der niedrigeren Einheiten in dem andern Factor anzeigt. Es ist gut wenn man diese Regeln weiß, doch ist es nicht schlechterdings nothwendig.

Fernere Erläuterung der Ausübung der Multiplication.

S. 122. Bey derjenigen Einsicht, welche wir bis anhero beyzubringen bemühet gewesen sind, kan nun wohl kein Exempel der Multiplication mit ganzen Zahlen oder zehentheiligen Brüchen vorkommen, welches man nicht mit gewissem Grund berechnen könnte. Es sey 4387 durch 6 zu multipliciren, so wird die Rechnung folgender gestalt zu verichten seyn:

$$\begin{array}{r} 4387 \\ 6 \overline{) } \\ 26322 \end{array}$$

Das Product ist 26322, und man kan dieses nicht allein einsehen, wenn man die Multiplication als eine wiederholte Addition der Zahl 4387 betrachtet, sondern auch wenn man erweget, daß man alle Theile der Zahl 4387 nemlich $4000 + 300 + 80 + 7$ durch 6 multipliciret, und auf diese Art das Product heraus gebracht habe, und sich erinnert, daß die Multiplication aller Theile einer Zahl; und die

I. Multiplication der ganzen Zahlen einerley. *ſep.* I, 91. Demnach wird
 Anmerkung. man auch dieſe Exempel ohne Schwierigkeit überſehen:

438700 6	438700 60	43,87 6	4387 0,6
2632200	26322000	263,22	2632,2
43,87 0,6	0,4387 0,6	438700 0,06	438700 0,006
26,322	0,26322	26322,00	2632,200

und ſich dadurch je mehr und mehr überzeugen, daß man überall erſtlich bloß die Zahlen zu multipliciren habe, welche durch die Ziffern ausgedrückt werden, die in den Factoren vorkommen, und ſo dann in dem Product die Ordnung der Einheiten, welche durch deſſen Ziffer bedeutet worden, nach den gegebenen Regeln leicht beſtimmen könne.

§. 123. Eben ſo iſt es auch, wenn die Zahl 48723 durch 647 multiplicirt werden ſoll. Die Rechnung ſtehet alſo:

	48723
	647
A	341061
B	194892
C	292338
E	31523781

Die Zahl bey A iſt das Product aus der zu multiplicirenden Zahl 48723, und der 7, oder es iſt $A = 48723 \times 7$. Die Zahl bey B, welche dergestalt geſchrieben iſt, daß ihre letzte Ziffer Zehne bedeutet, iſt das Product aus 48723 und 40, oder $B = 48723 \times 40$, und die bey C endlich, deren letzte Ziffer Hunderte bedeutet, iſt das Product aus 48723 durch 600, oder $C = 48723 \times 600$, welches alles man einſiehet, wenn man darauf Acht hat, wie dieſe Zahlen A, B, C heraus gebracht worden, I, 122. und demnach iſt die Summe aller dieſer Zahlen $A + B + C$, das iſt, die Zahl $E = 48723 \times 7 + 48723 \times 40 + 48723 \times 600$. Setzt man die Zahlen $7 + 40 + 600$ zuſammen, und multiplicirt die Summe deſſelben 647 durch die Zahl 48723 durch welche dieſe Zahlen einzeln multiplicirt worden ſind, ſo bekommt man eben das Product, I, 91; alſo iſt auch $E = 48723 \times 647$, welches eben das Product iſt, welches zu machen war.

§. 124.

S. 124. Und nunmehr wird man auch bey nachstehenden Exempeln keine Schwierigkeit finden:

$\begin{array}{r} 4872300 \\ 6470 \\ \hline 341061 \\ 194892 \\ 292338 \\ \hline 31523781000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 48,723 \\ 6,47 \\ \hline 341061 \\ 194892 \\ 292338 \\ \hline 315,23781 \end{array}$
---	--

$$\begin{array}{r} 48723000 \\ 6,47 \\ \hline 341061 \\ 194892 \\ 292338 \\ \hline 315237810,00 \end{array}$$

und leicht einsehen, daß alles vollkommen nach einerley Gesetze gemacht werde.

Begriffe zur Division.

S. 125. Die nächste Rechnungsart ist die Division, welche eine besondere Verwandtschaft mit der Multiplication hat, und ihre Grundsätze von jener borget. Denn gleichwie man bey der Multiplication das Product aus der zu multiplicirenden Zahl dergestalt machet, wie die multiplicirende Zahl aus der Einheit entsteht; also heißt dividiren im allgemeinen Verstand, aus einer vorgegebenen Zahl eine andere dergestalt machen, wie aus einer andern ebenfalls gegebenen Zahl die Einheit entsteht. Zum Exempel, aus der 3 wird die Einheit, wenn man sie in drey gleiche Theile theilet. Theile ich demnach auch 12 in drey gleiche Theile, deren eins 4 ist, so ist 4 aus den 12 eben so entstanden, als wie aus der 3 die Einheit werden kan, und demnach ist 12 durch 3 dividirt.

S. 126. Dieses ist eine wahrhafte und eigentliche Theilung: und eine dergleichen Theilung geschieht allezeit, wenn die Zahl, durch welche eine andere dividirt werden soll, als hier die 3, eine ganze Zahl ist. Aus einer ganzen Zahl kan die Einheit nicht anders werden, als indem man die Zahl theilet, weil jede ganze Zahl grösser ist

I. Abschnitt. als die Einheit. Wenn man demnach aus einer Zahl, was sie vor eine seyn mag, 12 oder $\frac{1}{2}$ eine neue eben so machen will, wie aus einer andern ganzen Zahl, als 3, die Einheit entsprünget, so muß man diese Zahl 12 oder $\frac{1}{2}$ nothwendig theilen.

§. 127. Setzet man aber, daß die Zahl 12 durch $\frac{1}{2}$ dividiret werden soll, so soll nach dem gegebenen Begriff aus der 12 eine neue Zahl eben so gemacht werden, wie aus $\frac{1}{2}$ die 1 wird. Nun ist 1 mehr als $\frac{1}{2}$, und die Einheit entsteht, indem man zwey Helften oder $\frac{1}{2}$ gedoppelt nimt, also wird auch die gesuchte Zahl gedoppelt so viel werden müssen, als 12 ist, und demnach heraus kommen, wenn man 12 durch 2 multipliciret, und 24 seyn. Also ist dasjenige, so eine Division genennet wird, eigentlich eine Vervielfältigung, wenn die Zahl, durch welche eine andere dividiret werden soll, ein ächter Bruch, und dessen Zehler 1 ist. Denn da ein dergleichen Bruch kleiner ist als die Einheit, und die Einheit aus demselben nicht anders entstehen kan, als indem man ihn etliche mal nimt, so wird auch die Zahl, welche man durch die Division suchet, aus der Zahl welche man dividiren soll, hier nicht anders werden können, als indem man jene etliche mal zu sich selbst setzet. Ist der Zehler eines ächten Bruchs, durch welchen man dividiren soll nicht 1, so wird zwar auch die Zahl, welche durch die Division heraus kommt, größer als diejenige, welche man dividiret hat: es ist aber die Division in diesem Fall keine eigentliche Vervielfältigung.

§. 128. Es ist also die Division etwas gat sehr verschiedenes, nachdem man entweder mit einer ganzen oder mit einer gebrochenen Zahl dividiret, eben wie die Multiplication durch eine ganze Zahl ganz was anders ist, als die Multiplication mit einem Bruch. I, 82. Doch wird überhaupt die Zahl, welche dividiret werden soll, die zu dividirende Zahl, diejenige durch welche man dividiren soll; der Theiler, und die Zahl, welche durch die Division kommt, der Quotiente genennet, ob sich zwar diese Wörter nicht allezeit so genau schicken.

§. 129. Wir haben wieder zuerst diejenige Division zu betrachten, bey welcher der Theiler eine ganze Zahl ist. Es mag nun die zu dividirende Zahl ganz oder gebrochen seyn, denn dieses macht in der Division keine hauptsächliche Verschiedenheit. Wir könnten, wie bereits erwehnet worden, die Gründe hievon aus demjenigen herleiten, so bey der Multiplication gesagt worden ist: Doch wollen wir größerer Deut-

Deutlichkeit halben von vorne anfangen, und uns des gesagten nicht weiter bedienen, als es unumgänglich nothwendig seyn wird.

I.
Methode

Gründe der Division.

§. 130. Es sey die Zahl AB durch den Theiler CD zu dividiren, die Einheiten der erstern dieser Zahlen können nach Belieben genommen werden, und sie können auch Theilchen einer ganzen Einheit seyn. Die Einheiten der Zahl CD aber stellen wir uns hier als ganze Einheiten vor. Man setze zwischen EF so viele Einheiten der Zahl AB, als viele Einheiten in CD enthalten sind, und wiederhole dieses so oft, bis die ganze Zahl AB in Form des Vierecks EFGH geschrieben worden, wenn anders dieses geschehen kan, wie es denn wirklich bey der angenommenen Zahl AB geschieht; so ist der Quotiente die Zahl der Reihen von der Grösse EF, welche in EFGH anzutreffen sind, oder die Zahl der Einheiten, welche die Saite EH ausmachen. Der Augenschein giebt es, daß aus der zu dividirenden Zahl AB, das ist aus der in Form eines Vierecks geschriebenen Zahl EFGH der angegebene Quotiente EH auf eben die Art entstehe, wie aus dem Theiler CD, welcher darüber steht, die Einheit entstehet. L. 125

P. 5.

§. 131. Es erhellet aber auch aus eben der Vorstellung, daß die Einheiten der zu dividirenden Zahl AB und des Quotienten EH von einerley Art seyn, die Einheiten aber des Theilers CD von jenen verschieden seyn mögen, wie sie wollen: daß einerley Quotiente durch die Division eben der Zahl heraus komme, man mag die Einheiten des Theilers verändern wie man will: und daß demnach gar nicht nöthig sey darauf Acht zu haben, aus was vor Einheiten der Theiler bestehe. Wie man denn auch nicht zu sagen pflegt, man soll 12 Pferde, zum Exempel, durch 4 Ellen dividiren; sondern nur angiebt 12 Pferde durch 4 zu dividiren, ob zwar der Begriff der Division es allerdings leidet, daß man sage, man dividire 12 Pferde durch 4 Ellen, oder etwas dergleichen. Denn dieses will nichts anders sagen, als man bringe aus 12 Pferden eine andere Zahl von Pferden auf eben die Art heraus, nach welcher aus 4 Ellen 1 Elle wird.

§. 132. Ist aber dem also, daß die Einheiten des Quotienten mit den Einheiten der zu dividirenden Zahl immer einerley seyn, und es sind die Einheiten der zu dividirenden Zahl gewisse Theile des Ganzen, so werden in dem Quotienten eben dergleichen Theile der ganzen Einheit gezehlet, und wenn demnach in dem gegebenen Exempel jedes (*)

ein

I. Abschnitt. ein dreßsigstes Theil des Ganzen, und folgendes die zu dividirende Zahl $\frac{12}{4}$ zu seyn gesetzt wird, so ist der Quotiente $\frac{3}{10}$, und wird gefunden, wenn man nur den Zehler des Bruchs durch den gegebenen Theiler 4 dividiret, den Nenner 30 aber stehen läßt.

F. 14.

S. 133. Sollte aber, indem man nach der angewiesenen Art dividiren will, die zu dividirende Zahl das Viereck, dergleichen EFGH in der 13 Figur ist, nicht vollmachen, wie zum öftern geschieht, so wird man folgendergestalt verfahren müssen. Es sey die Zahl AB $\neq 14$ durch CD $= 4$ zu dividiren, so setze man EFLK wieder wie vorher; weil aber auf die Art zwei Einheiten $\neq 4$ übrig bleiben, welche keine volle Reihe ausmachen können, so theile man eine jede dieser Einheiten in so viele gleiche Theile, als viele Einheiten in dem Theiler CD sind, und nehme folgendes hier $\frac{1}{2}$, welches wir in der Figur durch das Zeichen (.) andeuten, so wird man noch andere zwei Reihen aufsetzen können. Denn weil eine jede Einheit der zu dividirenden Zahl vier Viertheil giebt, so wird vor jede der übergebliebenen Einheiten eben eine ganze Reihe von Viertheilen kommen, und demnach ein Viereck EFGH wie vorhin können vollgemacht werden. Der Quotiente ist hier wieder eine Säule von über einander gesetzten Einheiten EK und Theilen derselben KH. Denn auch hier entsteht die ganze ins Viereck geschriebene Zahl EFGH, das ist, die zu dividirende Zahl AB, aus einer solchen Säule EH eben so, wie der darüber geschriebene Theiler CD aus seiner Einheit entsteht, 1, 125. und ist demnach der Quotiente in dem vorliegenden Exempel $3\frac{1}{2}$.

S. 134. Und hieraus erhellet, daß bey dergleichen Zahlen der Quotiente aus einer ganzen und aus einer gebrochenen Zahl bestehe; daß die ganze Zahl (3) diejenige sey, welche durch die Theiler (4) multipliciret ein Product 12 giebt, so unmittelbar kleiner ist als die Zahl, welche man dividiret hat, (14), oder, welches Product von der gedachten Zahl (14) abgezogen, einen Unterschied giebt, welcher kleiner ist als der Theiler; der Bruch aber formiret werde, wenn man den Theiler 4 zum Nenner setzt, und zum Zehler den Ueberschuß der Zahl, welche dividiret worden, 14 über das gedachte Factum 12, welcher Ueberschuß hier 2 ist. Und auch dieses ist richtig, man mag die Einheiten der zu dividirenden Zahl nehmen wie man will.

F. 15.

S. 135. Nach eben diesen Begriffen muß auch dividiret werden, wenn die zu dividirende Zahl kleiner ist, als der Theiler. Es sey AB $= 3$ zu dividiren durch den Theiler CD $= 5$, so theile man jede Ein-

Einheit der Zahl AB in 5 gleiche Theile, nemlich wieder in so viele, als viele Einheiten der Theiler CD enthält. Ein solcher Theil sey (,) I. Abschnitt.
 so dann setze man auch hier diese Theile wie oben in Form eines Vierecks EFGH. Alle 3 Einheiten der zu dividirenden Zahl enthalten derselben Theile zusammen 3 mal fünf, und demnach werden alle Reihen gewiß voll, wie in der Figur zwischen EFGH zu sehen ist. Demnach ist auch hier der Quotiente eine Säule der über einander gesetzten Theile, (,) als $EH = \frac{3}{5}$, das ist, der Quotiente ist ein Bruch, dessen Zehler ist die zu dividirende Zahl 3, und der Nenner, der Theiler 5. Denn so viele Einheiten in dem Zehler 3 sind, so viele sind der Reihen in EFGH, und so viele (,) stehen in einer Säule EH über einander.

§. 136. Man siehet leicht, daß was eben gesagt worden ist, nicht auf die Zahlen, welche kleiner sind als ihre Theiler, allein zu ziehen sey. Man kan diese Art der Division, wenn man will, auch mit Zahlen vornehmen, welche nach der erstern Art, I. 130. 133, können dividirt werden, und deren Quotienten entweder ganze oder doch zum Theil ganze Zahlen sind. Es sey $AB = 4$ durch $CD = 3$ zu dividiren. Man theile jede der Einheiten der Zahl AB in drey gleiche Theile, und mache also aus denselben Drittel, so kan man diese Zahl in Form eines Vierecks bringen EFGH, wie oben, und der Quotient ist hier $EH = \frac{4}{3}$, und entstehet also, indem man die zu dividirende Zahl 4 zum Zehler, und den Theiler 3 zum Nenner des Bruchs stellt. Es wird aber hier der Bruch unächst. F. 16.

§. 137. Man siehet aus diesen allen, was auch aus den gemeinsten Begriffen bekannt genug ist, daß eine vorgegebene Zahl durch Zwoy dividiren nichts anders heiße, als ihre Helfte machen, daß sie durch 3 dividiren so viel sey, als ihren dritten Theil darstellen, und so fern, und daß, wenn man den durch die Division heraus gebrachten Quotienten EH durch die Zahl CD multipliciret, durch welche man dividirt hatte, hinwiederum die Zahl EFGH oder AB kommen müsse, welche man dividirt hatte. Die Figuren zeigen dieses ohne vieles Nachsinnen, es ist aber auch vor sich klar, daß wenn man die Helfte eines Dinges gedoppelt, oder den dritten Theil desselben drey mal nimt, dieses Ding wieder heraus kommen müsse.

§. 138. Da nun also der Quotiente, wenn man ihn durch den Theiler multipliciret, die dividirte Zahl wieder heraus bringt, so kan man
 H man

I. Abschnitt. man die zu dividirende Zahl sich als ein Product vorstellen, welches durch die Multiplication des Quotienten durch den Theiler entstanden: und nach diesem Begriff ist die Division eine Rechnungsart, vermittelst welcher man aus einem Product, bey welchem der eine Factor gegeben ist, den andern Factor findet.

§. 139. Wenn man einerley Zahl durch einerley Theiler dividirt, so können die Quotienten nicht verschieden seyn, denn eine Zahl kan nicht verschiedene Helften, Drittel, Viertheil, und so weiter haben, deren eines nemlich grösser wäre als das andere. Und wenn man demnach eine Zahl 7 durch 3, nach den zwey verschiedenen Wegen I, 133. 135, dividirt, und dadurch die Quotienten $2\frac{1}{3}$, und $\frac{7}{3}$ heraus bringt, oder wenn man sich auch noch anderer, aus beyden vorigen zusammen gesetzter, Arten zu dividiren bedienet, so müssen diese und dergleichen Quotienten einerley bedeuten.

§. 140. Und hieraus folgt, daß man einen unächten Bruch $\frac{1}{2}$ entweder ganz oder zum Theil durch eine ganze Zahl ausdrücken könne, wenn man den Zehler durch den Nenner dividirt. Denn ein solcher Bruch kan als der Quotiente einer Division angesehen werden, in welcher der Zehler durch den Nenner dividirt worden ist. Findet man nun diesen Quotienten auch durch eine andere Division, welche ganze Zahlen bringt, so muß derselbe nothwendig mit dem gegebenen Bruch gleiches Werths seyn. Also ist $\frac{1}{2}$ so viel als 3, und aus eben dem Grund ist $\frac{1}{3}$ so viel als $4\frac{2}{3}$, und so in allen übrigen Fällen.

§. 141. Was nun insbesondere die gebrochene Zahlen anlangt, welche durch ganze Zahlen getheilet werden sollen, so kan man sich bey denselben derjenigen Anweisung bedienen, welche oben gegeben worden ist, und den Zehler des zu dividirenden Bruchs, 12 zum Exempel, in den Bruch $\frac{12}{7}$, durch die dividirende Zahl 3 dividiren, so oft dieses ohne Brüche geschehen kan. Der Quotiente ist, wie I, 132. gewiesen worden $\frac{4}{7}$. Und da jede gebrochene Zahl als der Quotiente anzusehen ist, welcher kommt, wenn man den Zehler desselben durch den Nenner dividirt, und jeder Quotiente durch einen solchen Bruch ausgedrückt werden kan, I, 136. so folget hieraus, daß wenn man die Zahl, welche dividirt werden soll, zwey, drey, zehn, hundert oder mehr mal grösser oder kleiner macht, den Theiler aber läßt wie er ist, auch der Quotiente, welcher aus der Division, der also vermehrten oder verminderten Zahl, durch den unveränderten Theiler, kommt, eben

eben so vermehret oder vermindert werde, wie die zu dividirende Zahl vermehret oder vermindert worden, und ebenfalls zwey, drey, zehn, hundert oder mehr mal grösser oder kleiner werde, als derjenige Quotient war, welcher aus der Division der einfachen Zahl durch eben den Theiler entsprungen ist.

L.
Abschnitt.

§. 142. Solte aber durch die Division des Zehlers durch den Theiler, welchen wir nunmehr $\frac{1}{7}$ zu seyn setzen, wieder ein Bruch $2\frac{2}{7}$ kommen, und folgendes der Quotiente werden $2\frac{2}{7}$; so thut man besser, daß man sich der andern Art zu dividiren L. 135, bedienet, und eine jede Einheit des Nenners, das ist, ein jedes der Theilchen, die den Bruch ausmachen, wieder in so viele gleiche Theile theilet, als viele Einheiten in dem Theiler sind, und im übrigen so verfähret, wie wir gewiesen haben. Denn dergleichen Brüche, als $2\frac{2}{7}$, deren Zehler ebenfalls Brüche sind, lassen sich etwas schwerer übersehen als andere. Der gegenwärtige will, man soll das Ganze in 17 gleiche Theile theilen, und solcher Theile 2 und noch $\frac{2}{7}$ eines Theils annehmen, um den Werth des Bruchs zu erhalten. Eine dergestalt wiederholte Theilung der Theile kan man sich nicht ohne einige Mühe vorstellen, welcher man überhoben bleibt, wenn das Ganze ein vor allemal getheilet wird.

§. 143. Stellet man sich nun vor, daß jede Einheit der Zahl AB, welche durch CD zu dividiren ist, einen Theil der ganzen Einheit IK bedeute, welche vermittlest L, M, N, O in fünf gleiche Theile getheilet ist, und daß folgendes AB $\frac{1}{5}$ der ganzen IK, und folgendes das Stück IO, ausdrücke, so wird nach der gegebenen Anweisung, jede Einheit der Zahl AB, das ist, jeder Theil IL, LM und so weiter, wieder in so viele Theile zu zertheilen seyn, als viele Einheiten der Theiler CD in sich hält, und folgendes in gegenwärtigem Exempel in dreye, und der Quotient EH wird vier dergleichen Theile betragen, nemlich so viele, als viele Einheiten in der Zahl der Theile AB enthalten sind. Indem jedes der Theilchen IL in drey getheilet wird, werden derselben in der ganzen IK drey mal mehr. Und es erfordert also die Division eines Bruchs $\frac{1}{5}$ durch die ganze Zahl 3 nichts anders, als daß man den Nenner desselben $\frac{1}{5}$ durch diejenige Zahl multiplicire, durch welche der Bruch dividirt werden soll, und den Zehler lasse wie er ist. Der Quotiente ist der Bruch, welcher aus

F. 17

I. dem vorigen Zehler, und den dergestalt herausgebrachten neuen Nenner gemacht wird, und folgendes in unserm Fall $\frac{1}{3}$.

S. 144. Die Sache ist auch vor sich klar. Wenn man in dem Bruch $10 = \frac{1}{3}$ die Zahl der Theile, in welche das ganze IK getheilet ist, drey mal grösser macht; und an statt $\frac{1}{3}$ schreibet $\frac{1}{9}$, so wird jedes Theilchen des ganzen IK drey mal kleiner. Denn es kan die Zahl der gleichen Theile in IK nicht drey mal grösser werden, wenn man nicht jedes Theil derselben IL, LM, MN und so weiter, wieder in drey gleiche Theile theilet, deren jedes folgendes nicht mehr als ein Drittel des vorigen IL oder LM betragen wird. Nun ist es an sich klar, daß wenn man eine gewisse Zahl 4, solcher Dinge als IL, LM sind, annimmt, und auf der andern Seite eben die Zahl 4 drey mal kleinerer Dinge, man in dem letzten Fall nur den dritten Theil dessen habe, so man in dem ersten gehabt, gleichwie derjenige, welcher drey 8 gute Groschen Stücke hat, nur den dritten Theil des Vermögens desjenigen besitzt, welcher 3 Thaler hat. Und demnach ist richtig, daß $\frac{1}{3}$ der dritte Theil von $\frac{1}{9}$ sey, oder daß $\frac{1}{3}$ komme, wenn man $\frac{1}{9}$ durch 3 dividiret, und daß überhaupt einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, man nur den Nenner des Bruchs durch diese ganze Zahl multipliret, und den Zehler stehen lassen könne.

S. 145. Wenn wir uns nun wiederum einen Bruch als $\frac{17}{5}$ als den Quotienten vorstellen, welcher aus der Division des Zehlers durch den Nenner entstanden ist, so folget hieraus, daß, wenn man die zu dividirende Zahl 17 läßt wie sie ist, verdoppelt aber den Theiler 5, der Quotiente ebenfalls zwey mal kleiner werden werde. Und wenn man also 17 durch 5 wie man will dividiret, und einen Quotienten, welcher dem $\frac{17}{5}$ gleich ist, heraus gebracht hat, so kan man den Quotienten, welcher kommen muß, wenn man eben die Zahl 17 durch 2 mal 5 oder 10 dividiret, erhalten, wenn man den vorigen $\frac{17}{5}$ zwey mal kleiner macht. Aus eben dem Grund wird der Quotiente drey mal kleiner, wenn der Theiler drey mal grösser genommen wird, und zehen, hundert, tausend mal kleiner, wenn man den Theiler zehen, hundert, tausend mal grösser nimmt.

S. 146. Man siehet leicht, daß hieraus ferner folge, daß, wenn man den Theiler zur Helfte vermindert, die zu theilende Zahl aber läßt, wie sie vorher war, der Quotiente nunmehr zwey mal grösser werden müsse. Also giebt 12 wenn sie durch 3 getheilet wird, 4, und wenn man sie durch 2 mal 3 oder 6 dividiret nur 2, welches die Helfte ist.

ist von dem vorigen. Macht man demnach einen Theiler zehen, hundert mal kleiner als er vorher war, und dividiret seinerley Zahl durch die dergestalt verminderte Theiler, so wird der Quotiente, drey, zehen, hundert mal, grösser, als derjenige ist, welcher kommt wenn man eben die Zahl durch den ganzen Theiler dividiret.

S. 147. Wenn man einen Bruch, von was Art er auch seyn mag, durch seinen Nenner multipliciret, so ist das Product allezeit der Zehler. Denn ein jeder Bruch $\frac{1}{7}$ ist der Quotient, welcher kommt, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret. Multipliciret man also den Bruch durch den Nenner 5, so multipliciret man den Quotienten durch den Theiler, und dadurch kan nichts anders als diejenige Zahl kommen, welche dividiret worden, das ist der Zehler, wie wir oben I, 137. gesehen.

S. 148. Dieses sind die Gründe, welche wir voraus setzen müssen, ehe wir uns zur Division einer Zahl, welche verschiedene Einheiten von höhern oder niedrigeren Ordnungen, oder von beyden zugleich, enthält, durch eine eben dergleichen Zahl, wenden konten, welche nunmehr verständlich kan gezeigt werden. Es sey erstlich 97583 zu dividiren durch 287, das ist, es sey eine Zahl zu finden, welche durch die letztern der vorgegebenen zwei Zahlen multipliciret, die erste herausbringet. Denn diesen Begriff haben wir oben von der Division I, 138. beygebracht, dessen wir uns hier wegen seiner Bequemlichkeit vor andern bedienen.

Vorbereitung zur Ausübung der Division.

S. 149. Ich schreibe den Theiler 287 vor die Zahl welche zu dividiren ist 97583 in einer Zeile, und sondere jene von dieser nur durch ein beliebiges Zeichen ab,

$$\begin{array}{r|l}
 287 \overline{) 97583} & 300 \text{ A} \\
 \underline{B. 86100} & 40 \text{ D} \\
 C. 11483 & 17 \text{ G} \\
 \underline{E. 11480} & \\
 F. 3 & 340 \text{ 17 Q}
 \end{array}$$

und nach der zu dividirenden Zahl setze ich wieder eine Linie, an welche zur Rechten der Quotiente, kommen sol, und diesen von der zu dividirenden Zahl abzusondern. So dann nehme ich eine Zahl, welche,

I. wenn man bequem rechnen wil, nur aus einer einzigen Ziffer bestehen muß, und von welcher ich zum voraus sehe, daß, wenn man sie durch den Theiler multipliciret, ein Product heraus kommen werde, so nicht grösser ist als die Zahl, welche zu dividiren ist. Diese ist hier die Zahl 300, bey welcher A steht. Ich multiplicire diese Zahl bey A durch den Theiler, und setze das Product bey B unter die Zahl welche zu dividiren ist, dergestalt, daß die Einheiten von einerley Ordnungen richtig unter einander zu stehen kommen. So dann ziehe ich diese Zahl B von der zu dividirenden Zahl ab, und setze den Ueberschuß darunter bey C. Nun nehme ich wieder eine Zahl, welche durch den Theiler multipliciret, ein Product giebet, so kleiner ist als der gefundene Ueberschuß bey C; diese Zahl steht bey D, und das Product derselben durch den Theiler bey E. Dieses Product bey E wird wieder von der über ihr bey C stehenden Zahl weggenommen, und der Ueberschuß bey F angemerket. Ist dieser, wie hier, kleiner als der Theiler, so ist die Arbeit am Ende, und man hat nichts weiter zu thun als vor den Quotienten die Summa der Zahlen bey A und D zu nehmen, und diesen einen Bruch G beyzusetzen, dessen Zehler der letzte Ueberschuß ist, welchen wir mit F bezeichnen, und der Nenner der Theiler, daß demnach in unserm Exempel der Quotiente seyn wird $340 \frac{17}{17}$, welche Zahl wir mit Q bezeichnen haben.

S. 150. Daß dem also sey, und daß nach der angewiesenen Art der Quotient richtig heraus gebracht werde, ist nachfolgender massen zu erweisen. Es ist von der zu dividirenden Zahl erstlich die Zahl B weggenommen worden, und der Ueberschuß ist C, demnach ist $B + C$ der zu dividirenden Zahl gleich. Ferner ist von C die Zahl bey E abgezogen worden, und F übrig geblieben, und es ist also wieder $E + F$ der Zahl bey C gleich, und man kan vor C die Summe der Zahlen $E + F$ setzen, ohne daß in der Grösse etwas verändert werde. Setzet man aber in der Summe $B + C$ vor die C diese letztere Summe $E + F$, so kommt $B + E + F$, welches also der zu dividirenden Zahl gleich ist.

S. 151. Man kan dieses auch kürzer also fassen. Von der zu dividirenden Zahl ist B weggenommen und C übrig geblieben, von diesem C ist ferner E weggenommen und F übrig geblieben. Alles was weggenommen worden ist, zusamt demjenigen so übrig geblieben, ist gewiß allezeit so viel als dasjenige, so im Anfang da gewesen; deswegen ist $B + E + F$ so viel als die Zahl, welche man dividiren sollte.

S. 152. Ferner ist B das Product aus 300×237 ; E ist das Product

duct aus 40×287 , und F ist das Product aus dem Bruch $\frac{1}{277}$, welches I. Abschnitt.
 cher einen Theil des Quotienten ausmacht, durch eben die 287, I. 147. oder $F = \frac{1}{277} \times 287$, diese drey Producte aber zusammen gesetzt, sind einem einzigen Product gleich, welches durch die Multiplication der Summe von $300 + 40 + \frac{1}{277}$, oder $340 \frac{1}{277}$ durch die Zahl 287 heraus gebracht wird I. 91: und es ist demnach $B + E + F$ diesem Producte $340 \frac{1}{277} \times 287$, oder $Q \ 287$, das ist, dem Producte aus der Zahl Q und dem Theiler, gleich. Und da wir gesehen, daß die zu dividirende Zahl der Summe der Zahlen $B + E + F$ gleich sey, I. 150. so muß dieselbe auch dem Producte aus der Zahl Q und dem Theiler gleich seyn. Giebt aber die gefundene Zahl Q, wenn man sie durch den Theiler multipliciret, ein Product welches der zu dividirenden Zahl gleich ist, so ist diese Zahl nothwendig der richtige Quotient, welchen man suchte. I. 138.

§. 153. Damit wir Gelegenheit haben noch ein und das andere bey dieser Sache zu erläutern, wollen wir noch ein Exempel auf die Art berechnen, und den Beweis kurz verfassen. Die zu dividirende Zahl sey 97357, und der Theiler 274, welche Zahlen gesetzt worden sind, wie vorhin gesagt worden:

274)	97357	300 A
	B 54800	100 D
	C 42557	50 G
	E 27400	4 K
	F 15157	1 N
	H 13700	$\frac{27}{274} R$
	I 1457	
	L 1096	
	M 361	355 $\frac{27}{274} Q$
	O 274	
	P 87	

Es ist alles gerechnet wie vorhin, und

$$B = 274 \times 200$$

$$E = 274 \times 100$$

$$H = 274 \times 50$$

$$L = 274 \times 4$$

$$O = 274 \times 1$$

$$P = 274 \times \frac{87}{277}$$

Dem

I. Abschnitt. Demnach ist $B + E + H + L + O + P$, oder die Summe aller dieser Producte, gleich dem Producte $274 \times 355 \frac{27}{4}$ oder $B + E + H + L + O + P = 274 \times Q$ I, 91. Aus der Arbeit bey der Rechnung ist klar, daß die Producte $B + E + H + L + O + P$ der zu dividirenden Zahl gleich seyn. Derowegen ist auch, wenn man an die Stelle derselben $B + E + H + L + O + P$ das ihnen gleiche Product $274 \times Q$ setzt, die zu dividirende Zahl $= 274 \times Q$, und also Q der richtige Quotiente.

§. 154. Man siehet aber auch hieraus, daß nicht viel daran gelegen sey, wenn man einen oder den andern Theil des Quotienten als A und K kleiner annimt, als man ihn hätte annehmen können. Es wird die Rechnung dadurch weilsäufiger aber nicht fehlerhaft. Man hätte gleich vor den ersten Theil des Quotienten 300 nehmen können, so wäre man auf einmal mit dieser Ordnung von Einheiten fertig worden. Man pflegt dieses allezeit so zu beobachten, und nimt eine jede der Ziffern der Factoren A, B, G, K, N so groß, als man nur kan. Wie groß man sie aber nehmen könne, findet man gemeinlich durch das Probiren, welches Probiren man bey der Art zu rechnen, die wir gegenwärtig gebraucht, so sehr nicht nöthig hat. Nachstehende Berechnung eben dieses Exempels, wenn man sie mit der eben gegebenen vergleichen wil, wird deuthlich zeigen, wie dieses zusammen hänge:

$$\begin{array}{r}
 274) \quad 97357 \overline{) 300} \\
 \underline{82200} \quad 50 \\
 15157 \quad 5 \\
 \underline{13700} \quad 355 \frac{27}{4} \\
 1457 \\
 \underline{1370} \\
 87
 \end{array}$$

§. 155. Das einzige Probiren, womit man, wie gesagt, die größten Theile des Quotienten, welche man nur haben kan, findet, machet hierbey einige Schwierigkeit. Damit man dasselbe erleichtere und etwas habe, woran man sich halten kan, indem man probiret, wie groß die Ziffern derer besondern Theile des Quotienten als hier 3, 5, 5 in 300, 50, 5 zu nehmen seyn: vergleicht man den Theiler mit den ersten Ziffern der zu dividirenden Zahl, deren man so viele nimt, als viele der Theiler hat, wenn diese Zahl der erstern Ziffern nicht weniger bedeuten als der Theiler, sonst muß man um eine Ziffer der zu dividiren-

dividenden Zahl weiter forttrücken. Als hier verglichenet man den Theiler 274 erstlich mit den drey ersten Ziffern der zu dividirenden Zahl 973, weil diese mehr als jene bedeuten, sonst, wenn der Theiler grösser gewesen wäre als diese Ziffern der zu dividirenden Zahl, hätte man ihn mit den vier ersten Ziffern 9735 verglichen müssen. Eben dieses beobachtet man hernach beständig. Ferner setzet man, daß der Theiler so oft in diesen Ziffern der zu dividirenden Zahl enthalten sey, als oft die erste Ziffer desselben in der ersten Ziffer von diesem, (2 in 9) enthalten ist, welches zwar nicht allezeit eintrifft, aber nicht eben sonderlich fehlet, und wenn es fehlet, allezeit zu vieles giebt: als wie ebenhier 2 in 9 vier mal enthalten ist, da doch 274 in 973 nicht vier mal enthalten. Die Ursach ist, weil, wenn man 274 durch 4 multipliciret, verschiedene Einheiten in das Product 2×4 herüber gehen, welche dieses vergrößern, wie man leicht sehen wird, wenn man 274 wirklich durch 4 multipliciret. Allein die auf die Art gemachte Fehler verbessern sich leicht. Denn indem man hernach die Producte machet, siehet man leicht, ob man den Factor, welcher einen Theil des Quotienten ausmachen soll, zu groß angenommen habe, oder nicht.

S. 156. Indessen ist nicht zu leugnen, daß dieses Probiren bey dem allen die Division sehr verdrießlich mache, und überhaupt wil es sich nicht recht schicken, daß bey einer Anweisung zu dieser oder jener Ausübung man etwas dem Probiren überlasse, und dieses machet die Anweisung allzeit unvollkommen. Man kan aber das Probiren bey der Division auf zweyerley Art gänzlich vermeiden, und die Division in eine bloße Subtraction verwandeln. Die erstere ist leichter, aber weitläufiger, die zweyte kürzer, aber sie erfordert etwas mehr Arbeit, und diese Arbeit ist zuweilen, wenigstens zum Theil, überflüssig.

S. 157. Die erstere dieser Arten zu dividiren gründet sich auf dasjenige, so von der Multiplication gewiesen worden, wie nemlich diese durch eine bloße, aber doch nicht allzuweitläufige Addition zu verrichten sey. Es ist auf die Art S. 114, die Zahl 1572 durch 432 multipliciret, und das Product 1543104 heraus gebracht worden. Gesezt, es sey dieses Product hinwiederum durch 1572 zu dividiren, so ist zum voraus bekant, daß 432 der Quotient werden müsse 1, 138. Es wird aber dieser Quotient durch eine bloße wiederholte Subtraction also gefunden;

I.
Abzähler.

1543104 . . A

357200 . . B

1185904

357200

828704

357200

471504

357200

114304 . . C

35720 . . D

78584

35720

42864

35720

7144 . . E

3572 . . F

3572

3572

00

Nachdem nemlich die zu dividirende Zahl bey A geschrieben worden, hat man dem Theiler 3572 so viele 00 zugesetzt, als nur geschehen können, ohne daß er größer würde, als die Zahl bey A. Der also vermehrte Theiler stehet bey B, denn man konte ihm in dem gegenwärtigen Fall nicht mehr als zwei 00 beysetzen. Er wäre größer worden als A, wenn man ihm derer dreye angefüget hätte. Die Zahl B wird von der A abgezogen, und der Ueberschuß unter derselben bemerkt. Von diesem Ueberschuß wird wieder eben die B abgezogen, und dieses wird so oft wiederhohlet bis endlich bey C ein Ueberschuß bleibet, so kleiner ist, als die Zahl B. Nachdem man dieses erhalten, ist von der B eine 0 am Ende weggethan, und dadurch die Zahl D heraus gebracht worden, diese hat man wieder von der C so oft abgezogen, als geschehen können, das ist, bis eine Zahl übrig geblieben ist, die kleiner ist als D, welche bey E stehet. Nunmehr hat man von der D wieder ein 0 am Ende weggethan, und dadurch die Zahl bey F heraus

aus gebracht, welche eben diejenige ist, mit welcher solte dividirt werden. Diese ist von der Zahl bey E zwey mal abgezogen worden: und nachdem dieses geschehen, ist am Ende 0 übrig geblieben. So bald dieses geschehen, ist der Quotiente leicht zu haben, wenn man ihn nicht schon während der Arbeit angemerkt hat.

S. 158. So oft nemlich der mit 00 vermehrte Theiler B von der Zahl A ist abgezogen worden, so viele Hunderte sind in dem Quotienten enthalten, und also in dem gegenwärtigen Falle, 4. So oft der mit einem 0 vermehrte Theiler D abgezogen werden können, so viele Zehner enthält der Quotiente, und also bey unserer gegenwärtigen Rechnung 3; endlich, so oft der Theiler selbst abgezogen werden können, so viele einfache Einheiten sind in dem Quotienten. Daß also in dem Falle, welchen wir vor uns haben, der Quotiente ist 432. Eben diese Verwandniß hat es auch mit den Einheiten der noch höhern Ordnungen, wenn deren welche in dem Quotienten vorkommen.

S. 159. Der Grund alles dieses lieget, wie gesagt ist, in demjenigen, so bey der Multiplication gezeigt worden ist, und man darf nur die gegenwärtige Rechnung mit der Rechnung des II, 4. Absatzes zusammen halten, wenn man alles deutlich einsehen will. Wenn man nemlich die Zahl B 1, 157. vier mal, und die Zahl D drey mal, F aber zwey mal setzet, und alles addiret, so erhält man ohne Zweifel das Product aus der Zahl F 3572 durch welche dividirt worden ist, und 432. Es kan aber durch diese Addition nichts anders als die Zahl A heraus kommen. Es ist also A dieses Product, und folgendes 432 der Quotiente, welcher kommet, wenn man A durch 3572 theilet. Wenn bey dieser Art zu dividiren nach allen Subtractionen noch etwas übrig bleibet, so verfähret man damit wie gewöhnlich.

S. 160. Die zwente Art das Probieren zu vermeiden, und die Division in eine bloße Subtraction zu verwandeln, bestehet darinne, daß man gleich Anfangs den Theiler durch alle einfache Zahlen multipliciret, das ist, durch alle von 1 bis auf 9, und alle diese Producte unter demselben bemerket. Ist dieses geschehen, so siehet man leicht, welches das größte dieser Producte werde, so man noch von der zu dividirenden Zahl abziehen kan, wenn man demselben eine oder etliche 000 zusetzet, und die Theile des Quotienten fallen so gleich in die Augen. Ein Exempel kan die Sache klar machen.

I. Wegweiser.	A	B	C
1)	532	45417904	
2)	1064	42560000	80000
3)	1596	2857904	
4)	2128	2660000	5000
5)	2660		
6)	3192	197904	
7)	3724	159600	300
8)	4256	38304	
9)	4788	37240	70
		1064	
		1064	2
		0	85372

§. 181. Es ist die Zahl 45417904 durch 532 zu dividiren. Man hat gleich Anfangs diese Zahl 532 durch 1, 2, 3 und so fort, bis 9 multipliciret, und diese Producte in der ersten Säule unter A geschrieben, auch die einfache Ziffer, durch welche jedes dieser Producte heraus gebracht worden, darneben verzeichnet. Unter B steht die Zahl, welche dividirt werden soll. Man sieht leicht, daß wenn man dem Producte unter A, vor welchem 8 steht, vier 0000 anfüget, die Zahl, welche dadurch heraus gebracht wird 42560000 noch von der zu dividirenden Zahl abgezogen werden könne, und daß dieses keinesweges angehen würde, wenn man dem Product unter A, vor welchem 9 steht, eben so viele 00 beysetzen wolte. Man setzet derowegen das erste dieser Producte am gehörigen Orte unter die zu dividirende Zahl, und ziehet sie gehörig ab. Dadurch erhält man den ersten Theil des Quotienten 80000. Nunmehr ist das Product unter A, vor welchem 5 steht, das größte unter denjenigen, welche mit dem Zusatz dreier 00 noch von dem Ueberbleibsel von der vorigen Subtraction können abgezogen werden. Man setzet es derowegen an den gehörigen Ort, und bemerket den zweiten Theil des Quotienten 5000. Man verrichtet die Subtraction, und gehet auf eben die Art weiter, so erlangt man endlich den ganzen Quotienten 85372. Die Sache hat keine Schwierigkeit, wenn man sich nur die Mühe geben will, die Rechnung selbst zu verrichten. Man hat wirklich einen großen Vortheil bey dieser Art zu dividiren, wenn der Quotiente aus vielen Ziffern bestehet: denn außer dem geschieht es öfters, daß die meisten der

der Producte unter A nicht gebraucht werden. Sonst aber ist der Grund derselben aus dem vorigen, so bisher gesagt worden, gar leicht einzusehen.

Die kürzeste Art des Dividirens.

§. 162. Wenn man nun immer die größten Zahlen zu den Theilen des Quotienten annimmt, welche man haben kan; so kan man die Division mit einiger Ersparung des Abschreibens der Ziffer und Stellung der 00 machen. Wir wollen das letzte Exempel nach der Art rechnen, in Hoffnung, daß selbst die Zusammenhaltung dieser beyden Rechnungsarten das übrige alles deutlich machen werde:

$$\begin{array}{r}
 532) 45412904 \quad | \quad 85372 \\
 \underline{4256} : : 1 : \\
 2857 : 1 : \\
 \underline{2560} : 1 : \\
 1979 : : \\
 \underline{1596} : : \\
 3830 : : \\
 \underline{3724} : : \\
 1064 : : \\
 \underline{1064} : : \\
 0 :
 \end{array}$$

Wenn man nemlich allezeit die größten Ziffern vor die Theile des Quotienten annimmt, die man nehmen kan, so ist klar, daß unmöglich mehr als eine Ziffer vor jede Ordnung der Einheiten kommen könne. Als hier können außer den 8 Zehntausenden nicht mehr Zehntausende in den Quotienten kommen, weil man gleich Anfangs die größte Zahl der Zehntausende genommen hat, die man nur nehmen können. Eben so können nicht mehr als 1 Tausende, nicht mehr als 3 Hunderte kommen, und so weiter. Und demnach bekommen die Ziffern in dem Quotienten ihre richtige Bedeutung von selbst, wenn man sie nur in der Ordnung hinter einander setzt, in welcher sie heraus gebracht werden.

§. 163. Nur muß man hiebei Acht haben, daß man die 00 nicht vergesse, welche kommen, wenn diejenige Zahl, welche man dividiren soll, kleiner ist als der Theiler, und man folgendes weiter

I. fortgerückt geschrieben wird, wie am dem nächst folgenden Beispiele Exemplum.

$$\begin{array}{r}
 29) \quad 89384 \quad | \quad 3082 \frac{5}{8} \\
 \underline{87400} \\
 2384 \\
 \underline{2384} \\
 00 \\
 \underline{2384} \\
 2384 \\
 \underline{2384} \\
 64 \\
 \underline{58} \\
 6
 \end{array}$$

§. 164. Vielleicht wird alles dieses deutlicher, wenn es noch auf einer andern Seite angesehen wird. Ich soll eine gegebene Zahl, als 39573 durch 12 dividiren, das ist, ich soll den zwölften Theil von dieser Zahl schaffen. Indem ich rechne wie eben gelehret worden,

$$\begin{array}{r}
 12) \quad 39573 \quad | \quad 3297 \frac{1}{2} \\
 A \quad \underline{36000} \\
 3573 \\
 B \quad \underline{24000} \\
 1173 \\
 C \quad \underline{10800} \\
 933 \\
 D \quad \underline{8400} \\
 93
 \end{array}$$

so theile ich die vorgegebene Zahl durch die beständige Subtraction in 36 Einheiten von der dritten Ordnung oder Tausende, in 24 Einheiten von der zweiten Ordnung oder Hunderte, in 108 Einheiten der ersten Ordnung oder Zehner, und in 84, und noch über das in 9 einfache Einheiten. Dieses sind die Zahlen, welchen die Buchstaben A, B, C, D, E beygeschrieben worden sind, welche, weil die ersten viere derselben, nachdem man sie nach und nach von der zu dividirenden Zahl weggenommen, endlich die Zahl bey E übrig gelassen, zusammen genommen allerdings der zu dividirenden Zahl gleich seyn müssen, und derowegen als ihre Theile anzusehen sind. Nun ist der erste Theil des Quotienten, nemlich die erste 3 so Tausende bedeutet, der zwölfte Theil

Theil der 36 Tausenden, so in der zu dividirenden Zahl enthalten sind, weil 3 mal 12 die Zahl 36 ausbringer, wie dieses gleich Anfangs durch die Multiplication gefunden, und eben deswegen 3 zur ersten Ziffer des Quotienten angenommen worden, und eben so ist die nächste 2 in dem Quotienten so Hunderte bedeutet, der zwölfte Theil der 24 Hunderte der zu dividirenden Zahl; der dritte Theil 9 welches Zehner sind, ist der zwölfte Theil der 108 Zehner; der vierte Theil, nemlich die letzten 7 Einheiten des Quotienten sind der zwölfte Theil der 84 Einheiten, und endlich ist der Bruch $\frac{1}{2}$ der zwölfte Theil der noch übrigen 9 Einheiten: es enthält also der Quotiente die zwölften Theile aller Theile der zu dividirenden Zahl. Da nun alle Theile hier wie allezeit das Ganze ausmachen, so ist klar, daß eben dieser Quotiente auch der zwölfte Theil der ganzen Zahl welche man dividiren sollte, sey, und daß also die Division durch 12 richtig verrichtet worden, weil eine Zahl durch 12 dividiren nichts anders heisset, als derselben Zahl zwölften Theil finden. L. 437.

§. 165. Es ist nach diesen allen bey der Division selbst nichts mehr zu erinnern, als dieses einzige, daß wenn der Theiler nur aus einer Ziffer bestehe, man so viele Weislaustigkeiten, als bis anhero gebraucht worden, da derselbe jederzeit mehr als eine Ziffer hatte, nicht nöthig habe. Man kan die Producte aus den Theilen des Quotienten im Gedächtniß behalten, und so abziehen; das überbleibende aber so gleich über oder unter die Ziffer der zu dividirenden Zahl anmerken, ohne die Ziffer der zu dividirenden Zahl herunter zu ziehen, und von neuen zu schreiben. Ein Exempel

$$\begin{array}{r}
 6) 395728 \mid 65954 \frac{1}{2} \\
 \underline{35324}
 \end{array}$$

Ich sage 6 in 39 ist 6 mal enthalten, aber 6×6 ist nur 36, und dieses Product von 39 weggenommen, läßt 3, welche ich unter die 9 schreibe, und zur nächsten 5 bringe, mit welcher sie 35 ausmacht; Nun ist 6 in 35 enthalten 5 mal, aber 5×6 ist nur 30, und diese von den 35 abgezogen, lassen 5 übrig, welche wieder unten angemerkt, und zu der nächst folgenden 7 gebracht werden müssen, mit welcher sie 57 machen, mit diesen verfähret man eben so, und auf die Art ferner bis man ans Ende kommt, da dann die last übergelassene 4 mit dem Theiler den Bruch $\frac{1}{2}$ giebt.

Die

I.
Aufsätz.

Die Ordnung der Einheiten der Ziffer des Quotienten zu bestimmen.

§. 166. Auf diese Art nun werden jederzeit die Ziffern des Quotienten heraus gebracht, und man siehet gar leicht, daß im Fall die letzten Ziffern so wohl des Theilers als der zu dividirenden Zahl ganze und einfache Einheiten bedeuten, auch in dem Quotienten die letzte Ziffer dergleichen Einheiten bedeuten werden, wodurch zugleich die Ordnung der Einheiten aller übrigen Ziffern bestimmet wird. Als in dem Exempel I, 154. da wir die Zahl 97357 durch 274 dividiret, und den Quotienten $355 \frac{27}{274}$ heraus gebracht haben, bedeutet die letzte Ziffer 5 einfache und ganze Einheiten, die vorhergehende Zehner, und so weiter; der Bruch aber bezieht sich ebenfalls auf einfache Einheiten, deren eine man in 274 Theile zertheilen, und 87 dergleichen Theile nehmen muß, um den Werth des Bruchs heraus zu bringen.

§. 167. Ist aber 973, 57 durch die Zahl 274, oder 97357 durch 2, 74, oder 973, 57 durch 27, 4 zu theilen, so findet man zwar die Ziffer des Quotienten vollkommen wie vorher $355 \frac{27}{274}$, allein die letzte 5 bedeutet nicht nothwendig ganze und einfache Einheiten, sondern sie kan auch Zehentheil oder Hundertheil, oder Zehner, oder Hunderte, mit einem Wort, eine Einheit von einer jeden der höhern oder niedrigeren Ordnungen bedeuten, und bekommt diese Bedeutung, nach dem das Zeichen der einfachen Einheiten, in den Zahlen, deren eine durch die andere dividiret werden soll, so oder anders stehet. Es ist übrig, daß wir betrachten nach was vor Geschehen dieses geschehe.

§. 168. Gesezt, man soll an statt der Zahl 97357 die Zahl 9735, 7 durch 274 dividiren. Da die letztere der beyden zu dividirenden Zahlen zehn mal kleiner ist, als die erstere, so kan der Quotiente nun nicht mehr $355 \frac{27}{274}$ seyn, sondern muß zehn mal kleiner gemacht werden, demjenigen zu folge, so wir oben I, 141. gesehen haben. Diese Verkleinerung geschieht, wenn man das Zeichen der einzeln Einheiten um eine Ziffer weiter nach der linken setzet, und an statt $355 \frac{27}{274}$ schreibt $35,5 \frac{27}{274}$ I, 106. und dieses ist also nunmehr der richtige Quotient, und der Bruch desselben beziehet sich auf zehentheil der einfachen Einheiten, oder auf eine Einheit der ersten niedrigeren Ordnung, welche man in 274 Theile theilen, und dieser Theile 87 nehmen muß, um den Werth des Bruchs zu erhalten. Man siehet auf eben die Art, daß, wenn man 973, 57 noch durch eben den Thei-

ler

ler 274 dividiret, der Quotient $3, 55 \frac{87}{274}$ seyn, und der Bruch sich I. auf eine Einheit der zweyten niedrigeren Ordnung beziehen werde. Abschnitte. Denn weil die zu dividirende Zahl wieder zehn mal kleiner genommen worden ist als vorher, so muß auch der Quotient zehn mal kleiner werden, und aus eben dem Grund folget, daß durch die Division der Zahl 97, 357 mit dem Theiler 274 der Quotient $0, 355 \frac{87}{274}$ kommen werde, und daß überhaupt vor jede Ziffer der zu dividirenden Zahl, um welche das Zeichen der einfachen Einheiten zurück nach der linken gesetzt worden, dieses Zeichen der einfachen Einheiten auch in dem Quotienten um eine Ziffer nach der linken zu mußte gerückt werden. Daß demnach, wenn die letzte Ziffer des Theilers einfache Einheiten bedeutet, jederzeit in dem Quotienten so viele Ziffern hinter dem (.) Zeichen der einfachen Einheiten stehen müssen, als viele derer in der zu theilenden Zahl daselbst stehen.

§. 169. Bleibt aber die zu dividirende Zahl einerley, und der Theiler wird zehn mal kleiner gemacht, das ist, dividiret man eben die Zahl 97357 durch 27, 4 an statt 274, so muß der Quotient zehn mal grösser werden als er vorher war, I, 146. und demnach seyn 355 Zehner, und noch über dieses $\frac{87}{274}$ eines Zehners, oder $3550 + \frac{872}{274}$; und wird der Theiler noch zehn mal kleiner genommen, und folgendes 2, 74, so wird der Quotiente wieder zehn mal grösser, und bedeutet demnach die letzte Ziffer 5 des vorigen Quotienten $355 \frac{87}{274}$ Hunderte, oder Einheiten von der zweyten höhern Ordnung, und der angehängte Bruch beziehet sich ebenfalls auf solche Einheiten, deren eine man demnach in 274 Theile zu zertheilen und deren 87 anzunehmen hat, um seinen Werth zu bestimmen.

§. 170. Eben so ist es auch, wenn man die Zahl 9735, 7 welche wir vorher durch 274 dividiret, nunmehr durch 27, 4 dividiret; der Theiler ist zehn mal kleiner worden. Da nun der vorige Quotient war $35, 5 \frac{87}{274}$, so muß derjenige welcher nunmehr kommt, zehn mal grösser seyn, und folgendes ist er dieser $355 \frac{87}{274}$. I, 105. Dividiret man 973, 57 durch 27, 4. so wird der Quotient $35, 5 \frac{87}{274}$, und es wird überhaupt das Zeichen der einfachen Einheiten (.) vor jede Ziffer, um welche es in dem Theiler nach der linken zurück gesetzt wird, in dem Quotienten um eine Ziffer nach der rechten vorwärts gebracht. Nachstehende Zahlen können dieses in einem Blick zeigen. Da man beständig die zu dividirende Zahl oben, den Theiler darun-

L. ter, und den Quotienten unter diesen unter eine Linie gesetzt. Man hat
Abschnitt. aber dabei die Brüche weggelassen:

$\begin{array}{r} 97357 \\ 274 \\ \hline 355 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9735,7 \\ 274 \\ \hline 35,5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 973,57 \\ 274 \\ \hline 3,55 \end{array}$	$\begin{array}{r} 97,357 \\ 274 \\ \hline 0,355 \end{array}$
$\begin{array}{r} 97357 \\ 27,4 \\ \hline 3550 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9735,7 \\ 27,4 \\ \hline 355 \end{array}$	$\begin{array}{r} 973,57 \\ 27,4 \\ \hline 35,5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 97,357 \\ 27,4 \\ \hline 3,55 \end{array}$
$\begin{array}{r} 97357 \\ 2,74 \\ \hline 35500 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9735,7 \\ 2,74 \\ \hline 3550 \end{array}$	$\begin{array}{r} 973,57 \\ 2,74 \\ \hline 355 \end{array}$	$\begin{array}{r} 97,357 \\ 2,74 \\ \hline 35,5 \end{array}$
$\begin{array}{r} 97357 \\ 0,274 \\ \hline 355000 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9735,7 \\ 0,274 \\ \hline 35500 \end{array}$	$\begin{array}{r} 973,57 \\ 0,274 \\ \hline 3550 \end{array}$	$\begin{array}{r} 97,357 \\ 0,274 \\ \hline 355 \end{array}$

§. 171. Und aus diesen allen erhellet, daß in dem Quotienten das Zeichen der einfachen Einheiten (,) jederzeit so weit von der letzten Ziffer des Quotienten abstehen müsse, als viele Ziffern in einer der zwei gegebenen Zahlen, deren erstere durch die zweite zu theilen war, mehr als in der andern hinter diesem Zeichen (,) stehen. Und daß wenn in der zu dividirenden Zahl mehr Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten stehen, als in dem Theiler, das Zeichen der einfachen Einheiten vor die letzte Ziffer des Quotienten, nach der linken zu müsse gesetzt, und um so viele Ziffern von demselben entfernt werden, als viele Einheiten der Ueberschuß der Zahl der Ziffern, in der zu dividirenden Zahl, welche diesen Zeichen stehen, über die Zahl der Ziffer hinter eben dem Ort der einfachen Einheiten in dem Theiler, enthält: daß aber, wenn der Theiler mehr Ziffern enthält, als die Zahl welche zu theilen ist, dieses Zeichen (,) vor die letzte Ziffer nach der rechten zu müsse gesetzt werden, daß zwischen denselben und der letzten Ziffer des Quotienten so viele 00 zu stehen kommen, als viele Einheiten der Ueberschuß der Zahl der Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten in dem Theiler, über die Zahl eben dergleichen Ziffern in der zu dividirenden Zahl, enthält.

Den

Den Quotienten in zehentheiligen Brüchen darzustellen.

I.
Wisspunkt.

S. 172. Die Brüche, dergleichen in unserm Exempel $\frac{27}{7}$ war, werden meistens weggelassen, wenn in dem Quotienten Einheiten von einer der niedrigen Ordnungen vorkommen, und dieses deswegen, weil diese Brüche entweder an sich Kleinigkeiten bedeuten, auf welche man in der Anwendung nicht Acht haben kan, oder doch auf solche Kleinigkeiten können gebracht werden. Der zehentausendste Theil einer Meile ist an sich gar merklich, er beträgt 2 Schuh, und wenn ein Ort von einem andern um 7 10000 Meilen entfernt ist, so fehlet man in der That, wenn man diese Entfernung gerade von 7 Meilen zu seyn setzt, um vier Schuhe. Aber wem ist an diesem Fehler etwas gelegen, und was ändert derselbe in der Anwendung? Ja, würde man nicht vielmehr demjenigen wenigstens vor eigensinnig halten, welcher niemals um solche Kleinigkeiten fehlen, und wenn er um die Entfernung eines Orts von einem andern gefragt wird, dieselbe bis auf ein Haar breit bestimmen wolte; gesetzt nemlich, daß dieses in seiner Gewalt wäre? Man kommt allezeit durch die wiederholte Theilung auf dergleichen Kleinigkeiten, und vermittelst der zehentheiligen Brüche kan man allezeit den Quotienten dergestalt heraus bringen, daß, ob zwar derselbe nicht eigentlich der wahre ist, er dennoch nicht mehr als um etliche Einheiten von derjenigen niedrigen Ordnung, welche man nur annehmen will, von dem wahren abgeht. Das ist, man kan vermittelst der Division, und indem man den Quotienten bloß in zehentheiligen Brüchen darstellt, machen, daß derselbe von dem wahren nicht mehr als um einige zehentausendtheiligen, oder wenn man will, um einige hundert oder tausend mal tausendste, oder noch kleinere Theilchen, abgehe. Demnach kan man, wenn man bloß um den Nutzen bey der Anwendung bekümmert ist, die Brüche, welche ausser den zehentheiligen noch in den Quotienten kommen, allezeit weglassen. I, 41.

S. 173. Um aber den Quotienten in zehentheiligen Brüchen so genau als man nur will heraus zu bringen, verfähret man folgender gestalt. Man hängt an die Zahl, welche man dividiren soll, so viele 00 an, als man nöthig findet, nachdem man vorher den Ort der einfachen Einheiten, falls es nicht bereits geschehen ist, bezeichnet. Nach der Zahl dieser 00 richtet sich die Ordnung der Einheiten der letzten Ziffer des Quotienten, und man kan also ermessen, wie viel man dersel-

L.
Abschnitt.

ben anzuhängen habe, damit diejenigen Fehler vermieden werden, welche nach Beschaffenheit der Sache zu vermeiden nöthig sind. Doch ein Exempel kan diese Sache deutlicher machen als viele Worte. Es sey die Zahl 3 durch 7 zu theilen, und der Quotient in zehentheiligen Brüchen so genau zu schaffen, daß man um kein hundert tausendstes Theilchen fehle, so hänge ich an die zu dividirende Zahl fünf 00, bezeichne den Ort der einfachen Einheiten, und dividire so dann die Zahl 3,00000, welche nichts mehr als 3 bedeutet durch 7.

$$\begin{array}{r|l} 7) & 3,00000 \\ & 2645 \end{array} \quad 0,42857$$

Der Quotient 0,42857 ist der gesuchte, und eben so verfähret man auch, wenn in der einen oder den beyden zur Division gegebenen Zahlen zehentheilige Brüche vorkommen. Aus dem vorigen I, 171. ist nicht sonderlich schwer einzusehen, wie viel 00 man am Ende anhängen müsse, damit man in dem Quotienten Einheiten von einer beliebigen Ordnung erlange: doch kan man auch dieses Nachdenken ersparen, wenn man folgender gestalt verfähret.

S. 174. Wenn in der Zahl, welche zu dividiren ist, eben so viele oder mehrere Ziffern hinter dem Ort der einfachen Einheiten stehen, als in dem Theiler, so hat man nicht nöthig gleich Anfangs 00 an dieselbe zu setzen. Man dividire ordentlich bis man ans Ende kommt, und bestimme so dann die einfache Einheiten des Quotienten nach den gegebenen Regeln, indem man nemlich so viel Ziffern von der rechten vermittelst des (,) Zeichens der einfachen Einheiten abschneidet, als viele dergleichen Ziffern in der zu dividirenden Zahl mehr sind, als in dem Theiler. Kan man den dergestalt erhaltenen Quotienten noch nicht ohne merkliche Fehler vor richtig annehmen, so verfolge man die Division, indem man an dasjenige, so von der vorigen Division übrig geblieben, eine 0 anfüget, und wiederhole dieses so oft bis man seinen Zweck erreicht, wie in den nachstehenden Exempeln zu sehen ist:

$$35) \begin{array}{r} 3,972 \\ 3,511 \\ \hline \end{array} 0,11348$$

47 :

35 :

122

105

170

140

300

280

20

$$241) \begin{array}{r} 79,234 \\ 72311 \\ \hline \end{array} 32,877$$

693 :

482 :

2114

1928

1860

1687

1730

1687

43

I
Abchnitt.

§. 175. Stehen aber in der zu dividirenden Zahl weniger Ziffern, welche zehentheilige Brüche bedeuten, als in dem Theiler, so setze man zum Anfang nur so viele 00 an die erstern dieser Zahlen, als erfordert werden, damit die Zahl aller Ziffern hinter dem Zeichen der einfachen Einheiten in dieser zu dividirenden Zahl eben so groß werde, als die Zahl dergleichen Ziffern in dem Theiler. Man dividire, bis man ans Ende kommt, und bestimme so dann den Ort der einfachen Einheiten. Es wird aber in diesem Fall die letzte Ziffer des Quotienten selbst einfache Einheiten bedeuten, wie dieses sich allezeit begiebt, wenn die letzte Ziffer der zu dividirenden Zahl Einheiten von eben der Ordnung bedeuten, welche von der letzten Ziffer des Theilers bedeutet wird I, 170. Nachdem man auf die Art den Ort der einfachen Einheiten bestimmt hat, kan man nach und nach 00 an die überbleibende Zahlen fügen, und die Division wie eben gezeigt worden, verfolgen. Die Berechnung nachstehender Beispiele wird hoffentlich alles vollkommen klar machen.

$$2,84) \begin{array}{r} 750 \\ 568 \\ \hline \end{array} 2,64$$

1820

1704

1160

1136

24

$$0,235) \begin{array}{r} 7,000 \\ 470 \\ \hline \end{array} 29,7$$

2300

2115

1850

1645

2051

R 3

572)

I.
Nachpau.

$$\begin{array}{r}
 5,72) \quad 0,30 \quad | \quad 0,052 \\
 \underline{0 \ 300} \\
 0 \ 3000 \\
 \underline{2860} \\
 1400 \\
 \underline{1144} \\
 256
 \end{array}$$

§. 176. Man kommt mit einer dergleichen Division zuweilen ans Ende, und bekommt den Quotienten vollkommen genau, aber dieses geschieht nicht allezeit; denn man kan nicht alle Brüche in zehentheilige verwandeln, und durch diese richtig und dergestalt darstellen, daß gar nichts fehle. Nachstehende Exempel weisen beydes:

$$\begin{array}{r}
 3) \quad 7,10000 \quad | \quad 2,36666 \\
 \underline{1 \ 222}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2,3) \quad 17,25 \quad | \quad 7,5 \\
 \underline{16 \ 1} \\
 115 \\
 \underline{115} \\
 0
 \end{array}$$

Man siehet leicht, daß in dem ersten Fall man niemals ans Ende kommen könne, weil im Verfolg immer 20 durch 3 zu dividiren ist, welches niemals genau geschehen kan, und es bleibt hier immer eine dergleichen Zahl zu dividiren übrig, als diejenige ist, welche bereits dividirt worden. Wie ist es bey so gestaltnen Sachen möglich, daß man jemals fertig werde. Es gehet demnach der Quotiente 2,36666 ohne Ende fort, und wird niemals, vollkommen so groß als 2,37, welches der eigentliche Quotiente ist, welcher aus der Division der Zahl 7,1 durch 3 herausgebracht wird.

Einige Vortheile bey' der Multiplication und Division.

§. 177. Was bis anhero gesagt worden ist, setzt uns in den Stand eine jede Zahl, welche durch Einheiten von verschiedenen höhern und niedrigeren Ordnungen ausgedrückt wird, durch eine andere dergleichen Zahl, zu multipliciren oder zu dividiren. Doch ist noch etwas zu sagen übrig, so zur bequemen Verrichtung dieser beyden Rech-

Rechnungsarten dienen kan. Dasjenige so bey den Gründen der I. Multiplication I. 91. angemerket, und nach dem so oft gebraucht Abschnitt. worden, daß nemlich die Summe der Producte verschiedener Theile einer Zahl, die sämtlich durch einerley Zahl multipliciret worden, mit dem Product das heraus kommt, wenn man die ganze Zahl durch eben dieselbe Zahl multipliciret, einerley sey: und daß demnach, wenn eine Zahl zum Exempel durch 6 multipliciret werden sol, ich dieselbe erstlich durch 3 multipliciren, und hernach dieses Product zwey mal nehmen könne, weil 6, zwey mal drey ist, oder sich in zwey dreyen theilen läßt, und so überhaupt in den übrigen Fällen; dieses sage ich wird uns den Grund von allen diesen Bequemlichkeiten geben, welche uns so wohl bey der Multiplication, als auch bey Verrichtung der Division, die Multiplication mit größern Ziffern zum öftern ersparen werden.

S. 178. Es sey die Zahl 372, durch 7 zu multipliciren: Ich habe sie aber bereits durch 4 multipliciret, und das Factum ist 1488, ich habe sie auch durch 3 multipliciret, und es ist hier heraus kommen 1116, so setze ich diese zwey Producte zusammen, die Summa derselben 2604 ist 372×7 : Oder ich habe eben diese Zahl 372 durch 3 multipliciret, und das Product ist 1116, ich nehme dieses gedoppelt 2232, so habe ich die vorgegebene Zahl sechs fach, ferner setze ich sie noch einmal zu dem auf die Art gefundenen Product, so ist $2232 + 372 = 2604$ wieder das Factum aus derselben Zahl 372 und 7. Und so kan man ein Factum auf gar verschiedene Arten machen.

S. 179. Ja man kan sich auch der Division bedienen, dergleichen Producte einer Zahl aus andern Producten derselben, die schon vorher bekannt waren, bequem zu machen, wie auch der Subtraction. Die Gründe sind einerley mit dem vorigen, und ein paar Exempel können die Sache klar machen. Es sey eben die Zahl, welche vorher da war 372 bereits durch 6 multipliciret, und das Factum sey 2232, ich sol sie durch 3 multipliciren. Weil nun eine Zahl sechs mal genommen doppelt so viel gibt, als wenn man sie nur drey mal nimt, I. 94. so muß das gesuchte Product die Helfte des bereits gefundenen seyn, und demnach heraus kommen, wenn man jenes durch 2 dividiret, folgendes ist $372 \times 3 = 1116$.

S. 180. Wiederum wenn eben die Zahl 372 durch 7 multipliciret, das Factum 2604 bringt, und man sol sie durch 6 multipliciren, so kan

I. **Beispiel.** Can man nur die einfache Zahl 372 von dem Product derselben durch 7, welches 2604 ist, abziehen. Es bleibt wenn dieses gethan wird, die Zahl 2232, welches eben das Product der 372 durch 6 ist, so zu finden war.

S. 181. Man hat mit einem Wort nur immer darauf zu sehen, wie der Factor, durch welchen multiplicirt werden sol, aus denjenigen Factoren durch welche bereits multiplicirt worden ist, entstanden sey, und das gesuchte Factum aus den vorigen eben so zu machen. Es sey 372 durch 7 zu multipliciren, aber allbereits durch 3 multiplicirt, wovon das Factum ist 1116, und durch viere, und hievon sey das Factum 1488; Der Factor durch welchen multiplicirt werden sol, 7, entsteht, indem man die zwey Factoren, durch welche bereits multiplicirt worden ist, zusammen setzt: also entsteht auch das Factum der gegebenen Zahl 372 durch 7, indem man die zwey vorige Producte derselben durch 3, und durch 4 zusammen addirt, und ist demnach dieses Factum $= 1116 + 1488 = 2604$.

S. 182. Nun sey 372 durch 7 multiplicirt, und das Factum wie gefunden worden 2604. Ferner sey eben die Zahl durch 3 multiplicirt, und das Factum 1116, man sol finden, wie viel komme, wenn man eben die Zahl 372 durch 4 multiplicirt. Es entsteht 4 aus den Zahlen 7 und 3, wenn man 3 von 7 abziehet, also wird auch das Factum aus 372 durch 4 entstehen, indem man das Factum 372×3 von dem Producte 372×7 , das ist 1116 von 2604 abziehet, und demnach seyn $2604 - 1116 = 1488$.

S. 183. Ferner sey 372 durch 3 multiplicirt; und das Factum sey 1116, man sol eben die Zahl durch 6 multipliciren. Der Factor 6 ist der vorige Factor 3 zweymal genommen: also ist auch das gesuchte Factum zwey mal so groß, als das gefundene, und entsteht indem man jenes zweymal nimmet, demnach ist $372 \times 6 = 1116 \times 2 = 2232$.

S. 184. Eben so ist es auch in dem nächst folgenden Fall, da gesetzt wird, es sey noch die Zahl 372 durch 6 multiplicirt, und so das Factum 2232 entstanden, man sol aber dieselbe durch 2 multipliciren, der Factor 2 entsteht aus dem vorigen 6, indem man jenen durch 3 dividirt; eben so entsteht auch das Factum aus dem vorigen so allbereits gefunden, indem man jenes durch eben die Zahl 3 theilet, und ist demnach 744.

S. 185. Es wird vielleicht nicht undienlich seyn, wenn wir uns diese

diese Sache nochmals von vorne vorstellen, weil sie von Nutzen seyn kan. Man schreibe die Einheit vor sich, und neben derselben eine andere Zahl nach Belieben als 7, wie diese bey A stehet; I. Abschnitt.

1	7	A
3	21	B
4	28	C
8	56	D
5	35	E
21	147	F

Man mache so dann aus der 1 eine andere Zahl nach Belieben 3, und aus der 7 ebenfalls eine neue, eben so wie man die 3 aus der 1 gemacht. Diese Zahl ist 21 und steht neben der 3 bey B. Aus diesen Zahlen bey A und B mache man ferner neue Zahlen, indem man sie beyderseits zusammen addiret, wie die bey C entstanden sind, oder die kleinere von der größten wegnimmt, oder sie beyderseits durch einerley Zahl multipliciret oder dividiret: und auf eben die Art mache man aus den Zahlen bey C und den vorigen noch andere. Wie denn die bey D entstanden sind, indem man die Zahlen bey C durch 2 multipliciret hat, und aus diesen die Zahlen bey E worden sind, indem man von den Zahlen bey D die bey B abgezogen hat: aus den Zahlen bey E aber sind die bey F gekommen, nachdem man die bey E mit

2 geth
Zahl 1
Zahl,
den:
D aus
eben d

man dergestalt verfahren, jede der 7 so entstanden sey, wie die stehet, aus der Einheit entstan-
gebraucht, die Zahl unter der 7 bey
man die Zahl unter der 1 bey
1, 101.

der 7
hende
7 und

unter der 7 stehende Zahl 56 aus
ebensals bey D unter der 1 ste-
ist die Zahl 56 das Factum aus
um auf gar verschiedene Arten

heraus gebracht werden, nachdem man aus dem ersten 1 und 7 andere Zahlen nach Belieben machet, und von diesen wieder auf andere komt, bis endlich die bey D stehende Zahlen heraus gebracht werden.

S. 187. Will man also überhaupt eine Zahl, als hier 7, durch eine jede andere als 8 multipliciren: so hat man sich nur, wie I, 181. gesagt worden, überhaupt eine Art vorzustellen, wie die 8 aus der Einheit werden kan, deren allzeit unendlich viele sind, und so dann aus 7 andere Zahlen, und aus diesen wieder andere nach eben der Art heraus zu

I. bringen, nach welcher man aus der 1 andere, und aus diesen wieder
 Beispiel. andere gemacht hat, bis endlich die 8 entstanden ist.

§. 188. Dieses nun auf die Multiplication anzuwenden, wollen wir uns vorstellen, es sey die Zahl, der wir uns bis anhero immer bedienet 372 zu multipliciren durch 642, da man, dem zufolge, so bereits bekannt ist, sie erstlich durch 2 zu multipliciren hat, hernach durch 4, so dann durch 6. Man kan das zweyte Factum heraus bringen, wenn man das erste gedoppelt nimt, und das dritte, wenn man die zwey erstern addiret. Nämlich $372 \times 2 = 744$, so dann $372 \times 4 = 744 \times 2 = 1488$. Ferner $372 \times 6 = 372 \times 2 + 372 \times 4 = 744 + 1488 = 2232$; und also erhält man die Producte, welche in der Rechnung erfordert werden, auf die Art etwas leichter als durch die unmittelbare Multiplication. Man hat nunmehr, was dergestalt gefunden worden, nur gehörig in Ordnung zu setzen, und so dann zu addiren wie sonst gewöhnlich, aber dabei die Ordnungen der Einheiten gehörig zu beobachten:

$$\begin{array}{r} 372 \\ 642 \\ \hline 744 \\ 1488 \\ 2232 \\ \hline 238824 \end{array}$$

oder also,

$$\begin{array}{r} 372 \\ 642 \\ \hline 744 \\ 744 : \\ 744 : \\ 744 : \\ 744 : \\ 744 : \\ \hline 238824 \end{array}$$

Hätte man eben die Zahl 372 durch 264 zu multipliciren, so müste eben der Vortheil anzuwenden, und man kan in solchen Fällen die nach und nach heraus gebrachte Producte in der Ordnung setzen, in welcher sie nach und nach kommen, wie nachstehende Rechnung ausweiset:

$$\begin{array}{r} 372 \\ 264 \\ \hline 744 \\ 1488 \\ 2232 \\ \hline 98208 \end{array}$$

Und hierdurch sehen wir augensam gewesen zu haben, wie man sich des angegebenen Vortheils in allen andern Fällen bedienen könne.

§. 189. Bei der Division kommen dergleichen Vortheile noch einigermaßen besser zu statten. Es sey eine gegebene Zahl 7953847 durch eben die 372 zu dividiren:

$$\begin{array}{r}
 D \ 372 \overline{) 7953847} \ 21382 \\
 \underline{A \ 744} \\
 513 \\
 \underline{B \ 372} \\
 1418 \\
 \underline{C \ 1116} \\
 3024 \\
 \underline{E \ 2976} \\
 487 \\
 \underline{F \ 372} \\
 115
 \end{array}$$

Hier ist das Product bey A, der Theiler D doppelt genommen: B ist so groß als D; C ist $= 3D$, und folgendes $A + B$, und wird also aus dem A und B leicht gefunden. E ist $= 8D$, und folgendes $= 2C + A$, und kan also ebenfalls ohne große Schwierigkeit gefunden werden: man muß aber jederzeit, wie schon erinnert worden L. 188. auf die Bedeutung der Ziffer wohl Acht haben, und wie die Producte gehörig zu setzen sind.

Gebrauch dieser Vortheile bey der Probe der Multiplikation.

ichkeit nicht bedienen, die sie wenigstens mit größtem G zu probiren, ob sie richtig und gehörig angewendet gezeigten Rechnungsarten werde. Aber man kan daß man etwas habe, was versichern kan, daß man innerley Product heraus kan wenn man einerley Productlich einerley heraus bringt, man nicht geirret habe.

I. §. 191. Wir haben I, 66. gesehen, wie diese Untersuchung, ob man gefehlet habe oder nicht, bey der Addition und Subtraction anzubringen sey. Die Division probiret die Multiplication. Der Quotient durch den Theiler multipliciret, giebt allezeit die Zahl, welche dividirt worden I, 137. Man kan also diese Multiplication verrichten und sehen, ob der gefundene Quotient dadurch der dividirten Zahl gleich wird. Man muß den ganzen Quotienten nehmen, wie er meistens theils aus einer ganzen Zahl und aus einem Bruch besteht. Oder wenn man nur die ganze Zahl nehmen will, so muß man derselben so dann die lezt übrig gebliebene Zahl, das ist den Fehler des Bruchs, zusehen. Diese Summe wird in diesem Fall, wenn richtig gerechnet worden ist, der dividirten Zahl gleich seyn. In dem letzten Exempel der Division I, 189. ist der Quotient

In ganzen Zahlen
der Divisor war

21381, 2

372

42762

149667

64143

von diesen ist das Factum,
Und das Uebergebliebene

7953782

115

Die Summe davon 7953847 ist die dividirte Zahl.

§. 192. Es ist aber in der Multiplication, welche man anstellen, fehlen kan, wahrhaftig entdeckt worden, derowegen gezwungen ist man zu nehmen. Es ist also wohl in dem Quotienten eine ne und alles übrige, so noch genommen worden sey, beprobirt habe; Wie das letztere ist nichts anders als

§. 193. Man kan zu dem Product auf zwey oder drey gegebene Zahl 79 durch 6 heraus. Wir ich wissen

ist in
entde-
Fehler
se, und
vorzu-
st man
gesetzt,
n nicht
subtrah
das er

en, se
Inge ge
ge 474
iplicire
ich

Ich eben die Zahl durch 3, das Factum wird 237, dieses gedoppelt giebt 474 wie vorher, und diese Uebereinstimmung läßt mich nicht anders glauben, als, ich habe weder das erste noch das zweyte mal gefehlet.

Eine andere Probe der einfachen Rechnungsarten.

§. 194. Man hat auch noch eine andere Probe, welche sich zwar bey allen Rechnungsarten anwenden läßt, aber nirgends mit grösserer Bequemlichkeit als bey der Multiplication, ich meyne diejenige, welche durch Wegwerfung der 9 geschieht. Der Grund davon ist dieser. Gesezt, man habe nachfolgende Zahlen zu addiren

5987,

543

625

92

7247

man lasse aber in denselben die Ziffern schlechterdings Einheiten bedeu-

I. in unserm Exempel 2 übrig, welche man erhalten, indem man von allen Ziffern derer Zahlen, die zu addiren waren, 9 so oft weggeworffen, als nur möglich gewesen. Denn erstlich hat man derselben verschiedene weg gethan, indem man die Summe geschrieben, und hernach sind die übrigen, welche in der Summe noch da geblieben, ebenfalls weggeworffen worden. Es folgt hieraus, daß wenn in eben den Ziffern der Zahlen, welche zu addiren vorgegeben worden, alle 9 welche darin angetroffen worden, oder aus der Addition derselben entstehen, nochmals weggeworffen werden, nunmehr ebenfalls die Zahl 2 und keine andere übrig bleiben müsse, ob man gleich einer ganzen andern Ordnung folget, die Ziffern zusammen zu setzen, und aus denselben die 9 heraus zu bringen. Wie denn in dem Exempel, so vor uns steht, allerdings geschieht, wenn man in den Reihen oder Zahlen von der linken zur rechten fortgehet. Es ist der Ueberschuß über die 9 aller Ziffern der ersten Reihe 2, in der zweyten ist dieser Ueberschuß 3, in der dritten 4, und in der vierten wieder 2, und wenn man von diesen Ueberbleibseln wieder 9 so oft wegwirft, als man kan, so bleibt, wie in der Summe, 2 übrig, und dergleichen muß allzeit erfolgen, wenn richtig gerechnet worden.

§. 196. Erfolgt es aber, und bleibt in der Summe nach Wegwerfung aller 9, welche man durch die Addition der Ziffer derselben heraus bringt, eben so viel als in den addirten Zahlen nach ebenmäßiger Wegwerfung der 9 übrig bleibt, so kan man glauben, daß richtig gerechnet worden. Ich sage man kan es glauben, denn es folgt nicht untrüglich. Es sind viele Zahlen, welche, wenn man auf die Art verfähret, einerley übrig lassen. Man verseye in unserer Summe die Ziffern, und seze an statt 7247 zum Exempel 7742, so bleibt ebenfalls nach Abzug der 9 die Zahl 2 übrig. Man nehme der einen Ziffer etwas ab, und seze es einer andern zu, oder vertheile es unter verschiedene andere, als von der ersten Ziffer nehme man 2, und seze 1 zu der zweyten, und 1 zur dritten, und schreibe also an statt 7247, die Zahl 5557 so bleiben nach Abzug aller 9, nach wie vor 2 übrig.

§. 197. Hiedurch, und weil wegen der Menge der Ziffern, die meistens bey der Addition vorkommen, die Probe fast schwerer wird, als die Rechnung selbst, und es also gar leicht ist, sich darin zu verstoßen, da man denn nicht wissen kan, ob in der Addition oder der Probe gefehlet worden; wird dieselbe bey der Addition fast unbrauchbar. Bey der Multiplication aber fällt ein großer Theil dieser Unbequemlichkeit weg. Es sey 7532 durch 4 zu multipliciren. Wie haben hier die Multiplication durch eine wiederholte Addition verrichtet,

set, und dasjenige so übrig bleibt, wenn man von einer jeden der zu addirenden Zahl, das ist, von dem Factor 7532 die 9 so oft als es sich thun läßt, abziehet, darneben gesetzt, und eben dieses bey der Summe oder dem Product gethan, die Verknüpfungen des gegenwärtigen mit demjenigen, so von der Addition eben L. 195. gesagt worden, desto besser zu zeigen, nemlich bey der Zahl

$$\begin{array}{r}
 7532 \quad 8 \\
 7532 \quad 8 \\
 7532 \quad 8 \\
 7532 \quad 8 \\
 \hline
 30128 \quad 5
 \end{array}$$

welche zu multipliciren war, bleiben 8, und bey dem Product 5. Nun soll man demjenigen, so von der Probe der Addition gesagt worden zu Folge, von diesen vier 8 welche übrig geblieben, wieder die 9 so oft wegworfen als man kan. Dieses Wegwerfen aber geschieht, wenn man die Zahlen, von welchen 9 wegworfen ist, nur zusammen addiret, in der Summe aber alle Ziffern wieder nur einfache Einheiten gelten läßt, und dieselbe zusammen setzt, und vor 12 zum Exempel schreibt 3, vor 32 aber 5, und so ferner. L. 194. Man wird also auch im gegenwärtigen Exempel alle übrig gebliebene 8 zusammen setzen, oder welches eben das ist, die 8 so bey dem 7532 steht, durch die Zahl derselben oder durch den Factor 4 multipliciren müssen. Die Summe oder das Product 8×4 das ist 32, wird 5 Einheiten enthalten, eben so viel als das Factum.

S. 198. Und so ist es allezeit. Die Zahl der Einheiten welche in dem einen Factor nach Wegwerfung der 9 übrig bleibt, durch den andern Factor multipliciret, giebt eine Zahl, in welcher nach ebenmäßigem Abzug aller 9 eben so viel übrig bleibt, als in dem Producte, nach dem man aus diesem ebenfalls jede 9 Einheiten von welcherley Ordnung sie auch seyn mögen, weggelassen. Und wenn demnach eine Zahl durch eine andere multipliciret worden, und man findet nach dieser angegebenen Wegwerfung der 9 des einen Factors, daß der Ueberschuß, durch den andern Factor multipliciret, eine Zahl heraus bringe, deren Ueberschuß über die 9 eben so groß ist, als der Ueberschuß über die 9 des Products, so ist zu glauben, daß das Product richtig sey. Ich sage, es ist zu glauben. Denn es kan aus dieser Probe die Richtigkeit des Products eben so wenig mit einer vollkommenen Gewisheit erhellen, als wenig bey der Addition die Richtigkeit der Summe aus eben der Probe ohne Widerspruch erhellet. Doch muß man auch

I₄ dieses sagen, daß sich hier nicht so leicht ein Fehler einschleichen werde als bey der Addition.

§. 199. Wie nun diese Probe geschickt anzuwenden sey, wird nachstehendes Exempel weisen.

A	3597348	3
	974	
B	14389392	3
C	25181436	3
D	32376132	0
E	3503816952	6

Nachdem man von der Zahl bey A, welche sollte multipliciret werden, alle 9 weggelassen, welche in den Ziffern derselben enthalten sind, ist die darneben stehende 3 übrig geblieben. Die Zahl bey A durch 4 multipliciret, giebt das Product B. Wenn man von diesem B wieder Neune so oft wegläßt als man kan, bleiben die darneben stehende 3 übrig, und wenn die bey A stehende 3 ebenfalls durch 4 multipliciret wird, kommt 12, so hier eben so viel ist als 3. Dieses ist ein Zeichen, richtig sey. Wiederum wenn A durch 7 multipliciret

Der Ueberschuß der Ziffer dieser Zahl über 9 ist 12, 3. Multipliciret man aber den Ueberschuß bey A so kommt 21, das ist wieder 3, zum Zeichen, daß richtig sey. In der Reihe D ist der Ueberschuß 0,

und 3 durch 9 multipliciret giebt 27, das ist ebenfalls 9 oder 0. Die Summe der also gefundenen Zahlen 3, 3, 0 ist 6, so viel muß auch in der Summe der Producte B + C + D, oder in dem gesuchten Product E übrig bleiben, wenn die Rechnung richtig ist, wie dieses in dem Exempel sich ergiebet.

§. 200. Auf diese Art probiret man jeden Absatz bey der Multiplication, ehe man weiter gehet, und man versichert sich, so viel geschehen kan, daß in dem vorhergehenden kein Fehler zurück geblieben, welcher in das folgende einen Einfluß haben könnte. Auf eben die Art kan untersucht werden, ob die Producte, der man bey der Division benöthigt ist, richtig gefunden worden, so bald man sie gemacht hat, und ehe man sie anwendet, und auf diese Producte kommt es hauptsächlich an, denn die bey der Division ferner vorzunehmende Subtraction braucht selten einer Probe; findet man eine nöthig, so ist schon gezeigt, §. 66. daß keine bequemer und richtiger sey, als die Addition.

Zwey-

Zweiter Abschnitt.

II.
Abschnitt.

Von der Berechnung der Brüche.

Gründe der Bruchrechnung.

S. 1.

Summehro können wir uns zu den gebrochenen Zahlen wenden, und die Rechnungsarten welche mit denselben vorzunehmen sind, etwas vollständiger erklären. Es ist verschiedenes von denselben bereits angebracht worden, so sich aus den allgemeynen Gründen, welche wir betrachtet haben, unmittelbar herleiten ließ. Wir haben gesehen, daß die Summe zweyer oder mehrerer Brüche von gleicher Benennung gefunden werde, wenn man ihre Zehler zusammen addiret, den Nenner aber stehen läßt: und daß, den Unterschied zweyer Brüche, welche wieder einerley Benennung haben, zu finden, man nur den kleinern Zehler von dem größern abzuehen, und den Ueberschuß an die Stelle des Zehlers eines Bruchs setzen müsse, dessen Nenner der vorige ist, welcher Bruch der gesuchte Unterschied seyn wird. I, 76. Es ist übrig, daß wir wissen, wie die Addition und Subtraction bey solchen Brüchen zu verrichten sey, welche verschiedene Benennungen haben.

S. 2. Ferner haben wir gewiesen, wie ein jeder Bruch durch eine ganze Zahl zu multipliciren sey, und wir haben zwey Arten dieses zu verrichten angegeben. Entweder multipliciret man den Zehler des Bruchs $\frac{1}{3}$ durch die multiplicirende ganze Zahl 3, und läßt den Nenner stehen: I, 86. oder man dividiret den Nenner des Bruchs durch die gedachte Zahl, durch welche man den Bruch multipliciren soll, und verändert den Zehler nicht. I, 146. Die auf die Art heraus gebrachte Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3}$ sind das Product, welches man suchte: sie sind einander gleich, und es bedeutet einer eben so viel als der andere, wenn nemlich die ganze Einheit, auf welche sie sich beziehen, einerley ist, wie dieses bey allen gleichen Zahlen zum Grunde gesetzt werden muß.

S. 3. Eben so haben wir auch zwey Arten gesehen, nach welchen ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiret werden kan. Man di-

vidi-

vidi-

II. **Abchnitt.** dividirt entweder den Zehler des Bruchs $\frac{1}{2}$ durch die Zahl 3, durch welche der Bruch dividirt werden soll, und läßt den Nenner unverändert, I, 141. oder man multiplicirt den Nenner desselben durch eben die Zahl 3. I, 143. Die dergestalt heraus gebrachte Brüche $\frac{1}{6}$, oder $\frac{1}{3}$ sind der Quotient welchen man suchte. Alles dieses ist gezeigt worden, und wir können hier voraus setzen, daß es bekannt sey, und uns zu dem wenden, so noch rückständig ist, wie man eine jede ganze oder gebrochene Zahl durch einen Bruch multipliciren oder dividiren soll.

§. 4. Der Grundsatz auf welchen wir hiebey bauen werden, ist ebenfalls bereits angemerkt worden, daß nemlich, wenn man eine Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, durch eine andere ganze Zahl erst multiplicirt, und hernach dividirt, oder erst dividirt und hernach multiplicirt, die Zahl dadurch nicht verändert werde. I, 137. Es ist derselbe auch in dem Fall richtig, wenn man eine Zahl durch einen Bruch multiplicirt, und hernach das Product durch eben den Bruch dividirt, oder wenn man sie erst durch den Bruch dividirt und hernach multiplicirt. Die Zahl wird dadurch eben so wenig verändert, als wenn man diese Rechnungsarten mit einer ganzen Zahl verrichtet. Allein wir haben von der Multiplication und Division vermittelst gebrochener Zahlen noch keinen vollkommen deutlichen Begriff beygebracht, und aus der Ursach uns enthalten, den Satz in seinem vollkommenen Inbegriff vorzutragen. Er ist übrigens an sich selbst klar. Denn was ist deutlicher, als daß wenn ich ein Ding verdoppelt oder dreyfach nehme, und, was dergestalt heraus gebracht worden, wieder in zwey oder drey gleiche Theile theile, ein solcher Theil dasjenige seyn müsse, so ich vorher verdoppelt oder drey mal grösser gemacht. Eben so klar ist es, daß wenn man ein Ding erstlich in drey oder fünf gleiche Theile theilet, dieser Theile aber hernach drey oder fünfe nimmt, man dasjenige Ganze wieder erhalte, so im Anfang da gewesen.

§. 5. Man setze diese Begriffe zusammen, und wende sie auf die Brüche an. Es sey der Bruch $\frac{1}{2}$ gegeben. Man multiplicire ihn durch 2, welches man thun kan, indem man den Zehler mit 2 multiplicirt, wodurch $\frac{2}{2}$ kommt, oder indem man den Nenner durch 2 dividirt, wodurch man $\frac{1}{1}$ erhält. Jedweden dieser Brüche dividirt man wieder durch 2, so wird aus dem ersten welcher $\frac{1}{2}$ war, wenn man die Division des Bruchs durch die Division des Zehlers verrichtet $\frac{1}{2}$, und aus dem zweyten wird, wenn man nach eben der Art di-

vidi-

dividiret, $\frac{1}{2}$. Bedientet man sich aber zur Division der Brüche der Multiplication des Nenners; so wird aus dem erstern Product $\frac{1}{2}$ nunmehr $\frac{1}{4}$, und aus dem zweyten $\frac{1}{2}$ wird $\frac{1}{2}$. Diese vier Brüche demnach $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ bedeuten einerley, II, 4. allein der erste und der letzte ist von dem gegebenen gar nicht unterschieden, wohl aber sind der zweyte und der dritte durch ganz andere Zahlen ausgedrückt.

§. 6. Es entsunde der zweyte dieser Brüche $\frac{1}{2}$ aus der Division des Zehlers und des Nenners des zuerst gegebenen Bruchs $\frac{1}{2}$ durch die ganze Zahl 2, und der dritte $\frac{1}{4}$ kam durch die Multiplication des Zehlers und des Nenners eben desselben Bruchs $\frac{1}{2}$, durch eben die Zahl 2. Wenn man demnach den Zehler und den Nenner eines gegebenen Bruchs durch einerley ganze Zahl multipliciret oder dividiret, und die Producte oder die Quotienten vor die Zehler und Nenner neuer Brüche annimt, so haben diese Brüche eben die Bedeutung, welche der gegebene hatte, ob sie zwar grössere Zahlen zu Zehlern und Nennern haben, wenn man sich der Multiplication bedienet, und kleinere, wenn die Division gebraucht worden.

§. 7. Zu grösserer Deutlichkeit haben wir einerley Stück der ganzen — Linie AB drey mal vorgestellt, welches die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ ausdrücken. Dieses Stück ist AC: in der ersten Linie ist AC $\frac{1}{2}$, in der zweyten $\frac{1}{2}$, in der dritten $\frac{1}{2}$. Und man siehet, daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als $\frac{1}{2}$, weil in dem letztern Bruch die Theile zwar nur halb so groß genommen worden sind, als in dem erstern, derselben aber auch im Gegentheil zwey mal mehr angenommen worden, das Stück AC auszumachen. Eben so sind die Theile des Bruchs $\frac{1}{2}$ wieder zwey mal grösser als die Theile des Bruchs $\frac{1}{2}$, aber im Gegentheil hat man derer bey dem letzten Bruch $\frac{1}{2}$, zwey mal so viel als bey dem ersten $\frac{1}{2}$, durch welche Verminderung der Grösse der Theile, und Vermehrung der Zahl derselben, eben erhalten worden, daß man einmal so viel als das andere bekommen hat, nemlich AC. I, 14.

F. 18.

Das Aufheben der Brüche.

§. 8. Nun kan das so genannte Aufheben der Brüche, da man nemlich eben das Stück des Ganzen, so durch eine gebrochene Zahl ausgedrückt worden, durch eine andere bezeichnen soll, welche kleinere Zahlen zum Zehler und Nenner hat, nicht die geringste Schwierigkeit mehr haben. Es sey der Bruch $\frac{1}{2}$ durch kleinere Zahlen auszu-
drücken. Man suche eine Zahl welche den Zehler 9 und den Nenner

II. **Abchnitt.** ner 12 zugleich genau theilet. Diese ist hier 3. Man dividire so dann eben besagte zwei Zahlen durch diese gefundene 3, und setze den Quotienten von der Division des Zehlers, welcher 3 ist, zum Zehler, und den Quotienten von der Division des Nenners 4 zum Nenner des neuen Bruchs $\frac{1}{2}$, welcher dem gegebenen $\frac{1}{2}$ gleich seyn, II, 6. und weil die Division gebraucht worden, aus kleinen Zahlen bestehen wird.

§. 9. Es werden solche Zahlen genommen, welche den Zehler und den Nenner ohne neue Brüche theilen, nicht als ob man nothwendig dergleichen wählen müste, sondern weil auf diese Art Brüche kommen, deren Nenner und Zehler ganze Zahlen sind, welche sich am leichtesten übersehen lassen. Denn daß man einen Bruch leichter übersehen, und von seinem Werth sich einen vollkommenen Begriff machen möge, ist der Zweck der Arbeit, welche wir hier lehren, weil man die Größe des Bruchs leichter einsieht, wenn die Zahlen, durch welche er ausgedrückt wird, klein, als wenn sie groß sind. Wenn man dieses nicht achtet, oder wenn sich besondere Umstände hervor thun, kan man auch den Zehler und Nenner durch solche Zahlen theilen, welche bey einer oder der andern dieser Zahlen einen neuen Bruch lassen. Will man in dem vorigen Exempel zur Theilung die Zahl 4 gebrauchen, so wird der mit kleinern Zahlen geschriebene Bruch $\frac{2\frac{1}{2}}{3}$, und dieser bedeutet, wie bereits I, 142. angezeigt worden ist, daß man die ganze Einheit in drey gleiche Theile theilen müsse, und solcher Theile 2, und über dieses noch $\frac{1}{2}$ eines solchen Theils annehmen, um dasjenige zu erhalten, so der Bruch $\frac{2\frac{1}{2}}{3}$ ausdrückt.

§. 10. Eben so kan man es auch bey dem Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ machen; man kan den Nenner und den Zehler durch 4 dividiren, kommt der Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$, welcher anzeigt, daß man die Einheit so theilen müsse, daß in dieselbe zwey gleiche Theile, und über das $\frac{1}{2}$ eines solchen Theils, kommen, und daß eins von diesen Theilen dasjenige sey, so die gebrochene Zahl ausdrückt. Die Linie AB, in der 19 Figur, welche die Einheit seyn sol, ist so getheilet. AC ist ein Theil, CD = AC der andere, und DB ist $\frac{1}{2}$ von AC. Demnach ist AC eins von den Theilen, deren zwey und $\frac{1}{2}$ auf AB gehen, das ist, AC ist derjenige Theil der ganzen AB, welchen der Bruch $\frac{1}{2\frac{1}{2}}$ ausdrückt. Man kan sich also solcher Zahlen, welche den Zehler oder den Nenner nicht genau theilen,

Fig. 19.

len, bedienen, aber man muß sich derselben nicht anders bedienen, als wenn man Bequemlichkeit davon hat. Dieses aber kommt auf die Einsicht eines jeden an, und man kan davon keine allgemeine Regeln geben. II. Abschnitt.

§. 11. Indessen siehet man auch hieraus, wie man die gebrochene Zahlen aus den Nennern und Zehler der Brüche bringen könne, wenn welche in denselben vorkommen. Man hat zu dem Ende nichts zu thun, als so wohl den Nenner als den Zehler des Bruchs durch den Nenner desjenigen Bruchs zu multipliciren, welcher in demselben vorkommt. Es sey, zum Exempel, aus dem Nenner des Bruchs $\frac{2}{3}$ der Bruch $\frac{2}{3}$ wegzuschaffen: so multiplicire ich so wohl den Zehler desselben $2 \cdot \frac{2}{3}$ durch 3, den Nenner des Bruchs $\frac{2}{3}$, welcher in dem Zehler vorkommt; als auch den Nenner 3, dadurch kommt vor den Zehler 8, I, 147. und vor den Nenner 15, und der Bruch, welcher dem gegebenen $\frac{2}{3}$ gleich ist, ist $\frac{8}{15}$; und dieses fließet auch unmittelbar aus den gegebenen Grundsätzen. II, 6.

§. 12. Eben so wird auch der Bruch aus dem Nenner des Bruchs $\frac{2}{3}$ weggebracht. Ich multiplicire so wohl den Zehler 2 als den Nenner $3 \cdot \frac{2}{3}$ dieses Bruchs durch 5, den Nenner, welcher in dem Bruch $\frac{2}{3}$ befindlich ist. Da denn durch die Multiplication des Zehlers 10 und durch die Multiplication des Nenners $15 + 4$, das ist 19 kommt. Demnach ist der Bruch, welcher dem gegebenen $\frac{2}{3}$ gleich ist, $\frac{10}{19}$. Sollten so wohl in dem Zehler als in dem Nenner dergleichen Brüche vorkommen, wie zwar sehr selten geschieht: so würde man nach dieser Anweisung erst denjenigen, welcher in dem Zehler enthalten ist, und so dann auch denjenigen, welcher sich in dem Nenner befindet, fortschaffen müssen. Bloß nachstehendes Exempel kan weisen, wie dieses geschehe. Der gegebene Bruch sey $\frac{2}{7}$. Multipliciret man nun

die beyden Glieder desselben durch 3, so kommt der Bruch $\frac{6}{21}$, welcher dem vorigen gleich ist, und aus welchem der noch rückständige Bruch $\frac{2}{7}$ weggebracht werden kan, wenn man die Glieder desselben mit 5 multipliciret, wodurch man den verlangten Bruch $\frac{10}{105}$ erhält.

II.
Abschnitt.

§. 13. Was aber diejenige Zahlen anlangt, welche die Zehler und Nenner der Brüche genau theilen, so wird hernach gewiesen werden, wie sie zu finden sind; sie fallen einem aber auch ohne diesen Reguln meistens ohne sonderliche Schwierigkeit bey. Man thut am besten, wenn man unter allen gemeinschaftlichen Theilern des Zehlers und Nenners eines Bruchs den größten nimt, denn dadurch bekommt man gleich Anfangs die kleinsten Zahlen, durch welche ein Bruch ausgedrückt werden kan. Man kan aber auch durch eine wiederholte Division endlich zu der kleinsten Benennung gelangen, wenn sich der Zehler und der Nenner des Bruchs durch mehr als eine Zahl genau dividiren lassen. Also wird $\frac{1}{2}$, wenn man den Zehler und den Nenner durch 3 dividiret, mit kleinern Zahlen ausgedrückt in dem Bruch $\frac{1}{6}$, wenn man hier nochmals den Zehler und Nenner durch 2 theilet, bekommt man einen Bruch, der eben so viel als der vorige bedeutet, und noch kleinere Zahlen hat $\frac{1}{12}$, und dessen seine Zahlen wieder durch 2 dividiret, geben die allerkleinste Benennung, welche eben das ausdrücken kan, so in dem Bruch $\frac{1}{12}$ enthalten ist, man bekommt nemlich durch diese Division $\frac{1}{24}$, welches man auf einmal erhalten hätte, wenn man gleich Anfangs den Zehler und den Nenner des gegebenen Bruchs durch 12 getheilet hätte.

§. 14. Dieses wäre überflüssig genug dasjenige einzusehen, welches wir gegenwärtig insonderheit zu zeigen vorgenommen, wie man nemlich einen jeden Bruch zu kleinern Benennungen bringen könne. Allein einige Anwendungen, welche wir von dieser Sache ins künftige machen werden, erfordern, daß wir uns noch etwas wenig aufhalten, und bemerken, daß eben durch diese Regul sich ein unächter Bruch in ganze Zahlen verwandeln lasse, so oft dieses geschehen kan. Denn $\frac{1}{2}$ ist nichts anders als drey ganze Einheiten, 1, 34. und so viel als 3; $\frac{1}{4}$ ist so viel als 5, und überhaupt ein jeder Bruch dessen Nenner 1, ist einer ganzen Zahl, nemlich seinem eigenen Zehler, gleich.

§. 15. Demnach heißet einen unächten Bruch auf den Nenner 1 bringen, oder an die Stelle eines Bruchs einen andern schaffen, dessen Nenner 1 ist, so viel, als eine ganze Zahl finden, welche dem unächten Bruch gleich ist. Denn mit ächten Brüchen gehet dieses niemals an. Zum Exempel, wenn man in dem Bruch $\frac{1}{2}$ den Zehler und den Nenner durch 3 dividiret, so bekommt man $\frac{1}{6}$, welches so viel ist als $\frac{1}{3}$, und auch so viel als 2, und man hat an die Stelle des unächten Bruchs eine ganze Zahl gefunden, welche ihm gleich ist.

§. 16. Man

S. 16. Man siehet, daß dieses allzeit geschiehet, wenn man zum II.
gemeinschaftlichen Theiler des Zehlers und des Nenners den Nenner Abschnitt.
selbst annimmt, und daß es auf eine andere Art nicht geschehen könne,
und daß demnach ein Bruch dessen Zehler sich durch den Nenner nicht
genau theilen läßt, sich nicht in eine ganze Zahl verwandeln lasse, welche
keinen Bruch bey sich hätte. So kan man die Zahl $\frac{2}{7}$ in die ganze Zahl
 $\frac{2}{7} = 3$ verwandeln, wenn man den Zehler so wohl als den Nenner durch
den Nenner 7 theilet, aber $\frac{2}{7}$ läßt sich nicht in eine dergleichen Zahl ver-
wandeln, sondern man bekommt, wenn man die Regul hier anwen-
den wil, nichts anders als $\frac{32}{7}$ das ist $3\frac{2}{7}$ von der Einheit. Ein sehr
geringes Nachdenken wird uns beybringen, daß diese Anweisung ei-
nen unächten Bruch in eine ganze Zahl zu verwandeln eben die sey,
welche vorher gezeigt worden ist, I, 140.

S. 17. Wir schließen hieraus: wenn ein Bruch sich nicht zu klei-
nern Benennungen bringen läßt, so ist es auch nicht möglich, daß er
einer ganzen Zahl gleich sey. Denn wenn ein Bruch einer ganzen Zahl
gleich seyn sol, so muß er sich auf die allerkleinste Benennung, welche
1 ist, bringen lassen. Kan aber ein Bruch gar nicht zu kleinerer Be-
nennung gebracht werden, so läßt er sich auch noch viel weniger auf
die kleinste Benennung 1 bringen. Kehret man aber dieses um, so sie-
het man auch, daß hinwiederum eine jede ganze Zahl in einen Bruch
von einer gegebenen Benennung verwandelt werde, wenn man die gan-
ze Zahl durch den gegebenen Nenner multipliciret, und das Product
zu dem Zehler des Bruchs annimmt. Die Zahl 5 zum Exempel ist so
viel als $\frac{5 \times 3}{3} = \frac{15}{3}$. Und eben so kan man aus $5\frac{2}{7}$, die Brüche $5\frac{2}{7} + \frac{2}{7}$,
und aus $5 - \frac{2}{7}$, $5\frac{2}{7} - \frac{2}{7}$ machen.

Zween Brüche zu einerley Benennung zu bringen.

S. 18. Wenn man zwey Brüche mit einander vergleichen und sa-
gen sol, welcher unter beyden grösser oder kleiner sey als der andere, so
gebet dieses zum öftern schwer an, wenn sie verschiedene Nenner haben,
wie man befinden wird, wenn man sich vornimt zu sagen, welcher von
den beyden Brüchen $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{7}$ grösser oder kleiner sey, als der ande-
re. Vergleichen Brüche kan man auch nicht wohl zusammen setzen,
oder einen derselben von dem andern abziehen, so lang die Nenner
verschieden sind. Wenigstens kan dieses nach der bisherigen Anwei-
fung

II. Abschn. sung keines weges geschehen. Denn wenn die Nenner verschieden sind, sind die Theile deren Anzahl die Zehler ausdrücken, von verschiedener Grösse, und lassen sich, so lang man sie als solche Einheiten betrachtet, nicht zusammen setzen, und läßt sich eine Zahl derselben von einer andern nicht wegnehmen. I, 68. Ich kan zwar leicht sagen wie viel 5 und 11 ist, nemlich 16, aber wie viel ist $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ zusammen gesetzt, viel leicht $\frac{5}{6}$? aber warum nicht lieber $\frac{1}{2}$, oder vielmehr keines von beyden? Denn in der That kan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ eben so wenig $\frac{5}{6}$ oder $\frac{1}{2}$ seyn, als 5 Thaler und 11 Gulden, 16 Thaler oder 16 Gulden ausmachen können.

§. 19. Es ist demnach nicht allein von grosser Bequemlichkeit, sondern auch nothwendig, daß wir zwey Brüche zu gleichen Benennungen zu bringen, das ist, an die Stelle zweyer Brüche zwey andere zu schaffen wissen, welche jenen beyden gleich sind, und deren Nenner Zahlen von einerley Grösse sind. Die Sache ist leicht. Man multipliciret so wohl den Zehler als den Nenner eines jeden der gegebenen Brüche durch den Nenner des andern. Oder, damit man sich desto weniger verwirre, so setzet man zu jedem der gegebenen Brüche den Nenner des andern, und multipliciret so dann so wohl den Zehler als den Nenner desselben Bruchs durch die Zahl, die man ihm beygesetzt hat. Zum Exempel: ich sol zwey Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ unter einerley Benennung bringen: so multiplicire ich den Zehler so wohl als den Nenner des ersten Bruchs $\frac{1}{2}$ durch 3, den Nenner des andern Bruchs, es kommt dadurch $\frac{3}{6}$: und wiederum multiplicire ich so wohl den Zehler als den Nenner des andern Bruchs $\frac{1}{3}$ durch den Nenner des ersten 2, wodurch $\frac{2}{6}$ erhalten wird. Diese zwey Brüche sind die gesuchten. Sie sind den gegebenen zweyen gleich, nemlich $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, und $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, sie haben aber auch einerley Benennung. Der Grund dieser Arbeit ist ohne Schwierigkeit einzusehen.

§. 20. Die Brüche nemlich, welche man suchte, solten erstlich den gegebenen Brüchen gleich seyn. Es ist leicht einzusehen, daß diejenige Brüche, welche nach unserer Anweisung gemacht worden, diese Eigenschaft haben. $\frac{3}{6}$ ist dem Bruch $\frac{1}{2}$ gleich, weil jener aus diesem entstanden ist, indem so wohl der Zehler desselben als auch der Nenner durch die Zahl 3 multipliciret worden. Aus eben dem Grund ist auch der an statt des zweyten Bruchs $\frac{2}{6}$ gefundene neue $\frac{1}{3}$ demselben gleich, weil er ebenfals entstanden ist, indem man so wohl den Zehler als den

vereinigten.

§. 22. Man kan aber auch nunmehr einen Bruch finden, welcher so groß ist als die Summe der zwey gegebenen Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$, denn weil $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, so muß die Summe der zwey ersten Brüche

II. **Beispiel.** Daß $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ nothwendig so groß seyn, als die Summe der zweyen letztern $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, denn wenn man gleiches zu gleichen hinzu thut, können unmöglich ungleiche Summen kommen. Diese letztere Summe aber kan man durch einen einzigen Bruch ausdrücken, welcher entsteht, indem man die zwey Zehler derselben zusammen setzt, und den Nenner stehen läßt, dergestalt $\frac{1+1}{2 \cdot 3}$, oder $\frac{2}{6}$, wie oben L. 76 gelehret worden. Dieser Bruch $\frac{2}{6}$ ist also die Summe der gegebenen Brüche $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Und so verfähret man allezeit, wenn man zwey Brüche, welche verschiedene Benennungen haben, addiren, und ihre Summe durch einen einzigen Bruch ausdrücken sol. Man bringt sie erstlich unter einerley Benennung, und addiret so dann die also gefundene Brüche. Man siehet leicht, daß hieraus folge $5\frac{1}{2}$ sey so viel als $\frac{11}{2} = 5\frac{1}{2}$, L. 140: und daß man überhaupt nach diesem Exempel jede Zahl, welche aus einer ganzen und aus einem Bruch bestehet, in einen unächten Bruch verwandeln könne.

S. 23. Eben dieses ist auch von der Subtraction zu sagen. Man sol den Kleinern dieser Brüche $\frac{1}{3}$ von dem größern $\frac{1}{2}$ wegnehmen: so bringe man sie wieder unter einerley Benennung, und schreibe an statt $\frac{1}{2}$ nach der gegebenen Anweisung $\frac{1}{2}$, und an statt $\frac{1}{3}$ setze man $\frac{1}{3}$, und ziehe so dann den ersten dieser Brüche von dem letztern ab: welches, weil sie eine Benennung haben, gar leicht geschehen kan, L. 76. indem man nemlich nur den Kleinern Zehler von dem größern wegnimt, und den Nenner stehen läßt. Es wird, wenn dieses geschieht, der Unterschied gefunden, welcher ist $\frac{1-1}{2 \cdot 3}$, oder $\frac{0}{6}$.

S. 24. Man schliesset hieraus leicht, daß der Unterschied von 5 und $\frac{1}{2}$ sey $5 - \frac{1}{2} = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$. Doch kan man dieses besser folgender massen finden, wenn nur der Bruch, welcher abgezogen werden sol, acht ist. $5 - \frac{1}{2}$ ist so viel als $4 + 1 - \frac{1}{2}$. Nun ist $1 = \frac{2}{2}$, also $4 + 1 - \frac{1}{2} = 4 + \frac{2}{2} - \frac{1}{2}$, welches wieder, wie leicht zu sehen, so viel ist als $4 + \frac{2-1}{2}$, oder $4\frac{1}{2}$. Man verwandele nemlich nur eine Einheit der ganzen Zahl in einen Bruch, ziehe von diesem Bruch den achten Bruch ab, welcher von der ganzen abgezogen werden sol, und setze das Uebrigbleibsel zu der um 1 verminderten ganzen Zahl.

S. 25. Man braucht auch nichts mehrers, als daß man zwey Brüche unter einerley Benennung zu bringen wißt, so viele Brüche von

von verschiedenen Benennungen als man wil, zu vereinigen; das ist, 11.
Diejenigen unter verschiedenen gegebenen Brüchen zusammen zu addi- Absolut
ren, welche zu addiren sind, und diejenige von der Summe abzuzie-
hen, welche man abziehen sol. Zum Exempel, man sol einen Bruch
schaffen, welcher so viel beträgt als die nachstehende Reihe von Brü-
chen, nach Anweisung der ihnen vorgesetzten Zeichen + und —

diese Brüche un-
und demnach
viel als $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$,
vereinigen, die
ist $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, und
 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

diese Brüche aber
 $\frac{1}{2}$ und demnach
verfähret man
vereinigen. Wir
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, der letzte
Nan bringet wie-
n sie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ und
em erstern abzie-
der Bruch, wel-
ichen verknüpft
ferner zu kleineren
und den Nenner
diese Benen-

ung nachstehen-

der Brüche :

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$. Die erstern zwey unter einerley Benennung
sind $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, und betragen also zusammen $-\frac{1}{6}$. Dieser Bruch
mit dem dritten der gegebenen $-\frac{1}{4}$ wird unter einerley Benennung
 $-\frac{1}{6} - \frac{1}{4}$, und folgendes geben beyde zusammen $-\frac{5}{12}$. Und wenn
man diesen Bruch mit dem vierten der gegebenen $+\frac{1}{5}$ unter einerley Be-
nennung bringet, so bekommt man $-\frac{5}{12} + \frac{1}{5}$, welches so viel ist
als $-\frac{19}{60}$. Nemlich die Summe der Brüche vor welchen das Zei-
chen — steht ist hier größer als die Summe der Brüche welche mit +
bezeichnet sind, es ist also der Ueberschuß von der Art der erstern. L. 72.

R 2

S. 27. Der

II. §. 27. Dergestalt ist dasjenige, so wir angegeben, sichtlich, daß
 Abkürz. nemlich, um verschiedene Brüche, wie viel ihrer auch an der Zahl
 seyn mögen, zu vereinigen, man nichts weiter nöthig habe, als daß
 man wisse, wie zwey Brüche unter einerley Benennung zu bringen sind,
 und es geschieht auch auf die angewiesene Art diese Vereinigung fast
 am allerschwindelsten und leichtesten, insonderheit wenn man in Acht
 nimmt, daß, so bald man einen Bruch durch die Addition oder Sub-
 traction zweyer andern gefunden, man denselben erst zu den kleinsten
 Benennungen bringe, ehe man weiter fortgehet. Denn auf die Art
 bekommt man niemals mit überflüssig grossen Zahlen zu thun. Wir
 halten vor unnöthig, diese leichte Anmerkung mit einem Exempel zu er-
 läutern.

Drey oder mehrere Brüche unter eine Benennung zu bringen.

§. 28. Doch ob zwar zum Behuf der Addition und Subtraction
 nicht notwendig erfordert wird, daß man mehr als zwey Brüche
 unter einerley Benennung zu bringen wisse, so kan doch dieses bey an-
 dern Rechnungen zuweilen erfordert werden. Es ist aber auch diese
 Sache nicht sonderlich schwer einzusehen. Es seyn die Brüche
 $\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ alle unter einerley Benennung zu bringen. So multiplicire
 man erstlich alle Nenner durch einander, ausser dem Nenner des ersten
 Bruchs, und setze das Product, um sich desto weniger zu verwirren,
 und den Grund dieser Arbeit desto deutlicher einzusehen, dem ersten
 Bruch an die Seite, nemlich $4 \times 7 \times 9$ ist $= 252$, und dieses Factum
 wird neben den ersten Bruch dergestalt geschrieben $252) \frac{2}{3}$. Ebenes
 massen multiplicire man alle Nenner aller Brüche ausser dem zweyten
 in einander, und setze das Product aus denselben $3 \times 7 \times 9$, das ist 189
 neben dem zweyten Bruch dergestalt 189) $\frac{1}{4}$. Auch multiplicire man
 alle Nenner ausser dem Nenner des dritten Bruchs, und setze das Pro-
 duct $3 \times 4 \times 9$ oder 108 neben diesem dritten Bruch 108) $\frac{1}{5}$. Und end-
 lich mache man das Product aus den Nennern aller Brüche ausser dem
 letzten, welches ist $3 \times 4 \times 7$, oder 84, und setze dieses Product dem letz-
 ten Bruch zur Seite: 84) $\frac{1}{6}$. Dieses alles geschehen, ist
 nichts übrig, als daß man
 neben ihm gesetzte Product

§. 29. Es wird dadur-
 den $\frac{4}{11}$, und es ist klar,

des ersten Bruchs $\frac{2}{3}$ gefun-
 den dem ersten $\frac{1}{3}$ gleich sey.
 Was

Was aber seinen Nenner anlangt, so ist derselbe ein Factum aus allen Nennern aller gegebenen Brüche. Denn die demselben beigesetzte Zahl 252 war $4 \times 7 \times 9$, ein Factum aus allen Nennern aller Brüche außer dem ersten. Und indem man den Nenner des Bruchs $\frac{1}{252}$ heraus gebracht, hat man dieses Factum ferner durch den Nenner des ersten Bruchs multipliciret, und ist demnach dieser Nenner allerdings

wird durch eine Gleichheit mit dem Nenner kommt, $\frac{1}{252}$ aus allen Nennern $\frac{1}{252}$ multiplicirt, an die Stelle $\frac{1}{252}$ das Factum $\frac{1}{252}$ der Brüche. Da auch multipliciren nicht von ohnehin dem Nenner dem Bruch, welchen man findet, wenn beigesetzte Zahlen er kommt, wenn ein Factum ist Bruchs, $3 \times 4 \times 9$, und wird also vorigen Nenner Brüche waren, Und mit dem gefunden, hat es

in einen einzigen übrigen ins be Bruch gefunden alle abgiebet. einerley Nennerch Anleitung der

II.
Vorfamm.

Multiplication durch Brüche.

§. 31. Nun haben wir noch die Multiplication und die Division ganzer oder gebrochener Zahlen durch Brüche vor uns, und es ist zu zeigen, wie eine jede gegebene Zahl durch einen Bruch zu multipliciren und zu dividiren sey. Eine genaue Aufmerksamkeit auf den allgemeinen Begriff der Multiplication, kan uns die Sache gar leicht machen, denn es ist hier in der That nur dasjenige anzuwenden, so schon zum öftern wiederholt worden.

§. 32. Gesezt, wir sollten eine Zahl 4 oder 7 durch den Bruch $\frac{1}{2}$ multipliciren, so wird erfordert, daß man aus der Zahl 4 oder 7 eine neue Zahl dergestalt mache, wie der multiplicirende Bruch $\frac{1}{2}$ aus der Einheit entstehen kan. I, 79. Es entstehet aber dieser Bruch aus der Einheit, indem man sie in zwey gleiche Theile theilet: I, 82. also wird auch die gegebene Zahl 4 oder 7 in zwey gleiche Theile zu theilen seyn, um das Product zu erhalten; und die Multiplication der Zahl 4 oder 7 durch den Bruch $\frac{1}{2}$ erfordert eigentlich eine Division dieser Zahl durch den Nenner des gegebenen Bruchs 2. Auf eben die Art schließet man, daß eine ganze oder gebrochene Zahl durch den Bruch $\frac{1}{3}$ multipliciren nichts anders heiße, als dieselbe Zahl durch 3 dividiren, und so ferner. Und daß überhaupt die Multiplication einer Zahl, sie mag ganz oder gebrochen seyn, durch einen Bruch, dessen Zehler 1 ist, nichts anders erfordere, als daß man die gedachte Zahl durch den Nenner dieses Bruchs dividire.

§. 33. Nun aber kan man diese Division durch den Nenner des multiplicirenden Bruchs auf zweyerley Art verrichten, weil dieser Nenner eine ganze Zahl ist. Man dividire durch denselben den Zehler des Bruchs, welcher dividirt werden sol, oder man multiplicire seinen Nenner, so erlanget man auf beyde Arten den Quotienten. II, 3. Demnach wird die Multiplication eines Bruchs durch einen andern dessen Zehler 1 ist, durch eben diese zwey Rechnungsarten verrichtet. Und es ist das Product aus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, oder $\frac{1}{4}$, und 4 durch $\frac{1}{2}$ multiplicirt giebt 2 oder $\frac{4}{2}$. Denn man kan sich 4 als einen Bruch dessen Nenner 1 ist, vorstellen, und auf diesen Bruch $\frac{1}{2}$, was eben gesagt worden, anwenden.

§. 34. Und

S. 34. Und zwar hat die Multiplication durch einen dergleichen Bruch, welche vermittelst der Division durch den Nenner verrichtet wird, und da man zum Exempel, durch die Multiplication der Zahl 4 durch $\frac{1}{2}$ das Product $\frac{4}{2}$ heraus bringet, so oft sie sich geschieht

II.
als Product in Kleinheit durch die Multiplikation nicht bey allen Zahlen nicht überall hat das Factum $\frac{4}{2}$ man die Multiplikation. Hat man aber $\frac{4}{2}$ zu dividiren, so equen den Bruch $\frac{4}{2}$ besser, wenn man $\frac{4}{2}$ kommt. Und wenn will, so sich in $\frac{4}{2}$ Um einen jezt ist, zu multipliciren und lasse den Zähler als auch die Nenner eben das hinaus,

$$\frac{4 \times 5}{2 \times 2} = \frac{20}{4}$$

lassen, deren Zähler Producte, wenn man $\frac{20}{4}$ dürfen nur heraus zu bringen. multipliciren sey: so in drey gleiche Theile. Eben so muß das Product aus 4 heile theilen, oder dieses Drittel des

Bruchs $\frac{4}{2}$ zwey mal nehmen oder durch 2 multipliciren. Dieses ist alles, so wir hier zu thun haben.

S. 36. Und auf diese Art verfähret man in allen Fällen. Eine jede Zahl wird durch einen Bruch multipliciret, von was Art dieser auch

II. auch seyn mag, wenn man sie durch den Nenner des Bruchs dividiret und durch dessen Zehler multipliciret. Dieses kan auf vielerley Art geschehen wie öfters wiederhohlet worden, II. 2, 3. und es ist im Grunde eins, wie man diese Multiplication und Division verrichte. Wir stellen uns hier wieder die ganze Zahlen als Brüche vor, deren Nenner die Einheit ist, und setzen, daß ein dergleichen oder ein anderer Bruch $\frac{1}{2}$ durch den Bruch $\frac{1}{3}$ zu multipliciren sey. So ist der Bruch $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{3}$ zu multipliciren, und durch $\frac{1}{5}$ zu dividiren. Man verrichte erstlich die Multiplication durch die Multiplication des Zehlers 10, und die Division durch die Multiplication des Nenners, so wird das Product $\frac{10}{2}$. Man verrichte zweytens die Multiplication noch durch die Multiplication des Zehlers, die Division aber verrichte man nunmehr durch die Division des Zehlers, so wird das Product $\frac{10}{2}$. Man verrichte drittens die Multiplication durch die Division des Nenners, und die Division durch die Division des Zehlers, so entsteht nunmehr das Product $\frac{10}{2}$, und endlich verrichte man die Multiplication durch die Division des Nenners, und die Division durch die Multiplication desselben, so kommt $\frac{10}{2}$, welches ebenfalls das richtige Factum ist. Und es sind in der That die dergestalt gefundene vier Brüche $\frac{10}{2}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{10}{2}$, $\frac{10}{2}$ dem Werthe nach gar nicht von einander verschieden, sondern sie bedeuten einerley, wie man leicht sehen kan, wenn man den ersten durch die Division seiner Zahlen, des Zehlers und Nenners, durch 15; den zweyten durch eine gleichmäßige Division durch die Zahl 3, und den vierten vermittelst der Division seiner Glieder durch 5 auf die kleinste Benennung bringet, welche er haben kan.

§. 37. Wir haben mit Fleiß zwey Brüche erworbet, bey welchen sich alle mögliche Arten eine Zahl durch einen Bruch zu multipliciren, anbringen ließen. Es gehet aber dieses nicht bey allen Brüchen mit der Bequemlichkeit an, weil nicht jede ganze Zahl durch eine jede andere sich ohne Bruch theilen läßt. Soll man den Bruch $\frac{1}{2}$ durch $\frac{1}{3}$ multipliciren, so kan man sich weder bey der Multiplication durch 2, dem Zehler des multiplicirenden Bruchs, noch bey der Division durch 3 dem Nenner desselben, der Division bedienen. Doch läßt sich diese Division des einen oder des andern Gliedes zum öftern verrichten, und man thut wohl, wenn in diesen Fällen man sich derselben bedienet, weil dadurch das Product durch kleinere Zahlen ausgedrückt wird, und man sich die Mühe erspart oder doch erleichtert, den Bruch auf eine kleinere Benennung zu bringen.

§. 38. Will man dem gewöhnlichen Weg folgen, wenn der Bruch $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ zu multipliciren ist, so multipliciret man so wohl die Zehler als die Nenner der zwey gegebenen Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ in einander, der Bruch $\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$ ist das gesuchte Product, und nach dieser Art

II.
abschattet.

Brüche durch Brüche zu multipliciren kan man beständig verfahren, weil sich eine jede ganze Zahl durch eine jede andere dergleichen Zahl multipliciren läßt: und dieses ist ohne Zweifel die Ursach, warum man diese Art, Brüche durch Brüche zu multipliciren zur Regel gemacht hat. Es lassen sich aber die vollständigen Regeln II, 36. eben so leicht einsehen und anwenden als diese.

is dieser Art Brüche durch Brüche zu multipliciren, daß auch bey diesen Zahlen es eifig man sie in einander multiplicire, wenn derselben nach und nach in einander zu multipliciren hier so gar die Zehler mit einander verier, ohne in dem Product etwas zu ändern.

$\frac{2}{3}$ durch den Bruch $\frac{4}{5}$, und das hieraus $\frac{8}{15}$ zu multipliciren, so ist das Product aus

dieses Product kommt, wenn man $\frac{8}{15}$ durch

aus entstehende Factum ferner durch $\frac{4}{5}$, und s dieser Multiplication entstehende Factum

$\frac{1 \times 5 \times 4}{3 \times 5 \times 7}$ mit dem vorigen $\frac{1 \times 5 \times 4}{3 \times 7 \times 5}$ einerley sey, wenn man erweget,

daß die Zehler dieser zwey Brüche einerley sind, weil sie beyde aus einerley Factoren 2, 4, 5 bestehen, und daß mit den Nennern es aus eben dem Grunde eben die Verwandniß habe, welche beyde aus der Multiplication der Zahlen 3, 5, 7 entstanden sind.

Division durch Brüche.

§. 40. Da nun also beständig das Factum zweyer Zahlen, die man als Brüche ansiehet, gefunden wird, wenn man den ersten dieser Brüche durch den Zehler des andern multipliciret, und durch dessen Nenner dividiret, II, 35. so folgt wiederum, daß wenn ein Factum aus zweyen solchen Zahlen, und ein Factor desselben, gegeben ist, man den andern Factor finden könne, wenn man das Factum mit dem

II. dem Zehler des ersten Factors dividiret, und mit seinem Nenner multipliciret. Das Factum $\frac{10}{3}$ ist durch die Multiplication der zwey Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{3}$ entstanden, und es ist der erste dieser Brüche durch den Zehler des zweyten 3 multipliciret, und durch seinen Nenner 5 dividirt worden, dieses Factum $\frac{10}{3}$ zu erhalten. Ist nun also dieses Factum zusamt dem einen Factor $\frac{1}{3}$ gegeben, so kommt allerdings der andere, wenn man das Factum hinwiederum durch den Zehler des gegebenen Factors 3 dividiret, und durch dessen Nenner 5 multipliciret, und es wird in der That, wenn man die Division des Productes $\frac{10}{3}$ durch die Division des Zehlers, und die Multiplication desselben durch die Division des Nenners verrichtet, der Factor $\frac{2}{3}$ in eben den Zahlen heraus gebracht.

S. 41. Und wenn man also denjenigen Begriff von der Division zum Grunde leget, welchen wir oben gegeben, I. 138. nach welcher die Zahl welche zu dividiren ist, als ein Product betrachtet werden muß, so durch die Multiplication des Theilers in den Quotienten entstanden, da man denn aus diesem gegebenen Product, und einem Factor desselben, nemlich dem gegebenen Theiler, den andern, welcher der Quotiente ist, sucht: so siehet man bloß hieraus, daß die Division durch einen Bruch nichts anders erfordere, als daß man die Zahl, welche durch den Bruch zu dividiren ist, durch den Zehler des Bruchs dividire, und durch seinen Nenner multiplicire. Dieses kan man, wie nunmehr überflüssig bekannt seyn muß, auf verschiedene Arten verrichten: und daraus verschiedene Arten, eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, zusammen sehen. Es sey der Bruch $\frac{10}{3}$ durch $\frac{1}{3}$ zu dividiren, das ist, durch 3 zu dividiren und durch 5 zu multipliciren: so wird durch die Division heraus gebracht $\frac{10}{3}$ oder $\frac{20}{3}$, weil man die Division mit 3 entweder durch die Division des Zehlers, oder durch die Multiplication des Nenners verrichten kan, und durch die Multiplication mit 5 bekommt man aus dem ersten dieser Brüche $\frac{10}{3}$ oder $\frac{20}{3}$, und aus dem zweyten $\frac{10}{3}$ oder $\frac{20}{3}$, nachdem man nemlich wieder die Multiplication, entweder durch die Multiplication des Zehlers, oder durch die Division des Nenners verrichtet; und es ist demnach jeder dieser vier Brüche $\frac{10}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{10}{3}$, $\frac{20}{3}$ der Quotient, welcher gesucht wird. Sie bedeuten einerley, denn sie können alle zu der Benennung des letzten gebracht werden, wie leicht einzusehen ist.

S. 42. Alle diese Arten durch einen Bruch zu dividiren haben ihren

ihren Nutzen, aber bloß diejenigen, da man so wohl die Multiplication als die Division der zu dividirenden Zahl durch eine Multiplication des Nenners und des Zehlers verrichtet, hat allezeit statt, und man bekommt dadurch allezeit ganze Zahlen; II, 38. und setzt man einmal feste, daß man sich dieser Rechnungsart bey jeder Division einer Zahl durch einen Bruch bedienen wolle, so wird die Regel, diese Division zu verrichten, also lauten müssen: Man multiplicire den Nenner der zu dividirenden Zahl durch den Zehler des Theilers (damit wird die zu dividirende Zahl durch den Zehler dividirt) und man multiplicire auch den Zehler der zu dividirenden Zahl durch den Nenner des Theilers, (dadurch wird die Zahl, welche man dividiren soll, durch den Nenner des Theilers multiplicirt.) Zum Exempel, $\frac{5}{7}$ ist durch $\frac{3}{2}$ zu dividiren, so ist der Quotient $\frac{5 \times 3}{7 \times 2} = \frac{15}{14}$. Dieses ist die Regel, welche gemeiniglich gegeben wird.

S. 43. Man siehet hieraus leicht, daß um eine Zahl durch einen Bruch zu dividiren, man eben die Arbeit vornehmen müsse, welche bey der Multiplication durch einen Bruch erfordert wird, mit dem einzigen Unterschied, daß, da man bey der Multiplication mit dem Zehler multipliciren, und mit dem Nenner dividiren mußte, man bey der Division durch den Nenner multipliciren, und mit dem Zehler dividiren muß. Versezt man derothalben die Zahlen des Theilers, und setzt den Zehler an statt des Nenners, und den Nenner an die Stelle des Zehlers, so hat man nunmehr gar nichts zu beobachten, indem man dividiren will, als daß man mit dem also verkehrt gesetzten Bruch multiplicire. Es sey die Zahl 5 oder $\frac{5}{1}$ durch $\frac{3}{2}$ zu dividiren, so verseze man die Zahlen des Theilers, und mache aus denselben $\frac{2}{3}$, mit diesem Bruch multiplicire man die Zahl, welche man dividiren soll $\frac{5}{1}$, so ist $\frac{5}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{1 \times 3} = \frac{10}{3} = 7 \frac{1}{3}$ der Quotient.

S. 44. Dergestalt lassen sich die Regeln der Division durch einen Bruch aus dem Begriff der Division herleiten, welchen wir im Anfang dieser Abhandlung II, 40. wiederholt haben. Es ist aber etwas natürlicher, daß man dieselbe aus dem ersten Begriff der Division folgere, und die Einsicht, welche man dadurch erhält, wird etwas gründlicher. Dieses kan nachfolgender Massen ohne Umschweife geschehen.

II.
Aufsatz.

S. 45. Eine ganze oder gebrochene Zahl durch einen Bruch dividiren, heißt, dem ersten und allgemeinen Begriff von der Division gemäß, aus der zu dividirenden Zahl eine neue dergestalt machen, wie die Einheit aus dem Theiler entsteht. I, 125. Gesezt, dieser Theiler sey ein Bruch, dessen Zehler 1 ist, zum Exempel $\frac{1}{2}$, so entstehet 1 aus dem Theiler $\frac{1}{2}$, indem man denselben durch 2 multipliciret; demnach wird auch der Quotiente zwey mal so groß genommen werden müssen als die Zahl, welche zu dividiren ist, und man bekommt also den Quotienten, wenn man die Zahl, welche durch $\frac{1}{2}$ zu dividiren war, durch 2 multipliciret, und wenn also die Zahl, welche man durch $\frac{1}{2}$ dividiren soll $\frac{1}{2}$ ist, so ist der Quotient $\frac{1}{2} \times 2$ oder auch 1, da der erstere dieser Brüche entstanden, indem man den Zehler von $\frac{1}{2}$ durch 2 multipliciret, und der zweyte, indem man seinen Nenner durch 2 dividiret hat. Und eben so verhält es sich mit der Division durch $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, und überhaupt durch alle Brüche, deren Zehler die Einheit ist, als welche eine wirkliche Multiplication durch den Nenner erfordern.

S. 46. Wenn man aber an die Stelle des Theilers $\frac{1}{2}$ einen andern $\frac{2}{3}$ sezt, welcher zwey mal so groß ist als der erstere, und man sezt, daß man die zu dividirende Zahl $\frac{1}{2}$ bereits durch $\frac{1}{2}$ dividiret, oder durch 2 multipliciret, und dadurch $\frac{1 \times 2}{2}$ oder $\frac{2}{2}$ heraus gebracht habe, so ist dieser Quotient zwey mal größer als derjenige welcher kommt, wenn man eben den Divisorem $\frac{2}{3}$ durch $\frac{1}{2}$ dividiret, weil nemlich $\frac{2}{3}$ doppelt so viel ist als ein Drittel. I, 142. Also kan man aus diesem Quotienten den gesuchten, welchen nemlich der Theiler $\frac{2}{3}$ giebt, machen, wenn man den erst gefundenen durch 2, den Zehler des Theilers, dividiret. Demnach ist der richtige Quotient welchen $\frac{2}{3}$ gibt, wenn man durch $\frac{1}{2}$ dividiret, $\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$ oder ein anderer Bruch, welcher durch eben die Rechnungsarten auf andere Weise verachtet, heraus gebracht werden kan:

S. 47. Oder man stelle sich die Sache kürzlich folgendergestalt vor: Aus $\frac{1}{2}$ wird die Einheit, wenn man zwey Drittel in zwey gleiche Theile theilet: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, und dieser Theile drey zusammen sezt, dergestalt $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Denn drey Drittel sind ein Ganzes. Und eben so wird aus $\frac{1}{3}$ die Einheit, wenn man $\frac{1}{3}$ in vier gleiche Theile theilet,

so viel nemlich Einheiten in dem Zehler sind, und derselben fünfse nimt, denn der vierte Theil von $\frac{1}{4}$ ist $\frac{1}{16}$, und deren fünfse geben $\frac{5}{16}$ oder ein Ganzes. Wenn man demnach einen Bruch, was er auch vor einer seyn mag, oder eine ganze Zahl, $\frac{7}{4}$, durch $\frac{1}{4}$ dividiren soll, so muß man, um den Quotienten aus der zu dividirenden Zahl eben so zu machen, wie aus dem Theiler die Einheit entsteht; die gegebene Zahl, welche dividirt werden soll, ebenfalls in vier gleiche Theile theilen, oder durch den Zehler 4 dividiren, und dieser Theile hernach so viele nehmen, als viele Einheiten in dem Nenner enthalten sind; oder man muß, was man durch erst besagte Division heraus gebracht hat, durch den Nenner multipliciren. Und man bekommt also den Quotienten aus der Division der $\frac{7}{4}$ durch $\frac{1}{4}$ indem man setzt erstlich

$$\frac{7}{4} = \frac{7 \times 1}{4}, \text{ und ferner } \frac{7 \times 1}{36}, \text{ oder auf einmal } \frac{7 \times 5}{9 \times 4} = \frac{35}{36}; \text{ oder}$$

sonst wie man will, oder kan, die zu dividirende Zahl durch den Zehler des dividirenden Bruchs dividirt, und durch dessen Nenner multiplicirt.

Einige Anmerkungen.

S. 48. Wenn eine zum Theil ganze zum Theil gebrochene Zahl, als $7\frac{3}{4}$ durch einen Bruch $\frac{1}{4}$ zu multipliciren ist, so multiplicire man beide Theile dieser Zahl 7 und $\frac{3}{4}$ durch den Bruch $\frac{1}{4}$, und setze die Producte zusammen. Diese sind, $\frac{7 \times 4}{9}$ und $\frac{2 \times 4}{3 \times 9}$ oder $\frac{28}{9}$ und $\frac{8}{27}$

und demnach ist das Product $7\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{28}{9} + \frac{8}{27} = 11, 18. \frac{84 + 8}{27} =$

11, 22. $\frac{22}{27} = 11, 15. 3\frac{1}{3}$

S. 49. Oder man verwandele die gegebene Zahl, welche aus einer ganzen und aus einem Bruche bestehet, ganz in einen unächtern Bruch, und multiplicire diesen durch den gegebenen Bruch. Es sey noch $7\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{4}$ zu multipliciren. Die erstere dieser Zahlen ist dem unächtern Bruch $\frac{29}{4}$ gleich. Wenn man diesen durch $\frac{1}{4}$ multiplicirt, wird das Product $\frac{29}{16}$ wie vorher, und man kan dieses Product wie eben geschehen, auch durch die Zahl $3\frac{1}{4}$ ausdrücken.

S. 50. Eben so kan man verfahren, wenn eine Zahl die aus einer ganzen und aus einem Bruche zusammen gesetzt ist $7\frac{3}{4}$, durch eine andere dergleichen Zahl $2\frac{1}{4}$ multiplicirt werden soll. Man kan die

II. Zahlen beyde in unächte Brüche verwandeln, und diese so dann in einander multipliciren. Die erste Zahl wird durch diese Verwandlung wieder $= \frac{1}{7}$ und die zweyte $= \frac{2}{7}$. Und das Product aus diesen Brüchen ist $\frac{1}{7} \times \frac{2}{7} = 18 \frac{1}{7}$, und dieses ist auch das Product aus $7\frac{1}{7}$ und $2\frac{2}{7}$.

S. 51. Und dieses ist wol der kürzeste Weg dergleichen Producte zu erlangen. Will man die gegebene Zahlen stehen lassen wie sie sind, und dieselbe nicht in unächte Brüche verwandeln, so muß man jeden Theil der ersten Zahl durch jeden Theil der zweyten multipliciren, und die Producte so dann zusammen setzen, damit man das gesuchte Product erhalte. Es sey nochmals $7\frac{1}{7}$ durch $2\frac{2}{7}$ zu multipliciren, so wird das Product dieses seyn; $7 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} + \frac{4 \times 7}{9} + \frac{2 \times 4}{3 \times 9} = 14 + \frac{2}{3} + \frac{28}{9} + \frac{8}{27} = 18 + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = 18 + \frac{5}{7} = 18 \frac{5}{7}$ oder $18 \frac{1}{7}$, wie vorher.

S. 52. Sol man aber eine dergleichen Zahl durch einen Bruch, oder durch eine Zahl, welche ebenfalls aus einer ganzen und aus einem Bruch zusammen gesetzt ist, dividiren, so kan man, wenn man Weitläufigkeiten vermeiden will, nicht anderst verfahren, als daß man die Zahlen beyde in unächte Brüche verwandelt, und die Division so dann mit diesen Brüchen verrichtet. Es sey nunmehr $7\frac{1}{7}$ durch $2\frac{2}{7}$ zu dividiren: so setze man wieder an statt $7\frac{1}{7}$ den Bruch $\frac{50}{7}$, und an statt $2\frac{2}{7}$ schreibe man $\frac{16}{7}$, und dividire so dann den ersten Bruch durch den zweyten. Der Quotiente $\frac{23 \times 2}{2 \times 22}$ ist der gesuchte, welcher sich auch also ausdrücken läßt: $\frac{50}{7} = 3\frac{1}{7}$. Mit haben zum Beweis der Richtigkeit dieser Rechnung nicht das geringste hinzu zu fügen, weil alles aus dem so gezeigt worden, überflüssig klar ist.

Von den Einfachen und zusammen gesetzten Zahlen.

S. 53. Dasjenige so bisshero von den Brüchen gewiesen worden, ist zur Ausübung der Rechnungsarten, welche bey denselben vorkommen, meistens hinlänglich: aber zu recht deutlichem und gründlichem Verstand derselben ist noch verschiedenes hinzu zu setzen, welches wir hieher verspart, die Aufmerksamkeit des Lesers desto mehr zu unterhalten, welche dadurch erweckt wird, wenn man den Nutzen der vorzunehmenden Betrachtungen vorher einseheth, eh man sich zu denselben wendet.

S. 54. Wir haben schon öfters angemerkt, und wem ist es unbekant, daß nicht eine jede Zahl durch eine jede andere sich genau dividiren lasse. Es gibt aber auch Zahlen, welche man gar nicht durch andere Zahlen dividiren, und also keines weges als Producte aus zweyen andern Zahlen ansehen kan. Dergleichen sind die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, und viele andere, welche keine ganze Zahl genau und ohne Bruch theilet. Denn die Division durch 1 ist eigentlich keine Division, weil sie die Zahl läßt wie sie sie findet. Dergleichen ganze Zahlen, welche durch keine andere ganze Zahlen sich genau theilen lassen, heißen einfache Zahlen. Alle übrige, welche sich dividiren lassen, und welche man also durch die Multiplication heraus bringen kan, werden als zusammen gesetzte Zahlen betrachtet, dergleichen sind die Zahlen 4, 6, 8, 9, 10, 12, und unendlich viele andere.

S. 55. Man verstehet demnach durch das Zusammensetzen einer Zahl 12 aus zwey oder mehrern andern 4 und 3, oder 2 und 2 und 3 hier nichts anders als die Multiplication dieser Zahlen in einander, und weil 4×3 , oder $2 \times 2 \times 3$, die Zahl 12 bringt, so sagt man die Zahl 12 sey aus den zwey Zahlen 4 und 3, oder aus den dreyen $2 \times 2 \times 3$ zusammen gesetzt. Selbst in der Erklärung lieget, daß man sich nur die ganze Zahlen als einfach oder zusammen gesetzt vorstellen kan, und daß die Brüche eigentlich weder einfache noch zusammen gesetzte Zahlen sind.

S. 56. Wolte man alle einfache Zahlen bis auf eine gewisse Größe, als zum Exempel alle die unter hundert sind, finden, so könnte man alle Producte in eine Reihe setzen, welche entstehen, indem man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, durch zwey multipliciret bis an die gesetzte Gränze hundert. Alle diese Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 &c. lassen sich durch 2 dividiren. Indem aber dieses geschieht, wird die erste dieser Zahlen 2 durch sich selbst und durch keine andere dividirt. Ferner müste man alle Producte, welche vermittelst der Multiplication durch 3 entstehen, in eine andere Reihe bringen. Diese sind 3, 6, 9, 12, 15, 18 &c. welche Zahlen alle sich durch 3 dividiren lassen, welcher Theiler von der ersten Zahl dieser Reihe wieder nicht verschieden ist. Eben so müste man alle Producte aller Zahlen durch 4, welche Producte nicht größer sind als 100, in eine Reihe bringen 4, 8, 12, 16, 20, 24, und so immerfort. Diejenige Zahlen nun, welche in keiner solchen Reihe anders, als an deren Anfang vorkommen, sind einfache Zahlen, die übrigen alle sind zusammen gesetzt,

II. **Abzählen.** setzt, und lassen sich durch diejenige Zahl dividiren, welche im Anfang der Reihe steht. Die Zahl 2 kommt nicht anders, als in der ersten Stelle der ersten Reihe vor, und ist demnach eine einfache Zahl. Die Zahl 3 kommt nicht anders als in der ersten Stelle der zweyten Reihe vor, und ist deswegen ebenfalls einfach. Im Gegentheil kommt 4 zwar auch als die erste Zahl der dritten Reihe vor: sie steht aber auch in der ersten Reihe in der zweyten Stelle. Demnach ist sie keine einfache Zahl; sondern sie lässt sich durch 2 dividiren.

S. 57. Hieraus erhellet deutlich, daß unter den geraden Zahlen keine andere einfache Zahl anzutreffen sey, als die einzige 2, und daß demnach die übrige einfache Zahlen alle ungerade sind. Die einfache Zahlen unter 100 sind, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

S. 58. Da gar keine Zahlen sind, welche die einfachen Zahlen dividiren, außer sie selbst: so ist klar, daß es unmöglich sey, eine Zahl zu finden, welche zwei verschiedene einfache Zahlen 3 und 7 zugleich dividire. Es gibt aber auch zusammen gesetzte Zahlen, die sich nicht durch einerley Zahl dividiren lassen. 8 ist keine einfache Zahl und 9 auch nicht. Gene kan durch 2 und 4 dividirt werden; und diese durch 3, aber weder 8 läßt sich durch 3, noch 9 durch 2 oder 4 genau theilen. Dergleichen Zahlen beziehen sich auf einander als einfache Zahlen, ob sie zwar keine sind, denn wenn man dieselbe alle beyde mit einerley Zahl dividiren wil, so kan dieses eben so wenig geschehen, als ob sie einfache Zahlen wären.

S. 59. Man kan ohne sonderliche Mühe eine Tafel machen, in welcher neben einer jeden Zahl die Theiler derselben stehen, aus welcher dann auch die gemeinschaftlichen Theiler zweier oder mehrerer Zahlen zu nehmen wären, und unter diesen die grössesten, da man aber eine dergleichen Tafel nicht immer bey der Hand haben kan, und sie auch unmöglich auf alle Zahlen erstreckt werden könnte: aber doch öfters erfordert wird, daß wir eine solche Zahl, welche zwei andere genau dividirt, und zwar, wenn mehr als eine dergleichen Zahl zu haben ist, die grösste unter allen, zu finden wissen, so müssen wir eine andere Weise zeigen, dieses ins Werk zu richten. Wir werden aber zu deren deutlicherem Verstand einige Sätze von den gemeinschaftlichen Theilern zweier Zahlen zum Grunde setzen müssen.

Gemeinschaftliche Theiler zweier Zahlen.

II.
Abschnitt.

S. 60. Das erste so wir zu dem Ende anzumerken haben, ist auch an sich klar, nemlich daß die größte Zahl, welche eine jede Zahl genau dividiret, sie selbst sey. Als 12 hat zu Theilern, 2, 3, 4, 6, 12, keiner derselben ist größer als 12. Einen größern Theiler als sie selbst ist, kan keine Zahl haben.

S. 61. Und wenn demnach eine Zahl als 6 eine andere Zahl 18 genau theilet, so ist die erstere Zahl selbst der größte Theiler, welchen diese zwei Zahlen gemeinschaftlich haben. Denn es wird gesetzt, daß die erstere Zahl 6 die zweyte genau dividiren sol. Nun dividiret sie sich ohne Zweifel selbst, denn eine jede Zahl ist in ihr selbst eben einmal enthalten, also theilet die Zahl 6, beyde gegebene Zahlen 6 und 18. Sie ist aber die Gröste unter denen die die erstere Zahl 6 genau theilen, nach demjenigen so eben als bekant angenommen worden; also ist sie auch der größte gemeinschaftliche Theiler.

wenn eine Zahl 16 durch eine andere 6 getheilet wird, so theilet sie einige Einheiten übrig als hier 4, so theilet die das Ueberbleibsel 4 und den Theiler 6 genau theilet, welche dividiret worden, und keine andere Zahl verrichten. Das erstere, daß eine solche Zahl als hier die 2, welche das Ueberbleibsel 4 und auch den Theiler 6 genau theilet, auch die Zahl 16 welche durch 6 dividiret worden, theile, wird gar leicht eingesehen, wenn man sich die Zahlen wieder durch Puncte vorstellt. Die zu dividirende Zahl sey AB, der Theiler CD, welcher jene in die Theile AE, EF theilet, und FB übrig läßt. Die Hälfte von FB, das ist hier 2, theilet die Zahl CD genau, also theilet eben diese 2 auch die AE, so der CD gleich ist, und eben so theilet sie das andere Stück EF, denn dieses ist ebenfalls der CD gleich. Endlich theilet sie noch das Ueberbleibsel FB, weil man mit Fleiß eine solche Zahl angenommen, welche das Ueberbleibsel theilet; also theilet sie die ganze Zahl AB. Man hat in der Figur die Theilung durch CD mit gedoppelten und die mit 2 durch einfache Striche bemerkt, um alles desto leichter zu machen, ob zwar die Sache an sich wenig Schwierigkeit hat.

F. 20.

S. 62. Daß aber keine andere Zahl so wohl die zu dividirende Zahl als den Theiler genau theile, als diejenige, welche auch das Ueberbleibsel theilt.

II. bleibsel theilet, oder, welches einerley ist, daß keine Zahl, welche entweder das Ueberbleibsel oder den Theiler nicht genau theilet, dennoch so wohl die zu dividirende Zahl, als den Theiler, genau theilen könne, ist also zu erweisen. Man stelle sich wieder die Zahlen vor, die wir eben geschrieben: Man theile nemlich AB durch CD, und FB sey der Ueberschuß von dieser Theilung. Nun fasse man eine Zahl in die Gedanken was man vor eine wil, als zum Exempel 5, welche entweder CD oder FB nicht genau theilet. Setzet man das erste, daß die also angenommene Zahl den Theiler CD nicht dividire, so kan sie eben deswegen nicht die beyden Zahlen CD und AB theilen, und wer dieses sagen wolte, würde angeben, daß eben die Zahl einmal den Theiler CD theilen, und das andere mal nicht theilen könnte, welches sich selbst widerleget. Setzet man aber diesen Widerspruch zu vermeiden, daß eine solche Zahl angenommen werde, welche zwar CD theilet, aber nicht den Ueberschuß FB, als hier 3, so muß man bedenken, daß wenn man mit einer solchen Zahl, welche CD theilet, auch die AB theilen wil, jederzeit eine Theilung in die vorigen Theilungspuncte, E, F fallen, und demnach eine Theilung nothwendig mit dem letzten Zeichen F aufhören werde. Wil man nun von dannen weiter fortgehen, und AB bis ans Ende theilen, so muß auch die Zahl FB getheilet werden, welches nicht geschehen kan, wenn man zum Theiler eine solche Zahl angenommen hat, welche das Ueberbleibsel FB nicht genau theilet. Es ist also was gesagt worden richtig, daß keine Zahl den Theiler CD und die Zahl AB zugleich theilen könne, welche nicht den Theiler CD und dasjenige, so nach geschעהner Division übrig bleibt, FB, genau theilet.

§. 64. Ist demnach eine Zahl die Gröste unter allen, welche das Ueberbleibsel von einer Division und den Theiler, welchen man darzu gebraucht, genau theilen: so ist sie auch die Gröste unter den Zahlen, welche den Theiler und die dividirte Zahl genau theilen. Man nehme in unserm Exempel 2, welche den Theiler 6, und das Ueberbleibsel 4 genau theilet, und die Gröste unter allen Zahlen ist, welche sie theilen. Diese theilet erstlich die dividirte Zahl 16 auch, wie überhaupt alle Zahlen thun, welche den Theiler und das Ueberbleibsel theilen. II, 62. Eine grössere Zahl als dieser grösste gemeinschaftliche Theiler, zum Exempel 3, theilet nicht beydes, das Ueberbleibsel FB und den Theiler CD, sonst wäre jener nicht die Gröste unter allen, welche den Theiler und das Ueberbleibsel zugleich theilen, also kan auch dies

Diese grössere Zahl 3 nicht den Theiler 6 und die dividirte Zahl 16 zugleich theilen, II, 62. und bleibt also die erstere Zahl 2, welche die grösste war unter den gemeinschaftlichen Theilern des Theilers und des Ueberbleibfels, auch die grösste unter den gemeinschaftlichen Theilern, des Theilers 6 und der dividirten Zahl 16. II.

Den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweyer Zahlen zu finden.

§. 65. Und nunmehr können die Regeln gewiesen und verständlich gemacht werden, nach welchen der grösste gemeinschaftliche Theiler zweyer gegebenen Zahlen gefunden wird. Sie bestehen in nachfolgenden. Ich sol eine Zahl finden, welche 36 und 16 zugleich, und beyde genau dividiret. Ich dividire erstlich die grössere der vorgegebenen Zahlen 36 durch die kleinere 16, und bemerke hier nicht so wohl den Quotienten, als welcher von keinem Nutzen ist, als vielmehr den Ueberrest von der Division, welcher fast den Zehler des Bruchs abgiebt, welcher der ganzen Zahl in dem Quotienten noch zu setzen ist. Dieser Ueberrest ist hier 4. Mit diesem Ueberrest dividire ich so dann den Theiler der vorigen Rechnung 16, welches hier genau geschieht, und dieses ist ein Zeichen, daß eben dieser letzte Theiler 4 auch die andere Zahl 36 dividire, II, 62. wie man dieses auch findet, wenn man diese Division versucht.

§. 66. Es gehet aber die Arbeit nicht allzeit so geschwinde zu Ende. In diesem Fall, wenn nemlich auch bey der zweyten Division der Quotiente nicht genau in ganzen Zahlen zu haben ist, hat man nur die Arbeit, wie sie angefangen worden, fortzusetzen, und ferner den Theiler der letzten Division durch das Ueberbleibfel von eben der Division zu theilen, und dieses immerfort, bis man endlich zu einer genauen Division in ganzen Zahlen gelanget. Endlich wird dieses geschehen, und der letzte Theiler wird allzeit die zwey gegebene Zahlen genau und ohne Bruch theilen. Es wird aber auch zum öftern keine andere dergleichen Zahl als die 1 können gefunden werden, welches ein Zeichen seyn wird, daß die zwey gegebene Zahlen nicht beyde durch einley Zahlen können getheilet werden, und daß sie sich demnach auf einander als einfache Zahlen beziehen, II, 58. weil die 1 eigentlich keine Zahl theilet.

II. §. 67. Zum Exempel, welche Zahl dividirt die zwei Zahlen 1785, 858 genau? Ich dividire die grössere durch die kleinere

$$\begin{array}{r} 858 \overline{) 1785} \\ \underline{1716} \\ 69 \end{array}$$

Es bleibt in dieser Division 69 übrig. Mit diesen 69 dividire ich den Theiler 858.

$$\begin{array}{r} 69 \overline{) 858} \\ \underline{168} \\ 138 \\ \underline{30} \end{array}$$

Es bleiben hier 30, mit welchen wieder der Theiler so eben gebraucht worden 69 zu dividiren ist:

$$\begin{array}{r} 30 \overline{) 69} \\ \underline{60} \\ 9 \end{array}$$

Hier bleiben 9, durch welche abermal der letzte Theiler 30 zu theilen ist:

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 30} \\ \underline{27} \\ 3 \end{array}$$

Da denn 3 von der Division übrig bleiben, und diese Zahl theilt den letzten Theiler 9 genau, welches ein Zeichen ist, daß eben die 3 auch die zwei gegebene Zahlen 858 und 1785 theile, wie man dieses auch bey angestellter Probe befindet. Denn 858 durch 3 dividirt, giebt zum Quotienten 286, und 1785 durch eben die 3 getheilt, bringt 595.

§. 68. Wolte man aber eine Zahl suchen, welche die zwei Zahlen 21 und 8 genau theilte, so würde man nach wiederholter Division:

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 21} \\ \underline{16} \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 8} \\ \underline{5} \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 5} \\ \underline{3} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 3} \\ \underline{2} \\ 1 \end{array}$$

end

endlich auf 1 kommen, welches ein Zeichen ist, daß die zwei Zahlen 21 und 8 durch keine andere zugleich genau getheilet werden können.

II.
Abschnitt.

§. 69. Man kan den Raum bey dieser Rechnung zu sparen, jederzeit den vorhero gebrauchten Theiler an die Seite des Ueberbleibfels von der vorherigen Division setzen, ohne dieses erst wieder abzuschreiben. Wir wollen die vorige Rechnung auf die Art verrichten, damit, wenn etwas nicht so gleich solte verstanden werden, man sich durch die Vergleichung derselben mit der gegenwärtigen helfen könne:

$$\begin{array}{r}
 D \quad 858) \quad 1785 \overline{) 2} \\
 \underline{171} \\
 C \dots 69 \overline{) 858 \overline{) 12}} \\
 \underline{69} \\
 168 \\
 \underline{138} \\
 B \dots 30 \overline{) 69 \overline{) 2}} \\
 \underline{60} \\
 A \dots 9 \overline{) 30 \overline{) 3}} \\
 \underline{27} \\
 3 \overline{) 9 \overline{) 3}} \\
 \underline{9} \\
 0
 \end{array}$$

§. 70. Der Beweis von der Richtigkeit dieser Rechnungsart, und daß die gefundene Zahl 3 wirklich die größte der Zahlen sey, welche die im Anfang gegebene Zahlen 858 und 1785 zugleich theilen, fließet folgender gestalt aus den zum Grunde gelegten Sätzen. Die gefundene Zahl 3 welche 9 genau theilet, ist ohnstreitig der größte gemeinschaftliche Theiler dieser zwei Zahlen 3 und 9, weil sie die erste dieser Zahlen 3 selbst ist. II, 61. Nun ist 9 der Theiler von der Division bey welcher A steht, und 3 ist das Ueberbleibsel derselben. Also ist die gefundene Zahl 3 der größte gemeinschaftliche Theiler des Theilers dieser Division 9, und des Ueberbleibfels derselben 3. Demnach ist eben die Zahl 3 der größte gemeinschaftliche Theiler, der bey A dividirten Zahl 30 und des Theilers eben der Division, 9. II, 64. Es ist aber wider 9 das Ueberbleibsel von der vorhergehenden Division, bey welcher B steht, und 30 war der Theiler bey dieser Division. Demnach ist

P 3

die

II. **Abchnitt.** die Zahl 3 der größte gemeinschaftliche Theiler des Theilers und des Ueberbleibfels dieser Division B, und hieraus folgt wieder, daß eben diese Zahl 3, auch der größte gemeinschaftliche Theiler, der bey B dividirt die Zahl 69 und des dabey gebrauchten Theilers 30 seyn müsse. Weil nun diese Zahl 69 wieder der Theiler ist, der bey der Division C gebraucht worden, und 30 das Ueberbleibfel von dieser Division, so ist wieder 3 der größte gemeinschaftliche Theiler der Zahlen 69, 858, deren letztere durch die erstere bey C dividirt worden: und weil 69 das Ueberbleibfel ist der Division bey D, und 8,8 derselben Theiler, so sieht man endlich, wenn man die gebrauchten Schlüsse nochmals wiederholt, daß die gefundene Zahl 3 auch der größte gemeinschaftliche Theiler der gegebenen Zahlen 858 und 1785 seyn müsse.

§. 71. Wenn man diese Arbeit etwas genauer betrachtet, so sieht man, daß wenn man den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen 858 und 1785 finden wil, man in der That nichts anders zu thun habe, als die kleinere dieser Zahlen dergestalt zu multipliciren, daß das Product, der größern Zahl, so nahe komme, als möglich, und so dann dieses Product von der größern Zahl abziehen: daß man hernach mit dem Ueberbleibfel und der kleinern Zahl eben so verfahren müsse, und so wechselsweise immerfort, bis zuletzt nach Abzug eines dergleichen Products nichts übrig bleibt: und daß die Division wirklich zu nichts diene, als diese größten Producte zu finden. Wir wollen die Rechnung auf die Art anstellen, damit die Sache desto deutlicher werde.

$$\begin{array}{r}
 858 = a \\
 858 = 12c \\
 \hline
 30 = d \\
 27 = 3e \\
 \hline
 3 = f
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 1785 = b \\
 1716 = 2a \\
 \hline
 69 = c \\
 60 = 2d \\
 \hline
 9 = e \\
 9 = 3f \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Man hat die kleinere Zahl a zwey mal genommen, von der großen b abgezogen, dadurch ist c übrig geblieben. Diese Zahl c durch 12 multiplicirt, ist wieder von a abgezogen worden, und hier ist d geblieben, welche Zahl man wieder verdoppelt, und von c abgezogen hat. Das Ueberbleibfel ist hier e. Nimmt man dieses drey mal, und subtrahirt das

Das Product von d, so bleibet f, welche Zahl wieder drey mal genommen, und von e abgezogen nichts übrig läßt. Die Zahl 3 ist demnach der größte gemeinschaftliche Theiler welchen man sucht. Man ziehet überall die größten Producte ab, welche man haben kan, nicht weil dieses umungänglich nothwendig ist, sondern nur die überflüssige Subtraction zu vermeiden: denn wenn man sich der größten Producte bedienet, so bekommt man derselben so wenige als möglich ist. Man halte übrigens diese Rechnung mit der letzten zusammen, wenn man einige Schwierigkeit dabey finden sollte, dieses wird dieselbe gar bald heben.

II.
Abschnitt.

S. 72. Dieser Anweisung nun, den größten gemeinschaftlichen Theiler zweyer Zahlen zu finden, kan man sich bedienen, wenn man einen Bruch zu der kleinsten Benennung bringen soll, welche er haben kan. Man muß zu dem Ende eine Zahl finden, welche den Nenner und den Zehler des Bruchs zugleich theilet: II. 8. und wir haben gesehen, daß die kleinste Benennung gleich anfangs erhalten werde, wenn man den größten dieser gemeinschaftlichen Theiler annimmt, und damit so wohl den Zehler des Bruchs als auch seinen Nenner theilet. II. 13. Nach den gegebenen Regeln kan man den größten gemeinschaftlichen Theiler finden, wenn er sonst nicht beyfallen will, und man kan versichert seyn, daß der dergestalt gefundene Theiler wirklich der größte sey, und sich also die vergebliche Mühe ersparen, an eine weitere Reduction des Bruchs zu einer noch kleinern Benennung, zu gedenken, wenn man den dergestalt gefundenen Theiler bereits darzu angewendet hat. Der Bruch $\frac{17}{81}$, dessen Glieder die zwey Zahlen sind, deren gemeinschaftlichen Theiler wir eben gesucht, und gefunden haben, läßt sich vermittelst dieses Theilers 3 in diesen Bruch $\frac{7}{27}$ verwandeln, aber keinesweges zu einer noch kleinern Benennung bringen.

Einige besondere Wege, den gemeinschaftlichen Theiler zweyer Zahlen zu finden.

S. 73. Diese Regul ist allgemein; man hat aber auch einige besondere Regeln die gemeinschaftlichen Theiler zweyer Zahlen zu finden, welche nicht ohne Bequemlichkeit angewendet werden können. Wir wollen einige der vornehmsten anführen.

S. 74. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer eine von diesen ist: 0, 2, 4, 6, 8, oder mit einem Wort, alle gerade Zahlen, lassen sich durch 2 theilen. Dieses siehet man gar leicht ein: sollte sich aber ja einige Schwierig-

II. Schwierigkeit dabey finden, so darf man nur die Zahlen von 1 an, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, durch 2 multipliciren, um sich davon zu überführen.

§. 75. Alle Zahlen, deren letzte Ziffer 5 oder 0 ist, lassen sich durch 5 theilen, welches man auf eben die Weise einsehen kan, wenn man die Zahlen von 1 an, in ihrer natürlichen Ordnung durch 5 multipliciret, wodurch man alle Zahlen bekommt, deren letzte Ziffer 0 oder 5 ist. Denn es folgen diese Producte dergestalt auf einander 5, 10, 15, 20, 25, und so fort.

§. 76. Alle Zahlen welche am Ende eine 0 haben, lassen sich durch 10 theilen: alle Zahlen welche am Ende zwey 00 haben, durch 100, und so ferner. Und man kan also bey jedem Bruch so viele 00 in dem einen Glied, des Zehlers oder des Nenners wegstreichen, als viele deren in dem andern Glied stehen, welche man ebenfalls wegstreichen muß. Zum Exempel, $\frac{1170}{1000}$ ist $= \frac{117}{100}$, und $\frac{117000}{1000000}$ ist $= \frac{117}{10000}$. Dergleichen Zahlen, welche am Ende ein oder mehr 0 haben, heißen auch runde Zahlen, und man kan einen Bruch allezeit ohne sonderlichen Fehler zu einer kleinern Benennung bringen, wenn man an die Stelle seiner Glieder diejenige runde Zahlen setzet, welche ihnen am nächsten kommen, und hernach nach Anweisung dieser gegenwärtigen Regel verfähret. Der Bruch $\frac{100}{1000}$ ist etwas kleiner als $\frac{1}{10}$, und dieser ist so viel als $\frac{1}{10}$, und demnach ist der Bruch $\frac{100}{1000}$ etwas, aber nicht sonderlich viel, kleiner als $\frac{1}{10}$. Genauer verfähret man, wenn man an die Stelle des gegebenen Bruchs $\frac{100}{1000}$ setzet $\frac{1000}{10000}$, welcher Bruch dem Bruche $\frac{1}{10}$ gleich ist, und dem Werth des gegebenen Bruchs näher kommet.

§. 77. Alle Zahlen, welche, wenn man ihre Ziffer alle vor einzelne Einheiten gelten läßt, und von denselben 3 so oft wegwirft als man kan, nichts übrig lassen, oder welche, wenn man ihre Ziffer zusammen addiret, ohne auf die Ordnung der Einheiten Acht zu haben, so sie bedeuten, eine Zahl geben, die sich durch 3 theilen läßt, lassen sich ebenfalls durch 3 theilen. Nach dieser Regel hätte man den gemeinschaftlichen Theiler der zwey Zahlen 1785 und 858 leicht finden können. Denn die Ziffer der ersten dieser Zahlen geben, wenn man sie dergestalt zusammen setzet, 21, oder 3, und die Ziffer der zweiten Zahl bringen durch eine gleichmäßige Addition eben so viel. Woraus zu schließen ist, daß sich diese Zahlen beyde durch 3 theilen lassen.

§. 78. Auch hiervon ist der Grund nicht gar schwer einzusehen.
Wenn

Wenn man die Zahlen, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, II. Abschn.
 1, 2, 3, 4, 5 u. durch 3 multipliciret, so bekommt man gewiß eine
 Summe verschiedener 3, das ist 3, oder $3 + 3$, oder $3 + 3 + 3$, und
 so ferner; diese Summen aber werden vermittelst der gewöhnlichen
 Ziffer dergestalt geschrieben, daß man verschiedene drey mal 3, oder
 9 wegwirft, und nur die übrigen 3 oder $3 + 3$ und so ferner, behält.
 Wie zum Exempel, an statt $3 + 3 + 3 + 3$ man schreibt 12, welches
 durch die gewiesene Addition nur 3 giebt. Demnach werden alle
 Producte, welche entstehen, indem eine Zahl, so groß sie auch seyn
 mag, durch 3 multipliciret wird, durch Ziffern ausgedrückt, welche
 sich durch 3 dividiren lassen, wenn man mit ihnen, wie gewiesen
 worden ist, verfähret.

Wie die zusammengesetzten Zahlen aus den einfachen entstehen.

§. 79. Dieses alles, und was noch rückständig ist, wird noch
 deutlicher, wenn wir betrachten, wie die zusammengesetzte aus den
 einfachen Zahlen entstehen. Denn daß alle zusammengesetzte Zahlen
 endlich aus den einfachen durch die Multiplication heraus gebracht
 werden können, ist leicht einzusehen. Sie lassen sich genau dividiren;
 und können folgendes durch die Multiplication des Theilers in den
 Quotienten entstehen; wenn dieses nicht wäre, so wären sie einfache
 Zahlen. Dieser Theiler und dieser Quotient sind nun wieder entwe-
 der einfache Zahlen oder zusammengesetzte. Ist das erste, so ist die
 zusammengesetzte Zahl nur aus den zweyen einfachen, dem Theiler
 und den Quotienten, entstanden: ist aber der Theiler oder der Quo-
 tient wieder eine zusammengesetzte Zahl, so kan man ihn von neuen
 durch die Division zerfällen. Endlich muß man doch auf einfache
 Zahlen kommen. Zum Exempel, 24 ist eine zusammengesetzte Zahl,
 welche aus den zwey Factoren 4 und 6 entstanden ist. Jeder dersel-
 ben läßt sich wieder in zwey andere zerfällen, denn $4 \text{ ist } = 2 \times 2$, und
 $6 = 2 \times 3$. Demnach entstehet die Zahl 24 aus den Factoren 2, 2,
 2, 3, welche alle einfache Zahlen sind, und so ist es mit allen übrigen.

§. 80. Daß nun, wenn man durch die Multiplication der ein-
 fachen Zahlen zusammengesetzte heraus bringet, an der Ordnung
 nichts gelegen sey, in welcher man multipliciret, und daß immer einer-
 ley Zahl heraus gebracht werde, in was Ordnung man auch die ein-
 fache Zahlen in einander multiplicire, ist bereits bekannt, und wir wif-
 sen,

II. sen, daß $3 \times 2 \times 5$ keine andere Zahl bringe als $2 \times 5 \times 3$, und so fort.
Abschnitt. ner. I, 96.

§. 81. Daß aber einerley Zahl nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen gesetzt werden könne, ist etwas, welches allerdings in Zweifel kan gezogen werden, ehe man es untersucht. Die Zahl 35 entstehet aus der Multiplication der einfachen Zahlen 5 und 7, könnte sie nicht auch aus zweyen oder dreyen, oder mehrern andern einfachen Zahlen, als 3 und 11, entstehen? Man siehet in diesem Exempel leicht ein, daß es nicht seyn könne, denn 3 mal 11 ist 33 und nicht 35. Aber verhält sich die Sache immer so? Und wenn einerley Zahl aus zweyen einfachen nicht auf verschiedene Art entstehen kan, kan nicht etwa einerley Zahl aus drey oder mehr verschiedenen einfachen Zahlen, durch deren Multiplication heraus gebracht werden? Die Zahl 210 kan aus nachfolgenden Factoren 6, 5, 7, und 15, 2, 7, wie auch aus 14, 5, 3, und noch aus andern entstehen, und es ist $210 = 6 \times 5 \times 7 = 15 \times 2 \times 7 = 14 \times 5 \times 3$. Sollte dieses nicht auch angehen, wenn alle drey Factoren derselben einfache Zahlen sind? Denn unter denjenigen, welche wir angegeben haben, ist immer ein zusammengesetzter, nemlich 6, 15, 14, ob zwar die übrigen einfache Zahlen sind.

§. 82. Die Antwort hierauf ist, Nein. Es läßt sich keine Zahl aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen setzen, und man kan keine Zahl durch eine andere einfache Zahl genau dividiren; als durch eine derjenigen, aus deren Multiplication sie einmal entstanden ist. Man siehet leicht ein, daß dieses letztere mit dem erstern einerley sey, oder daß es wenigstens aus demselben unmittelbar fließe. Denn wenn sich die Zahl 30 aus keinen andern einfachen Zahlen als aus 2, 3, 5, zusammen setzen läßt, so kan sie ohnmöglich durch eine andere einfache Zahl, 7 zum Exempel, dividiret werden. Wäre dieses, so wäre die Zahl 30 auch durch die Multiplication dieses Theilers 7 und den Quotienten, welchen wir indessen durch Q andeuten wollen, entstanden, und weil Q wieder entweder eine einfache Zahl, oder aus einfachen zusammen gesetzt ist, so wäre eben diese Zahl 30 auch aus den einfachen Zahlen 7 und Q, oder 7 und denjenigen einfachen Zahlen, aus welchen Q zusammen gesetzt ist, entstanden: und folgendes wäre diese Zahl $30 = 2 \times 3 \times 5 = 7 \times Q$. Daß aber dem nicht also sey, und daß jede zusammengesetzte Zahl nur auf einerley Art aus einfachen Zahlen entstehen könne, ist nun zu beweisen.

§. 83. Man

S. 83. Man nehme zu dem Ende eine zusammengesetzte Zahl, II.
was man vor eine nehmen will, 1729, und dividire sie durch eine ein- Abschnitt.
fache Zahl, durch die sie sich genau theilen läßt. Dieses gebet mit der
Zahl 19 an, und der Quotient ist 91, und demnach $1729 = 91 \times 19$.
Noch dividire man eben diese Zahl 1729 durch eine andere einfache
Zahl genau. Die Zahl 7 thut dieses, und der Quotient ist hier 247,
daß demnach eben die Zahl 1729 auch dem Producte 247×7 gleich
ist. Ich sage, es lasse sich 91, der Quotient der ersten Division auch
durch den Theiler der zweyten dividiren, und wir werden auf diese
Eigenschaft das übrige bauen können, wenn dieselbe erst wird erwies-
sen seyn.

S. 84. Es sey demnach $19 \times 91 = 247 \times 7$, und 19 und 7 seyen
einfache Zahlen, wir sollen erweisen, daß bey diesen Umständen sich
der andere Factor des ersten Productes 91, durch den einfachen Factor
des zweyten, 7, theilen lasse. Man multiplicire 91 durch 7. Das ist,
man multiplicire die Zahl 91 von welcher gezeiget werden soll, daß sie
sich dividiren lasse, durch diejenige 7, welche vor einen ihrer Theiler
angegeben wird. Oder man zeige vielmehr diese Multiplication nur
durch die gewöhnlichen Zeichen an $7 \times 91 = 91 \times 7$, und bemerke die
Gleichheit dieser Producte bey B, und die Gleichheit der vorigen bey A.

A $19 \times 91 = 247 \times 7$

B $7 \times 91 = 91 \times 7$

C $14 \times 91 = 182 \times 7$

E $5 \times 91 = 65 \times 7$

D $5 \times 91 = 65 \times 7$

F $2 \times 91 = 26 \times 7$

G $4 \times 91 = 52 \times 7$

H $1 \times 91 = 13 \times 7$

In dem ersten dieser Producte bey A und B, 19×91 und 7×91 kommt
der gemeinschaftliche Factor 91 vor, und in dem letztern 247×7 und
 91×7 ist der Factor 7 gemeinschaftlich, und diese gemeinschaftliche
Factoren sind eben diejenige Zahlen, von welchen angegeben wird, daß
die erstern 91 sich durch die zweyte 7 dividiren lasse. Die Producte
bey B sind kleiner als diejenigen die bey A stehen. Man multiplicire
diese Producte bey B beyde durch die größte Zahl, mit welcher man sie
multipliciren kan, ohne daß dadurch Zahlen kommen, welche die Pro-
ducte bey A übertreffen. Man darf zu dem Ende nur die erstern Fa-
ctoren derselben multipliciren, und die zweyten stehen lassen, denn da-
mit werden auch die Producte multipliciret, I, 94. wie wir wissen.
In unserm Exempel hat man diese Zahlen bey B mit nicht mehr als

II. 2 multipliciren können, und die Producte, welche aus dieser Multiplication entstanden sind, stehen bey C. Diese Producte bey C ziehe man von den Producten bey A ab. Sie sind einander gleich, weil sie doppelt so groß sind als die gleichen Producte bey B; es müssen also nach diesem Abzug gleiche Zahlen bleiben, welche bey D angemerkt stehen. Man gebe sich die Mühe, diese Rechnungsarten etwas genauer zu erwegen, so wird hoffentlich bey denselben keine Schwierigkeiten bleiben, und alles deutlicher werden, als wir es uns durch viele Worte zu machen getrauen, weil alles aus den Grundsätzen, die bey der Multiplication gewiesen worden, I, 91. ganz natürlich fließet.

§. 85. Nunmehr multiplicire man die Ueberbleibsel bey D wie- der durch einerley Zahl, doch so, daß sie nicht größer werden, als die Producte bey B. Wir können in unserm Exempel sie durch nicht mehr als durch 1 multipliciren, und müssen sie also bey E schreiben, wie sie bey D stehen. Diese Producte bey E ziehe man nun wieder von den über ihnen stehenden Producten ab, und bemerke die Ueberbleibsel bey F. Wiederum multiplicire man diese Ueberbleibsel bey F, beyde durch die größte Zahl, welche sie jedoch nicht größer macht als die Ueberbleibsel bey D. Diese Zahl ist hier wieder 2, und die Producte hat man bey G bemerkt. Man ziehe sie von den über ihnen stehenden Producten bey D ab, und bemerke den Ueberschuß bey H. Dieser ist hier $1 \times 91 = 13 \times 7$, das ist $91 = 13 \times 7$, und hieraus ist klar, daß sich 91 durch 7 dividiren lasse, und daß dadurch der Quotient 13 komme, weil nemlich 91 dem Product aus 7 und 13 gleich ist.

§. 86. Dieses nun hätte man zwar gar leicht einsehen können, wenn man bloß 91 durch 7 nach den ordentlichen Regeln dividiret hätte. Allein wir sollen zeigen, daß eben dieses unter den Umständen, die wir angegeben haben, beständig folge, und dieses einzusehen, leiten uns nachfolgende Betrachtungen, welche sich auf die gegebene Rechnung gründen. Man hat in derselben in der That nichts anders gethan, als daß man den größten gemeinschaftlichen Theiler der Zahl 19 die bey A und der Zahl 7- die bey B im Anfang steht, gesucht hat. Denn hätte man diesen größten Theiler finden wollen, so hätte man II, 11. vorgefahren müssen, wie nachstehende Rechnung weist. Damit diese desto leichter mit der vorigen II, 84. zusammen gehalten werden könne, sind die Zahlen, welche insonderheit zu vergleichen sind, mit einerley Buchstaben bezeichnet, nur haben wir uns hier der kleinen an statt der

der grossen bedienet, welche in der vorigen Rechnung benngeschrieben sind:

II.
Abschnitt.

a	-	-	19	b	-	-	7
c	-	-	14	e	-	-	5
d	-	-	5	f	-	-	2
g	-	-	4				
h	-	-	1				

Der gemeinschaftliche Theiler ist h, und weil die Zahlen 19 und 7 deren gemeinschaftlichen Theiler man suchte, einfache Zahlen sind, und durch keine andere Zahlen können getheilet werden, II. 83. so konte bey h, nachdem man die Arbeit bis ans Ende fortgesetzt, nichts anders kommen, als die Einheit, II. 68. und demnach kan auch der erste Factor bey H keine andere Zahl als die Einheit seyn. Der zweyte Factor des ersten Productes bey H nemlich 91, ist eben die Zahl, von welcher zu zeigen war, daß sie sich theilen lasse, denn diese Zahl ist niemals verändert worden. Und es ist demnach das Product bey H allezeit die Zahl, deren Stelle hier 91 vertritt, selbst, weil 1 nicht multipliciret. Nun ist diese Zahl dem zweyten Producte bey H 13×7 nothwendig gleich, wie aus der Art, wie dieses Product heraus gebracht worden ist, erhellet. Es ist aber der zweyte Factor dieses Productes die Zahl 7, von welcher man zeigen sollte, daß sie die erstern 91 dividire, und kan niemals eine andere Zahl seyn, weil man diese Zahl ebenfalls immer stehen lassen, wie sie im Anfang stunde: und demnach erhellet hieraus, daß allezeit der Factor, dessen Stelle hier 91 vertritt, ein Product aus der einfachen Zahl, an deren Stelle hier 7 steht, und einer andern Zahl sey, und das ist dasjenige, so wir erweisen sollten.

S. 87. Durch die Wiederholung desjenigen so wir eingesehen, und durch die Anwendung desselben auf verschiedene Fälle, werden uns die Sachen immer klarer, und dieses zu befördern, wollen wir die Rechnung hersehen, durch welche gezeigt werden kan, daß wenn die Producte 7×247 und 91×19 gleich sind, und im übrigen alles bleibt wie vorhin, (wie denn auch diese Zahlen selbst von denjenigen, die wir bereits gebraucht, nicht verschieden sind; sondern nur in verkehrter Ordnung stehen) sich auf 247 durch 19 theilen lasse: Wir multipliciren zu dem Ende 247 in 19 und sehen:

Q 3

A. 7×247

II.
Aufsätze.

A. $7 \times 247 = 91 \times 19$

E. $5 \times 247 = 65 \times 19$

F. $2 \times 247 = 26 \times 19$

B. $19 \times 247 = 247 \times 19$

C. $14 \times 247 = 182 \times 19$

D. $5 \times 247 = 65 \times 19$

G. $4 \times 247 = 52 \times 19$

H. $1 \times 247 = 13 \times 19$

Weil nun hier wieder bey H gefunden wird $247 = 13 \times 19$, das ist, weil die Zahl 247 ein Product ist aus 13 und 19 so läßt sich diese Zahl 247 nothwendig durch 19 theilen. Uebrigens zeigt die Ordnung der Buchstaben die bey den Zahlen steht, wie die Rechnung zu verrichten sey.

S. 88. Hieraus ist nun dasjenige gar leicht zu schließen, so wir II, 82. gesetzt, und zu beweisen vorgenommen haben, daß nemlich einerley Zahl nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammen gesetzt seyn könne. Wir wollen bey unserm Exempel bleiben, und die Zahl 1729 nehmen. Wir wollen setzen, daß jemand unternehme diese Zahl in einfache Factore, auf verschiedene Art zu zerfallen, einmal zum Exempel in diese A, B, C, und das zweyte mal in drey oder mehrere andere a, b, c, so müste er seine Arbeit ohngefehr so anfangen. Er müste die gegebene Zahl 1729 erstlich durch eine nach Belieben angenommene einfache Zahl 7 dividiren, und so denn auch durch eine andere, zum Exempel 19, dadurch bekäme er verschiedene Quotienten 247 und 91, und diese könten ihm, so er nicht weiter nachdächte, Hofnung machen, was er sucht, zu finden. So bald er aber sich des eben erwiesenen Satzes erinnert und erweget, daß der erste Theiler 7 in dem zweyten Quotienten 91 als ein Factor vorkommen müsse, und der zweyte Theiler 19 in dem ersten Quotienten, so sieht er leicht, daß er in seiner Unternehmung nicht weit kommen werde. Denn er kan hieraus schließen, daß der erste Quotient 91 nothwendig ein Product aus 19 und einer andern Zahl, die wir indessen N nennen wollen, seyn müsse, und daß also die Zahl 1729 aus diesen dreyen Factoren $7 \times 19 \times N$, bestehe. Aus eben dem Grunde muß er schließen, daß in dem zweyten Quotienten, welchen er durch die Division der Zahl 1729 durch 19 heraus gebracht, der Theiler der ersten Division enthalten sey, daß er diesen Quotienten als ein Factum aus 7 und einer andern Zahl, die wir mit M bedeuten wollen, ansehen müsse, und daß demnach die Zahl 1729 Selbst diesem Product $19 \times 7 \times M$ gleich sey. Diese Producte $7 \times 19 \times N$ und $19 \times 7 \times M$ sind einander gleich, denn ein jedes derselben ist =

1729,

1729, und wenn man sie beyde durch 7×19 dividiret, so siehet man, daß die Zahlen M, N, ebenfalls einander gleich seyn. In unserm Exempel ist $N = M = 13$, welches eine einfache Zahl ist, und so oft dergleichen vorkommt, siehet man ohne weiter zu gehen, daß die Zahl, welche man angenommen, nicht aus verschiedenen einfachen Zahlen zusammengesetzt seyn könne. II. Abschnitt.

§. 89. Wird aber diese Zahl, die wir uns unter N vorstellen, nicht einfach befunden, so ist sie doch wieder aus zweyen einfachen und einer andern Zahl Q, welche auch 1 seyn kan, zusammen gesetzt, und diese einfache Zahlen, werden einerley befunden, wenn man der gegebenen Anweisung, sie heraus zu bringen, folget. Von der Zahl Q aber kan nunmehr eben das gezeigt werden, so vorher von N oder M gezeigt worden ist, und so immer fort, bis man auf einfache Zahlen kommt; woraus denn un widersprechlich folget, daß keine zusammengesetzte Zahl durch die Multiplication anderer und anderer einfachen Zahlen entstehen könne.

§. 90. Demnach läßt sich keine Zahl, außer den einfachen Zahlen, durch deren Multiplication sie entstanden, durch andere Zahlen dividiren, als durch Producte zweyer, dreyer oder mehrerer dieser einfachen Zahlen. Und man kan alle Zahlen leicht finden, welche eine Zahl theilen, wenn man sie in ihre einfache Zahlen zerfällt hat, denn man darf so dann nur die Producte jeder zwey, jeder drey, jeder viert und so ferner, dieser einfachen Zahlen machen, um die Theiler alle zu bekommen. Die Zahl 546 zum Exempel, entstehet aus der Multiplication der einfachen Zahlen 2, 3, 7, 13, und ist dem Product $2 \times 3 \times 7 \times 13$ gleich, die Theiler derselben sind demnach 2, 3, 7, 13, und 2×3 , 2×7 , 2×13 , 3×7 , 3×13 , wie auch 7×13 , und ferner $2 \times 3 \times 7$, $2 \times 3 \times 13$, $2 \times 7 \times 13$ und $3 \times 7 \times 13$, durch andere Zahlen, als diejenige, welche wir angezeigt, läßt sich die Zahl 546 nicht theilen, weil sie sich sonst auch aus andern einfachen Zahlen müste zusammen setzen lassen.

Erläuterung der gemeinschaftlichen Theiler verschiedener Zahlen.

§. 91. Wenn demnach zwey Zahlen aus einfachen zusammen gesetzt sind, die erste $A = 2 \times 3 \times 17$, und die zweyte $B = 5 \times 7 \times 13$, und die einfache Zahlen, aus welchen A zusammen gesetzt ist, sind von den einfachen Zahlen, durch deren Multiplication B entstehet, verschieden, so ist kein Gedanke, daß man einen gemeinschaftlichen Theiler vor beyde Zahlen

II. **Abchnitt.** Zahlen A und B finden werde, und es beziehen sich also solche Zahlen auf einander als einfache Zahlen. Im Gegentheil wenn zwei Zahlen $C = 2 \times 3 \times 5$, und $D = 5 \times 2 \times 13$ aus einfachen Zahlen dergestalt entstanden sind, daß unter den einfachen Zahlen deren Multiplication C bringet, etliche enthalten sind, die auch unter den Factoren der Zahl D stehen, dergleichen hier 2 und 5 sind, so haben die Zahlen gemeinschaftliche Theiler: nemlich eben die einfache Zahlen 2 und 5, welche bey denselben beyderseits vorkommen; und das Product derselben 10. Dieses Product, welches der größte gemeinschaftliche Theiler ist, wird durch die Reguln gefunden, die wir oben gegeben. II, 65.

S. 92. Wenn drey zusammengesetzte Zahlen $A = 2 \times 3 \times 7 \times 13$, $B = 3 \times 7 \times 17$, und $C = 5 \times 7 \times 13$ gegeben sind, so ist der gemeinschaftliche Theiler aller dreyen die einfache Zahl, oder das Product der einfachen Zahlen, welche zugleich in A, B und C vorkommen, und bey den gegebenen Zahlen keine andere als 7. Man findet diese Zahl, wenn man erstlich den gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B suchet, und so dann den gemeinschaftlichen Theiler dieses gefundenen Theilers 3×7, und der Zahl C ausmacht, welcher kein anderer seyn kan, als die Zahl 7. Man siehet II, 91. daß dieser Theiler der größte seyn werde, welchen man haben kan, wenn man so wohl Anfangs den größten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B findet, als auch hernach den größten gemeinschaftlichen Theiler des vorigen und der Zahl C nimt.

S. 93. Auf eben die Art kan man den größten gemeinschaftlichen Theiler von vier Zahlen A, B, C und D finden, wenn man erstlich den größten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen A und B heraus bringet, welchen wir a nennen wollen, so dann den größten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen a und C suchet, welcher b heißen soll, und endlich den größten gemeinschaftlichen Theiler der Zahlen b und D. Dieser wird die größte der Zahlen seyn, welche die vier Zahlen A, B, C und D theilen. Mit mehrern Zahlen verfähret man auf eben die Art, und alles dieses, so sonst etwas weitläufig müste dargethan werden, fließet aus demjenigen, so wir von der Zusammensetzung der Zahlen gewiesen haben, ohne Umschweif.

Anwendung dieser Betrachtungen auf die Brüche.

S. 94. Wenn demnach die Glieder eines Bruchs beyde in die einfache Zahlen zerfällt werden, aus deren Multiplication sie entstanden

den sind, so siehet man leicht, ob sich dieser Bruch zu kleinern Benennungen bringen lasse, und wie dieses geschehen könne. Man darf nemlich nur diejenigen einfachen Zahlen, welche in dem Zehler und Nenner zugleich vorkommen, aus der Multiplication weglassen, denn dadurch werden die Glieder des Bruchs durch die gedachten einfachen Zahlen, oder durch die Producte aus denselben, dividiret, und die noch übrige einfache Zahlen sind die Quotienten. Als wenn man die Glieder des Bruchs $\frac{42}{22}$ in ihre einfache Zahlen zerfället, den Zehler in 2, 3, 7, und den Nenner in 2, 2, 3, 11, so bekommt der Bruch dieses An-

II.
Anschaut.

sehen $\frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 11}$. Man lasse aus dem Zehler die Factore 2, 3 weg, und eben diese Zahlen vermeide man auch in dem Nenner, so wird der Bruch $\frac{7}{2 \times 11}$ oder $\frac{7}{22}$ dem vorigen gleich seyn, und jener ist damit

zu der kleinsten Benennung gebracht worden, durch welche er ausgedrückt werden kan. II, 13. Man siehet leicht, daß durch die Weglassung der Zahlen 2 und 3 man wirklich so wohl den Zehler $2 \times 3 \times 7$, als auch den Nenner $2 \times 2 \times 3 \times 11$, oder $2 \times 3 \times 2 \times 11$, durch das Product aus denselben 2×3 oder 6 dividiret habe, 1, 138. und daß 7 und $2 \times 11 = 22$ die Quotienten sind, die aus dieser Division kommen.

§. 95. Kommt nach dieser Zerfällung keine einfache Zahl in dem Zehler und Nenner des Bruchs zugleich vor, so läßt sich auch der Bruch nicht zu einer kleinern Benennung bringen, weil in diesem Fall der Zehler und der Nenner keine gemeinschaftliche Theiler hat, sondern die Glieder des Bruchs sich als einfache Zahlen auf einander beziehen. II, 91. So ist es mit dem Bruch $\frac{3}{7}$, welcher durch die Zerfällung seiner Glieder in ihre einfache Zahlen dieser wird, $\frac{3 \times 1}{7 \times 1}$;

es ist nicht zu gedenken daß man ihn zu einer kleinern Benennung werde bringen können, und eben hieraus können wir schließen, daß der Bruch $\frac{7}{22}$ oder $\frac{7}{2 \times 11}$ die kleinste Benennung habe, zu welcher der Bruch $\frac{42}{22}$ oder $\frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 3 \times 11}$ kan gebracht werden.

§. 96. Man kan dieses umkehren, und es ist richtig, daß, wenn ein Bruch sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen läßt; auch
R nach

II. nach der Zerfällung des Zehlers und Nenners desselben in die einfachen Zahlen, aus welchen sie entstanden sind, in dem Zehler keine einfache Zahl vorkommen müsse, welche auch in dem Nenner vorkommt. Denn wäre dieses, so könnte man, wie eben gewiesen worden, den Zehler so wohl als den Nenner durch diesen gemeinschaftlichen Factor theilen. Der Bruch $\frac{5}{12}$ läßt sich nicht durch eine kleinere Benennung ausdrücken: zerfällt man aber seine Glieder in ihre einfache Zahlen $\frac{2 \times 3}{5 \times 7}$, so kommt in dem Nenner keine einfache Zahl vor, welche zugleich in dem Zehler vorkäme.

§. 97. Und ist in einem Bruch der Zehler größer als der Nenner, und enthält also dieser Bruch eine oder etliche ganze Einheiten, so ist nicht möglich daß er einer ganzen Zahl, ohne anhängenden wahren Bruch gleich seyn könne, wenn nicht die einfache Zahlen des Nenners alle unter den einfachen Zahlen vorkommen, in welche der Zehler zerfällt werden. Denn in diesem Fall läßt sich der Bruch ohnmöglich auf die kleinste Benennung, die ein Bruch haben kan, nemlich die 1, bringen, und dieses muß geschehen können, wenn ein Bruch einer ganzen Zahl gleich seyn sol, II, 15. So ist es mit dem Bruch $\frac{5 \times 7 \times 11}{2 \times 3 \times 5}$ beschaffen, es kan derselbe zu dieser kleinern Benennung ge-

bracht werden $\frac{7 \times 11}{2 \times 3} = \frac{77}{6}$, man kan ihn auch durch eine ganze Zahl mit einem derselben anhängenden Bruch, nemlich durch $12 \frac{1}{2}$ ausdrücken, aber ohnmöglich durch eine ganze Zahl allein: da im Gegentheil der Bruch $\frac{1}{2} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 3}$ dem Bruch $\frac{1 \times 7}{1}$ das ist der ganzen Zahl 7 gleich ist, weil die einfache Zahlen des Nenners alle unter den einfachen Zahlen des Zehlers vorkommen.

§. 98. Man siehet leicht, daß man auch dieses umkehren, und sagen könne, daß wenn man eine Zahl, welche aus einer ganzen und einem wahren Bruch besteht, als $2 \frac{1}{2}$ ganz in Form eines Bruchs schreibt, $\frac{5}{2}$, und die Glieder dieses Bruchs in ihre einfache Zahlen zerfällt $\frac{2 \times 7}{5}$, es nicht möglich sey, daß alle einfache Zahlen des Nenners unter den einfachen Zahlen des Zehlers vorkommen, weil sonst der

der Bruch $\frac{1}{2}$, und folgendes auch die Zahl $2 \frac{1}{2}$ einer ganzen Zahl gleich seyn müßte.

II.
Abschnitt.

Einige Vortheile bey der Bruchrechnung.

§. 99. Sonst fließen hieraus noch einige Bequemlichkeiten bey den Bruchrechnungen, welche wir nicht ganz außer Acht lassen können, ob sie zwar so unumgänglich nothwendig nicht sind. Indem man zwey Brüche unter einerley Benennung bringt, können diese beyde Brüche öfters zu kleinern Benennungen gebracht werden, ohne daß diese kleinere Benennungen verschieden werden. Man kan dieses durch die II, 8. gegebene Regeln erhalten, aber man kan auch gleich anfangs, indem man die Brüche auf einerley Benennung bringt, dergestalt verfahren, daß man zugleich die kleinsten Benennungen erhalte, durch welche die Brüche ausgedruckt werden können.

§. 100. Gesezt, es seyn die Brüche $\frac{1}{3}$ und $\frac{7}{4}$ unter einerley Benennung zu bringen. Man verfalle, zu deutlichem Begriff desjenigen so wir weisen wollen, die Glieder derselben in ihre einfache Zahlen, so werden diese Brüche $\frac{1}{3 \times 3}$ und $\frac{7}{3 \times 4}$ und bringet man sie wirklich

unter einerley Benennung, indem man nemlich die Glieder eines jeden Bruchs durch den Nenner des andern multipliciret, so bekommt man vor den ersten Bruch $\frac{3 \times 4 \times 1}{3 \times 3 \times 3 \times 4}$ und vor den zweyten $\frac{3 \times 3 \times 7}{3 \times 3 \times 3 \times 4}$.

Diese Brüche lassen sich beyde zu kleinern Benennungen bringen, indem man ihre Nenner und Zehler durch 3 dividiret. Unter diesen kleinern

Benennungen sind die Brüche $\frac{4 \times 1}{3 \times 3 \times 4}$ und $\frac{3 \times 7}{3 \times 3 \times 4}$ und man siehet

leicht, daß dadurch die Gleichheit der Nenner nicht aufgehoben worden. Betrachtet man aber die Brüche etwas genauer, so siehet man, daß die Zahl 3 dadurch so wohl in den Nenner als in den Zehler der beyden Brüche gekommen ist, weil sie in beyden Nennern der Brüche

$\frac{1}{3 \times 3}$ und $\frac{7}{3 \times 4}$ welche unter einerley Benennung solten gebracht werden,

vorkommt: weil jede Zahl, welche dergestalt in beyden Nennern vorkommt, nothwendig auch in die Zehler gebracht werden muß, wenn man, wie bey dieser Arbeit erfordert wird, die Zehler durch die Nenner multipliciret.

II.
Anmerk.

§. 101. Man kan demnach gleich Anfangs aus den Nennern alle diejenigen einfache Factoren weglassen, welche in denselben vorkommen, das ist, man kan die Nenner beyde durch ihre größte gemeinschaftliche Theiler dividiren, und hernach die Zehler und Nenner der Brüche, an statt der ganzen Nenner, durch die Quotienten dieser

Division, multipliciren. Nämlich, wenn die Brüche $\frac{1}{3 \times 3}$ und $\frac{7}{3 \times 4}$ unter einerley Benennung zu bringen sind, welche zugleich die kleinste unter allen gemeinschaftlichen Benennungen sey, so sie haben können, so multiplicire man die Zehler und Nenner des ersten Bruchs nur durch 4, und den Zehler und Nenner des zweyten durch 3, welche Zahlen nemlich in den Nennern 3×4 und 3×4 , außer dem gemeinschaftlichen Factor 3 vorkommen, so kommen die Brüche $\frac{4 \times 1}{3 \times 3 \times 4}$ und $\frac{3 \times 7}{3 \times 3 \times 4}$ oder $\frac{4}{36}$ und $\frac{21}{36}$, welche alle die Eigenschaften haben, welche bey den Brüchen erfordert werden, die man an statt der gegebenen schaffen sollte. Diese Zahlen 3 und 4 sind die Quotienten, welche kommen, wenn man die Nenner der gegebenen Brüche 3 und 4 durch die größte Zahl dividiret, welche sie beyde theilet, nemlich durch die Zahl 3.

§. 102. Man kan sich eben dieser Betrachtung bedienen, wenn man mehr als zwey Brüche unter einerley Benennung bringen sol, welche zugleich die kleinste sey unter allen Benennungen, welche sie gemeinschaftlich haben können. Es seyn die drey Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{5}$ unter einerley Benennung zu bringen, so muß man, wie II, 28. gewiesen worden, die Glieder eines jeden dieser Brüche durch das Product aus den Nennern der zwey übrigen multipliciren. Man zerfalle aber diese Glieder in die einfache Zahlen, aus welchen sie entstanden,

so werden diese Brüche $\frac{1}{2 \times 3}$, $\frac{5}{7 \times 3}$, $\frac{2}{5 \times 3}$ und man siehet, daß nach der angewiesenen Multiplication die Brüche unter einerley Benennung nachfolgende seyn werden: $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}$, $\frac{2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5}{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}$ und $\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7}{2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7}$.

Die Nenner der gegebenen Brüche, lassen sich alle durch die Zahl 3 theilen, und dieses ist die größte Zahl, welche sie

ſie alle theilet. Dieſe Zahl ſtehet in einem jeden Zehler der gefundenen Brüche zwey mal als ein Factor, weil ein jeder Zehler in das Product zweyer Denner multipliciret worden iſt; und in einem jeden Denner ſtehet ſie drey mal als ein Factor. Demnach können die Glieder eines jeden Bruchs, durch 3×3 dividiret, und dadurch zu kleinern Benennungen gebracht werden: auf die Art

$$\frac{5 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 7}, \frac{2 \times 5 \times 5}{2 \times 3 \times 5 \times 7}, \frac{2 \times 2 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 7},$$

und man ſiehet, daß deswegen doch die Benennung einerley bleibt. Man würde aber gleich Anfangs dieſe kleinern Benennungen erhalten haben, wenn man den gemeinſchaftlichen Theiler 3 aller Denner aus der Multiplication weggelaſſen hätte.

§. 103. Und man begreiffet alſo, daß nicht allein drey Brüche unter einerley Benennung zu bringen, ſondern auch zu machen, daß dieſe gemeinſchaftliche Benennung die kleinſte ſey, welche ſie alle haben können, man dergestalt verfahren könne. Man nehme noch die vorigen Brüche, aber ohne ihre Glieder in einfache Zahlen zu zerfallen $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{5}{5}$, und ſchreibe vor jeden derſelben das Product aus den Dennern der übrigen, dergestalt $35) \frac{5}{2}, 90) \frac{7}{3}, 126) \frac{5}{5}$, dividire ſo dann dieſe Zahlen durch den größten gemeinſchaftlichen Theiler welchen ſie haben, welchen zu finden wir II, 92. gelehret; dieſer iſt hier 9, und die Quotienten, die durch dieſe Diviſion kommen, ſind 35, 10, 14. Dieſe Zahlen ſchreibe man neben die Brüche an ſtatt der vorigen $35) \frac{5}{2}, 10) \frac{7}{3}, 14) \frac{5}{5}$, und multiplicire ſo dann die Glieder eines jeden Bruchs durch die Zahl welche neben ihm ſtehet, ſo erlangt man das geſuchte, und die Brüche werden unter der kleinſten gemeinſchaftlichen Benennung welche ſie haben können, dieſe ſeyn: $\frac{175}{180}, \frac{70}{180}, \frac{70}{180}$. Auf oben die Art verfähret man, wenn mehr als drey Brüche unter eine Benennung zu bringen ſind, welche zugleich die kleinſte unter allen ſey, die ſie gemeinſchaftlich haben können.

§. 104. Bey der Multiplication eines Bruchs durch eine andere, welche, wie wir geſehen, die Multiplication eines Bruchs durch eine ganze Zahl, oder die Multiplication einer ganzen Zahl durch einen Bruch unter ſich begreift, II, 14. kan man ſich eines ebenmäßigen Vortheils gebrauchen, und dadurch das Product in kleinern Zahlen herausbringen. Es ſey $\frac{5}{2}$ durch $\frac{7}{3}$ zu multipliciren, welche Brüche, wenn

II.
Aufgabe.

man ihre Glieder in die einfache Zahlen zerfällt, aus welchen sie entstanden sind, dergestalt stehen $\frac{2 \times 2}{3 \times 7}$ und $\frac{3}{2 \times 5}$. Man multiplicire die Zehler und die Nenner, wie erfordert wird, II, 38. so wird das Product $\frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 5 \times 7}$ welches sich durch eine kleinere Benennung ausdrücken läßt, wenn man unter den Factoren der Glieder die beyden 2 und 3 wegläßt, und dadurch wird das Product $\frac{2}{5 \times 7}$ oder $\frac{2}{35}$. Man würde aber diese Zahlen 2 und 3 gleich Anfangs vermieden und nicht in das Product gebracht haben, wenn man den Zehler des ersten Bruchs 4 und den Nenner des zweyten 10 durch die größte Zahl 2 dividiret hätte, welche sie beyde dividiret, wodurch die Quotienten 2 und 5 kommen, und wenn man mit dem Zehler des zweyten Bruchs 3 und dem Nenner des ersten 21 eben so verfahren, und vermittelst der Division durch den gemeinschaftlichen Theiler 3 aus denselben die Quotienten 1 und 7 heraus gebracht hätte. Denn die Brüche $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{5}$ an die Stelle der ersten gesetzt, bringen durch ihre Multiplication das Product $\frac{2}{35}$ welches man suchte, in den kleinsten Zahlen. Es ist leicht zu sehen, daß dieser kleine Vortheil sich auch bey der Division anbringen lasse.

Drit-

Dritter Abschnitt.

Von den Quadrat- und Cubiczahlen.

Begriffe der Quadratzahlen.

§. 1.

Wenn man eine Zahl in sich selbst multipliciret, so wird das heraus gebrachte Factum eine Quadratzahl genennet. Man beziehet jede Quadratzahl auf diejenige Zahl aus deren Multiplication in sich selbst sie entstanden ist, und nennet sie das Quadrat, oder die Quadratzahl von derselben Zahl. Und eben so beziehet man die Zahl aus deren Multiplication in sich selbst die Quadratzahl entstanden ist auf diese, und nennet sie dieser Zahl ihre Quadratwurzel. Zum Exempel 4 multipliciret durch 4 giebt 16, und diese 16 ist eine Quadratzahl. Und zwar ist 16 die Quadratzahl der 4, und 4 ist die Quadratwurzel der 16, weil 4 und keine andere Zahl, wenn man sie in sich selbst multipliciret, die Zahl 16 bringet. Es werden demnach die Quadratzahlen leicht gemacht, wenn ihre Wurzeln gegeben sind.

§. 2. Wenn aber eine Quadratzahl gegeben ist, ist es weit gefehlet, daß die Wurzel mit eben solcher Leichtigkeit zu haben wäre. Es wird zwar jederzeit aus dem Product und dem einen Factor der andere Factor durch die Division gefunden, und kommt also auch die Quadratwurzel in die Stelle des Quotienten, wenn man das Quadrat durch die Wurzel dividiret. Allein dieses kan bey Erfindung der Wurzel nicht den geringsten Nutzen haben. Wer wird die Wurzel durch eine dergleichen Division suchen, da sie allbereits gegeben seyn muß, wenn man durch dieselbe dividiren sol? Es wäre dann, daß man durch vieles Probieren zur Wurzel kommen wolte, indem man ein gegebenes Quadrat durch eine Zahl nach der andern dividirte, bis man auf eine käme, welche einen Quotienten bringt, der eben so groß ist, als der angenommene Theiler. Dieses aber wäre eine entsetzliche Weitläufigkeit, und überhaupt kan in den Wissenschaften nicht ge-
dul-

III. **Wissener.** dußet werden, daß etwas zu finden, man bloß eine Anweisung zu wie derhöhlten Proben gebe. Wolte man aber ja probieren, so könnte man mit etwas geringerer Arbeit so lange Zahlen in sich selbst multipliciren, bis man auf eine käme, deren Quadrat eben so groß ist als die Zahl, deren Quadratwurzel man sucht. Diese Zahl wäre so dann die Wurzel. Als, die Wurzel von 16 ist 4, weil 4 mal 4 die Zahl 16 bringt, und wenn 16 durch 4 dividirt wird, der Quotient ebenfals 4 ist.

S. 3. Doch ist keine andere als diese angezeigte Weise anzugeben, diejenige Quadratwurzeln zu finden, welche nur eine Ziffer haben, oder, die Wurzeln 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 aus ihren Quadratzahlen zu erlangen. Da aber dieser Wurzeln ihre Quadrate bekant genug sind, so kan dieses niemand aufhalten. So bald man 4 nennet, fällt so gleich bey, daß zwey mal 2, viere bringe, und daß demnach die Zahl 2 die Quadratwurzel von 4 seyn müsse. Der Deutlichkeit nichts zu vergeben haben wir diese Zahlen mit ihren Quadraten besonders hieher gesetzt:

Wurzeln: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Quadrate: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

und wir werden künftig immer zum voraus sehen, daß von diesen Quadraten die Wurzeln bekant sind.

S. 4. Nimt man eine der eben gesetzten Quadratzahlen an, welche man wil, und setzet derselben ein, zwey, drey, oder mehr Paare von 00 bey, so kan die Wurzel ebenfals gefunden werden. Man nimt erstlich die Quadratwurzel der Ziffer, und setzet derselben so viele einzelne 0 zu, als viele Paare von 00 in dem Quadrat vorkommen. Die Quadratwurzel von 36 ist die Zahl 6, von 3600 ist die Quadratwurzel 60, von 360000 ist die Quadratwurzel 600, und so ferner, und dieses siehet man leicht ein, wenn man Acht hat, wie die Quadrate aus den Zahlen, welche am Ende eine oder etliche 00 haben, nemlich durch die Multiplication entstehen; vor jede 0 welche in einer Zahl am Ende angetroffen wird, kommen zwey 00 in das Quadrat derselben.

S. 5. Eben so ist es auch mit dergleichen Ziffern, welche vorne 00 haben, und welche zehentheilige Brüche bedeuten. Vor jede dergleichen 0 in der Wurzel stehen in dem Quadrat zwey 00, oder es sind so viele Stellen von der letzten Ziffer an, bis an den Ort der einfachen Einheiten. Das Quadrat von 0,2 ist 0,04, das Quadrat von 0,02 ist 0,0009, das Quadrat von 0,9 ist 0,81, und das Quadrat von 0,08 ist

ist 0,00064. Man darf nur die vorgeschriebene Zahlen, wie III, oben I, III. gelehret worden, in sich selbst multipliciren, wenn man Abschnitte diese Wahrheit ganz deutlich einsehen wil.

§. 6. Was aber die übrige Quadratzahlen anlangt, so sind ihre Wurzeln nicht so leicht gefunden, und wir können, wie dieses zu thun ist, oder, wie man sich gemeiniglich auszudrücken pflegt, wie die Wurzel eines jeden dergleichen Quadrats auszuziehen, nicht eher verständlich machen, als bis wir vorgestellet haben, wie die Theile einer Wurzel in ihre Quadratzahl hinein gebracht, und gleichsam verwickelt werden. Gleichwie nemlich oben I, 149. die Theile des Quotienten nach und nach aus der Zahl heraus zubringen gelehret worden, welche dividirt werden sollte; eben so wird auch die Wurzel nach und nach, und ein Theil derselben nach dem andern, aus der Quadratzahl heraus gebracht, und darzu werden Regeln zu geben seyn. Wie wil man aber den Grund derselben einsehen, wenn nicht vorher bekannt ist, wie die Theile der Wurzel in die Theile der Quadratzahl verwickelt worden? Wir haben aus eben der Ursache uns vorstellen müssen, wie die Zahlen aus dem Theiler und dem Quotienten entstehen, damit wir hinwiederum den Quotienten aus der Zahl, welche zu dividiren ist, und dem Theiler, heraus zu bringen setzten.

Art deren wir uns damals I, 83. bedienet, indem wir n durch eine Menge einzelner Einheiten vorge-
stellt
stellt
Augen
muß;
daß die Begriffe der Dinge nicht nur deutlicher sondern auch lebhafter werden, wenn sie nicht allein durch Worte oder andere dergleichen Zeichen ausgedrückt werden, sondern auch dasjenige selbst, so die Begriffe vorstellen sollen, den Augen vorgelegt wird.

Zusammensetzung der Quadratzahl einer zwentheiligen Wurzel.

§. 8. Man nehme demnach eine Zahl, was man vor eine wil, als AB, und theile dieselbe in die zwey Theile AC und CB, multiplicire so dann die Zahl in sich selbst, oder setze sie erst 3, und hernach 2 mal, nach Maßgebung der Theile, in welche man sie zerschnitten, so wird das Factum, welches die Quadratzahl der Wurzel 5 seyn wird, stehen,

F. 21,



III.
Abtheilung.

sehen, wie die Figur weiset; Aus welcher man so gleich sieht, warum solche Zahlen Quadratzahlen genennet werden: weil sich nemlich die Einheiten aus welchen sie bestehen, in solche Vierecke ordnen lassen, welche in der Geometrie Quadrate genennet werden.

§. 9. Man sieht aber auch dasjenige, welches wir hauptsächlich erweisen wolten, daß ein jedes Quadrat einer Zahl, die in zwey Theile getheilet worden ist, man sich füglich aus vier Theilen zusammen gesetzt vorstellen könne, und daß diese Theile sind, erstlich DC, das Quadrat des ersten Theils der Wurzel AC. Es ist sichtlich, daß die in Form eines Vierecks zwischen D und C gesetzte Zahl, nichts anders als dieses Quadrat des ersten Theils der Wurzel AC seyn könne. Denn die Linie CF schneidet von der Wurzel diesen ersten Theil AC ab, und die Querslinie DE hat man gezogen, nachdem man die Wurzel AB, und folgendes auch den ersten Theil derselben AC so oft gesetzt hatte, als oft in eben diesem Theil AC die Einheit enthalten ist, das ist, es ist die Linie DE gezogen worden, nachdem man den ersten Theil der Wurzel AC in sich selbst multipliciret hat.

§. 10. Zweytens, so steht an diesem Quadrate DC ein Factum CE, welches entstanden ist, indem der zweyte Theil der Wurzel, nemlich CB, welchen der Strich CF zur rechten läßt, durch den erstern Theil AC = BE multipliciret worden. Eine Wiederholung desjenigen so eben gesagt worden mit gar geringer Veränderung, kan dieses klar machen, wenn die Sache nicht vor sich selbst in die Augen leuchten sollte. Man kan dieses Factum bloß ein Factum aus den Theilen der Wurzel nennen, weil in der That einerley kommt, ob man den ersten Theil derselben BE durch den zweyten CB, oder den zweyten CB durch den ersten BE multipliciret. I, 87.

§. 11. Drittens hat man noch ein dergleichen Factum aus den zwey Theilen der Wurzel in der untern Abtheilung zur linken, nemlich DF, in welchem der erste Theil der Wurzel AC durch den zweyten CB multipliciret ist, und endlich kommt viertens in der untern Abtheilung zur rechten wieder ein Quadrat des andern Theils der Wurzel CB, nemlich FE, bey welchem wir uns desto weniger aufhalten nöthig haben, weil auf eben die Art einzusehen ist, daß in diesen Factum FE das Quadrat des zweyten Theils kommen müsse, nach welcher wir gereiget; daß in dem allerersten, und diesem letztern schräg gegen über stehenden Factum DC, das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten sey.

§. 12. Dies

S. 12. Dieses kürzer zu fassen muß man sagen, daß das Quadrat einer Wurzel AB die aus zweyen Theilen AC und CB zusammen gesetzt ist, das Quadrat eines jeden derselben Theile AC und CB enthalte, und noch über das zwey Producte, welche entstehen, wenn man die Theile der Wurzel AC und BC in einander multipliciret.

S. 13. Man wird dieses alles so wohl deutlicher verstehen, als auch davon besser überzogen werden, wenn man noch mehrere Quadrat-Zahlen von verschiedenen Wurzeln auf diese Art sehet. Man theile zum Exempel die Wurzel 7 in die zwey Theile 4×3 , so bestehet dieses Quadrat von 7, welches 49 ist aus den Theilen 4×4 , oder 16, 4×3 oder 12, nochmals 4×3 oder 12, und 3×3 welches 9 ist. Das ist, es bestehet das Quadrat von 7 aus den Quadrat-Zahlen der beyden Theile 4 und 3 in welche man 7 getheilet, und folgendes aus $16 + 9$, und über das aus dem Product dieser Theile gedoppelt genommen, oder 2 mal 12, welches 24 ist, und ist demnach das Quadrat $16 + 24 + 9$, das ist 49, wie allbereit bekannt ist, man kan diese Zahlen leicht in die Ordnung schreiben, in welcher die Zahlen der Wurzel stehen.

S. 14. Das gedoppelte Factum der Theile entstehet auch, wenn man einen der Theile der Wurzel, den ersten wenn man will, gedoppelt nimt, und durch den andern Theil multipliciret, L. 94. und dieses wollen wir mehrerer Bequemlichkeit halben künftig beständig annehmen. In unserm Exempel ist dieses Factum 24, welches kommt, wenn man den ersten Theil der Wurzel 4 gedoppelt nimt, und diese Zahl durch den andern Theil der Wurzel 3, multipliciret. $8 \times 3 = 24$.

S. 15. Auf eben die Art kan man auch die Quadratzahlen solcher Wurzeln machen, welche aus Zehnern und Einheiten bestehen, und diese sind es hauptsächlich, welcher wegen diese ganze Betrachtung von der Zusammensetzung der Quadrate aus den Theilen der Wurzel unternommen wird. Denn, es ist nicht nöthig zu lehren, wie eine Quadratwurzel, so nicht über 10 steigt, auszuziehen ist, weil dieses als vor sich bekannt angenommen worden ist; wohl aber müssen Regeln gegeben werden, nach welchen solche Wurzeln zu finden sind, die über 10 steigen.

S. 16. Es sey die Zahl, deren Quadrat man nehmen will 87, welche aus den Theilen 80 und 7 zusammen gesetzt ist: so bestehet diese Quadratzahl:

III.
Abschnitt.

1. Aus dem Quadrate des ersten Theils	6400
2. Aus dem Product der Theile gedoppelt	1120
3. Aus dem Quadrate des andern Theils	49

Und ist demnach die Summe dieser Zahlen 7569

Das gesuchte Quadrat von 87, wie dieses auch durch die Multiplication der 87 in sich selbst, das ist durch 87, gefunden wird.

§. 17. Ja selbst diese Multiplication weist uns die angegebene Zusammensetzung des Quadrats in diesem Falle. Man verfahre mit der Multiplication ordentlich:

87	87
87	87
<hr/>	
7×7	49
7×80	560
80×7	560
80×80	6400

□ 87 7569

so bekommt man erstlich 49, das Quadrat von 7, so dann 560 das Factum aus 80 durch 7, ferner nochmals 560, das Factum aus 7 durch 80, und endlich 6400 die Quadratzahl von 80. Man darf nur die Multiplication nach den gemeinen Regeln verrichten, aber kein Factum im Anfang mit dem andern vermischen, sondern jedes besonders schreiben, dieses einzusehen.

§. 18. Eben so kan man auch das Quadrat einer Zahl finden, welche zwey Ziffern und am Ende oder auch von vorne 00 hat. Man mache erstlich das Quadrat der Ziffer selbst, wie eben gewiesen worden, und hänge so dann so viele paare von 00 an dasselbe, als viele einzelne 0 in der Wurzel vorkommen. Demnach ist das Quadrat von 870, die Zahl 756900, das Quadrat von 8700 ist die Zahl 75690000, und so weiter.

Die Quadratzahl einer Wurzel die mehr als zweyen Theile hat, zusammen zu setzen.

§. 19. Dieses wäre hinlänglich uns nunmehr zur Ausziehung solcher Quadratwurzeln zu leiten, welche nur aus zwey Ziffern bestehen. Allein weil die Regeln dazu auch in der allgemeinen Regel enthalten sind, nach welcher alle Wurzeln, aus wie vielen Ziffern sie auch

III.

Abstract.

9 * * * *

36***

36 * *

• • • •

•

288

16

132496

Q. 3

Dec

III. der gestalt. Wenn man erstlich die Zahl 360 in zweye theilet, deren
 Abschnit. erstere 300 ist, und die zweyte 60, und so dann in der Zahl 364, vor
 den ersten Theil 360 und vor den zweyten 4 annimt: so ist

$$\begin{array}{rcl}
 P^2 = 300^2 = & 90000 & 90000 \\
 P^2 = 360^2 = & 129600 & 129600 \\
 364^2 = & \begin{cases} 2P \times p = 2 \times 360 \times 60 = 43200 \\ P^2 = 60^2 = 3600 \\ 2P \times p = 2 \times 360 \times 4 = 2880 \\ P^2 = 4^2 = 16 \end{cases} & 132496
 \end{array}$$

und folgendes das gesuchte Quadrat

S. 23. Es sind demnach die Zahlen, durch deren Addition die
 verlangte Quadratzahl gefunden wird, nachfolgende: Erstlich hat man
 9, das Quadrat der ersten Ziffer 3 der gegebenen Wurzel 364.
 Zweitens das Factum aus dieser Ziffer zwey mal genommen, durch
 die folgende 6, dieses ist 36. Drittens das Quadrat der zweyten Zif-
 fer 6, das ist, wieder 36. Viertens das Factum aus der ersten und
 zweyten Ziffer 36 zwey mal genommen durch die dritte, welches 288 ist.
 Fünftens das Quadrat der dritten Ziffer, 16.

S. 24. Und dieses ist eben der Anfang der Regel, nach welcher
 aus einer jeden Zahl, sie mag durch so viele Ziffern geschrieben seyn
 als man will, eine Quadratzahl zu machen ist, und man hat dieselbe
 nur nach eben den Gesetzen fortzuführen, nach welchen man sie ange-
 fangen. Wir wollen dieselbe ganz sehen, und mit einem Exempel
 erläutern, ehe wir zu ihrem Verweil schreiten.

S. 25. Es sey das Quadrat der Zahl 75342 zu machen, welche
 aus fünf Ziffern besteht: so nehme man

- 1) Das Quadrat der ersten Ziffer, welches 49 ist.
- 2) Das Factum aus der ersten Ziffer gedoppelt, oder aus 14
 durch die nachfolgende 5. Dieses Factum ist 70.
- 3) Das Quadrat der zweyten Ziffer 5, das ist 25.
- 4) Das Factum aus der ersten und andern Ziffer 75 gedoppelt,
 oder aus 150 durch die nächste dritte 3, welches ist 450.
- 5) Das Factum aus der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753
 aus 1506 durch die nächste 4, welche
 12048 ist.
- 6) Das Quadrat der vierten Ziffer 4, welches 16 ist.
- 7) Das Factum aus der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753
 aus 1506 durch die nächste 4, welche
 12048 ist.
- 8) Das

8). Das Factum aus der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7534 gedoppelt, oder aus 35068, durch die nächste 2, da denn 30136 kommt.

9). Das Quadrat der fünften Ziffer 2, welches 4 ist. Die also gefundene Producte sind richtig unter einander zu setzen, daß nemlich überall die Ordnungen der Einheiten, welche in denselben enthalten sind, in Acht genommen werden. Es ist dieses etwas leichtes; man darf nemlich, wenn man von dem ersten Quadrate anfängt, nur beständig das nächstfolgende Factum um eine Stelle weiter hinaus nach der rechten Hand rücken, und das nächste Quadrat wieder um eine Stelle weiter, so daß die Zahlen unter einander zu stehen kommen, wie hier sichtlich ist:

$$\begin{array}{r}
 49. \\
 70. \\
 25. \\
 430. \\
 9. \\
 6024. \\
 26. \\
 30136. \\
 \hline
 4 \\
 5676416964
 \end{array}$$

Die Summe aller dieser Zahlen ist das gesuchte Quadrat der Zahl 75342, welches, wenn man will, auch durch die Multiplication derselben in sich selbst kan gefunden werden.

§. 26. Die Richtigkeit dieser allgemeinen Regul ist nach eben der Weise einzusehen, nach welcher wir oben III, 20. gefunden, wie ein Quadrat einer Zahl, die nur aus drey Ziffern besteht, gemacht werde. Man mache erstlich das Quadrat der zwey ersten Ziffern 75 der gegebenen Zahl 75342, welches geschieht, wenn man III, 21. setzt $70 = P$, und $5 = p$, und machet:

$$P^2 = 7^2 = 49.$$

$$2P \times p = 14 \times 5 = 70.$$

$$p^2 = 5^2 = 25.$$

Diese drey Zahlen machen das Quadrat von 75. Wenn man nun zu den vorigen zweyen 75 die dritte Ziffer der gegebenen Zahl 3 hin-

III. zu thun, und nunmehr setze $P = 75$, oder eigentlich 750, also nur noch zu machen:

$$2P \times p = 150 \times 3 =$$

450

$$\text{und } p^2 = 3^2 =$$

9

Und damit ist das Quadrat von 753 fertig, als welches der Summe aller bereits gefundenen Zahlen gleich ist. Um nun weiter fortzugehen, setze man nunmehr $P = 753$ oder eigentlich 7530, und $p = 4$, welches die nächstfolgende Ziffer in der gegebenen Wurzel ist, so hat man, wie eben gesagt ist, bereits das Quadrat von P und hat also nur noch darzu zu setzen;

$$2P \times p = 1506 \times 4 =$$

6024

$$\text{und } p^2 = 4^2 =$$

16

Damit ist das Quadrat von 7534 auch gemacht. Man setze zu diesen noch die letzte Ziffer der gegebenen Wurzel 2 hinzu, und mache nun $P = 7534$, oder eigentlich 75340 und $p = 2$, so ist wieder P die Summe der bereits gefundenen Ziffer, und wenn man demnach zu diesen noch hinzu thut:

$$2P \times p = 15068 \times 2 =$$

30136

$$\text{und } p^2 = 2^2 =$$

4

So hat man alle Theile des Quadrats 75340 + 2, das ist alle Theile des Quadrats der Zahl 75342, und man darf diese demnach nur in eine Summe zusammen ziehen, damit dieses Quadrat wirklich in einer Zahl dargestellt werde. Man siehet aber leicht, daß diese Theile des Quadrats nach der gegebenen Regel entstanden sind.

§. 27. Vielleicht kommt einigen die Sache noch deutlicher vor, wenn wir sie bloß vermittelst der gegebenen Zeichen III, ar. kurz ausdrücken, welches nachfolgender Massen geschehen kan: woben wir uns wegen Enge des Raums an statt des gewöhnlichen Zeichens der Multiplication bloß eines Puncts (.) bedienen haben, welches wir zwischen die zwey Factoren gesetzt, welches zwar auch sonst bey vielen I, 89. gewöhnlich ist:

$$P \times p =$$

III. dritte bedeuten, oder eigentlich 3600 seyn muß. III, 4. Eben so siehet Abschnitt. man, daß das Quadrat der ersten Ziffer der Wurzel 3, welches 9 ist, sich in der ersten Abtheilung mit der letzten Ziffer derselben endige. Denn die erste Ziffer der Wurzel bedeutet hier Hunderte, oder ist eigentlich 300, und folgendes das Quadrat davon 90000. Und also ist es mit allen Quadraten, der einzelnen Ziffer der Wurzel beschaffen. Jene endigen sich allezeit zur linken an dem Theilungszeichen, und, so fern diese aus mehr als einer Ziffer bestehen, stehen jene von dannen weiter nach der linken zu.

S. 30. Da nun die Producte, welche außer obgedachten Quadraten noch in das Quadrat einer Zahl müssen gebracht werden, allezeit eine Ziffer weiter hinaus gegen die rechte zu gesetzt werden, wie man leicht siehet, wenn man auf die Zusammensetzung der Quadratzahlen, die wir gewiesen, III, 25. Acht hat, so kan es nicht anders seyn, sie müssen bey dieser Eintheilung einer Quadratzahl sich allezeit an dem Theilungszeichen zur rechten Hand endigen, und von dannen, im Fall sie aus mehr als einer Ziffer bestehen, weiter nach der linken zu zurücke stehen. So endiget sich in unserm Exempel das Factum aus 2 mal 3 durch 6 multipliciret oder 36 unter der 2, und das Factum aus 2 mal 36 durch 4, oder 288 unter der 9, und die übrige Ziffern derselben stehen von dannen weiter nach der linken Hand.

Die Wurzel aus einer ganzen Quadratzahl auszuziehen.

S. 31. Nach dieser Vorbereitung III, 28. wird die Ausziehung der Quadratwurzel folgender gestalt verrichtet. Man fängt dieselbe bey der ersten Classe zur linken Hand, dadurch an, daß man die Wurzel eines solchen Quadrats nimt, welches unmittelbar kleiner ist, als die Ziffer dieser Classe. Dieses ist so gleich die erste Ziffer der gesuchten Wurzel. Die nächste und alle folgende werden durch eine Division gefunden, aber um jede neue Ziffer zu finden, muß man auch einen besondern Theiler haben. Und dieser Theiler ist allezeit doppelt so groß, als alle dasjenige, so von der Wurzel bereits gefunden worden, und wird demnach immer grösser und grösser, je weiter man in Ausziehung der Wurzel fortsähret. Außer dem aber ist die Ausziehung der Wurzel von der gemeinen Division darin unterschieden, daß man nach geschehener Division hier nicht nur das Product aus dem Theiler in den Quotienten, sondern noch über dieses das Quadrat des Quotienten abziehen muß, nachdem dieses an seinen

nem gehörigen Platz gesetzt worden. Dieses ist die erste Einleitung. III.
Es wird alles deutlicher werden, wenn wir die Regeln ordentlich aus
einander setzen, und mit einem Exempel erläutern.

§. 32.

$$\begin{array}{r}
 13 \overline{) 132496} \quad 364 \\
 \underline{9} \\
 6) 424 \\
 \underline{36} \\
 36 \\
 72) 2896 \\
 \underline{288} \\
 16 \\
 \underline{16} \\
 0
 \end{array}$$

1) Die Zahl 9 ist das Quadrat, welches unmittelbar kleiner ist als die Ziffer der ersten Classe 13, denn das nächste Quadrat 16 ist schon größer. Jenes Quadrat wird von 13 abgezogen, und die übergebliebene 4 darunter bemerkt, die Wurzel aber dieses Quadrats 3, welche 3 ist, wird als der erste Theil der gesuchten Wurzel des gegebenen Quadrats 132496, an der Stelle bemerkt, wo man sonst bey der Division den Quotienten hinschreiben pflegt.

2) Nunmehr setze ich, um mich desto weniger zu verwirren, der übergebliebenen 4 die nächste Ziffer des Quadrats, welche die erste der folgenden Classe ist, bey, welche mit der vorigen 42 giebt. Aus dieser 42 wird durch die Division der nächste Theil der Wurzel gebracht. Um aber diese Division zu verrichten

3) Multipliciret man dasjenige, so von der Wurzel bereits gefunden worden ist, als hier 3, durch 2, das Factum 6 ist der Theiler, welchen man an seiner Stelle neben der Zahl 42, die zu dividiren ist, antrifft.

4) Nachdem alles zur Division fertig, hat man nunmehr nur die besagte Zahl 42 durch den beygesetzten Theiler 6 zu dividiren. Der Quotient 6 ist die zweyte Ziffer der Wurzel, und wird neben die bereits gefundene erste, welche 3 war, gesetzt.

5) Nunmehr schreibt man unter die Zahl 42, welche man dividirt hat, das Product aus dem Quotienten in den Theiler, welches 36 ist. Ferner rückt man die nächste Ziffer des Quadrats, welche die letzte

III. ~~Wohin.~~ letzte der zweyten Classe und hier 4 ist, herunter, und setzet unter dieselbe das Quadrat des letzt gefundenen Quotienten 6, das ist, 36, dergestalt, daß es sich unter dieser Ziffer endige. So wohl das Quadrat als das Factum, welche man bloß in den Gedanken zusammen setzen kan, wird von den über ihnen stehenden Ziffern abgezogen, das Ueberbleibsel ist hier 28, so bemerkt werden muß, und damit ist die zweyte Classe abgefertiget.

6) Mit der dritten Classe verfähret man nicht anders als mit der zweyten, nur ist hier wohl zu merken, daß nicht die einzelne letzte Ziffer der Wurzel 6 gedoppelt genommen den Theiler gebe, sondern daß alle dasjenige, so an der Wurzel bereits gefunden worden, gedoppelt genommen werden müsse, um den Theiler zu erhalten, und demnach ist hier der Theiler, mit welchem die nächste Ziffer der Wurzel gefunden wird, 36 gedoppelt, oder 72. Dieser Theiler stehet in dem Exempel an seinem gehörigen Ort, bey der Zahl, welche dividiret werden sol, welche

7) hier wiederum das Ueberbleibsel ist von den vorigen Classen, nemlich 28 mit beygesetzter ersten Ziffer der nächsten dritten Classe 9, daß demnach die zu theilende Zahl 289 ist. Die würlliche Division dieser 289 durch 72 bringt den Quotienten 4, welcher die dritte Ziffer der Wurzel, und den vorigen bereits gefundenen beyzusetzen ist.

8) Nun wird wieder unter die Zahl, welche man dividiret hat, das Factum aus dem Theiler 72, und dem Quotienten 4 gesetzt. Dieses ist 288. Es wird die letzte Ziffer dieser dritten Classe, 6, ebenfalls herunter gerückt, und unter derselben das Quadrat des letzten Quotienten 4 dergestalt gesetzt, daß es sich mit dieser Ziffer endige. So wohl das Quadrat, als das in Gedanken zusammen gesetzte Product, wird von den überstehenden Ziffern weggenommen. In unserm Exempel bleibt nichts übrig, und dieses ist ein Zeichen, daß das gefundene, 364, die wahrhafte Quadratwurzel der gegebenen Zahl sey.

S. 33. Man wird wohl thun, und dieses alles vollkommener einsehen, wenn man das vorgegebene und andere dergleichen Exempel, zu welchen man die Quadrate vorher nach der gegebenen Anweisung gefunden, III, 25. selbst berechnet. Auf diese Art siehet man deutlich, wie die Zahlen, deren in den eben III, 32. gegebenen Regeln Erwehung geschehen ist, nach und nach heraus kommen. Eben dieses ist in allen dergleichen Fällen zu bemerken. Nichts ist fähiger uns zu über-

zu-

zeugen, daß wir eine Regel vollkommen verstanden haben, als wenn wir uns im Stande sehen dasjenige zu thun, so dieselbe haben wil; zu geschweigen daß man sich zu bestreben hat, eine Fertigkeit in Ausübung der Regeln zu erhalten, welche nicht anders als durch eine wiederholte Übung kan erlangt werden.

S. 34. Wir wollen diese Arbeit zu befördern noch ein Exempel hieher setzen, wozu wir ein ebenfalls ein oben III, 27. zusammen gesetztes Quadrat annehmen wollen:

	56	76	41	69	64	75342
	49	A
14)	776					B
	70		C
	25		
150)	5141					D
	450		E
	9		
1506)	63269					F
	6024		G
	16		
15068)	301364					H
	30136					I
	4					
	000000					

Der erste Theil der Wurzel 7 ist hier wieder die Wurzel von dem Quadrat 49, welches der Ziffer der ersten Classe 56 am nächsten komt. Die Zahl aus welchem die zweyte Ziffer der Wurzel durch die Division gebracht wird ist 77, und der Theiler ist zwey mal so groß als der bereits gefundene Theil der Wurzel 7, und demnach 14: Also ist der zweyte Theil der Wurzel 5. Die Zahl aus deren Division die dritte Ziffer der Wurzel kommt, ist 514, und der Theiler darzu zwey mal 75, oder 150, welche den Quotienten 3 als die gesuchte dritte Ziffer geben. Die Zahl durch deren Division die vierte Ziffer der Wurzel gefunden wird, ist 6326 und der Theiler 1506, nemlich die bereits gefundene ersten drey Ziffern der Wurzel 753 gedoppelt genommen. Endlich ist die Zahl durch deren Division der letzte Theil der Wurzel erhalten.

III.
Abschnitt.

halten wird 30136, und der Theiler wieder zwey mal so viel als alle Ziffer der Wurzel die bereits gefunden sind, oder 2×7534 , welches 15068 machet. Es bleibet hier nach der letzten Subtraction wieder nichts übrig, und ist also wieder die gefundene Zahl 7534 die richtige Wurzel, wie auch schon vorher aus der Zusammensetzung dieser Quadratzahl bekannt war.

§. 35. Die dieser Rechnung beygeschriebene Buchstaben werden uns dienen den Grund dieser Arbeit anzugeben, und zu zeigen, daß durch die vorgeschriebene Regula allerdings die Wurzel des gegebenen Quadrats gefunden werde, wiewohl dieses fast von selbst in die Augen leuchten muß, wenn man nur dasjenige, so von der Zusammensetzung der Quadratzahlen gelehret worden, im frischen Gedächtniß hat. III, 25. Ich weiß, daß in den Ziffern der ersten Classe das Quadrat des ersten Theils der Wurzel enthalten: aber daß auch in diesen Ziffern noch andere Einheiten seyn können, welche von den nächstfolgenden Producten herüber gegangen. Es ist demnach die erste Ziffer der Wurzel 7, die Quadratwurzel der Zahl der ersten Classe, oder eines Quadrats, als hier 49 welches unmittelbar kleiner ist, und diese Betrachtung giebt mir den ersten Theil der Wurzel, deren Quadrat ich von den Ziffern der ersten Classe wegnehmen muß, weil es zur Ausziehung nichts weiter nützen kan, und wenn es da bliebe, nur dienen würde die nächstfolgende Theile des Quadrats, welche man doch aus einander sehen wil, (um die Theile der Wurzel nach und nach zu bekommen,) mit fremden Zusätzen zu verwirren. Nach geschehener Subtraction also der Zahl bey A ist in der nächsten Ziffer der zweyten Classe, und den andern, welche von dannen weiter zur linken stehen, das ist, in unserm Exempel in 77, nichts als das Factum aus dem gefundenen Theil der Wurzel zwey mal genommen und der nächsten Ziffer der Wurzel, das ist das Factum aus 14×5 enthalten, ausser noch einigen Einheiten, welche noch von den Producten und Quadraten, die weiter zur rechten stehen, herüber gegangen sind. Wenn man demnach mit 14 dividiret, so kan nichts anders als die nächste Ziffer der Wurzel 5 zum Quotienten kommen. Man ziehet das Factum bey B aus dem ersten Theil der Wurzel gedoppelt und dem Quotienten 5 ab, und weil mit der nächsten Ziffer die Zahl C, als das Quadrat dieses zweyten Theils der Wurzel, sich endiget, so subtrahiret man dieses Quadrat ebenfalls, nachdem man, größserer Deutlichkeit halben, diese zweyte Ziffer der Classe, welche hier 6 ist, zu den vorhergehenden herunter gesetzt: weil doch

doch diese beyde Zahlen bey Erfindung eines neuen Theils der Wurzel III. keinen weitem Nutzen schaffen können, und im Gegentheil, wenn sie ~~Wurzel~~ ^{Wurzel} da bleiben, das folgende verwirren würden. Weil nun also mit der ersten Ziffer der dritten Classe wiederum ein Factum aus den gefundenen zwey Ziffern der Wurzel gedoppelt durch die dritte multipliciret, sich endiget, und von dannen weiter nach der linken sich erstrecket, so ist klar, daß dieser dritte Theil der Wurzel wieder kommen müsse, wenn man diese Ziffer, nemlich die vorher von den vorhergehenden Classen nach geschehenem Abzug übergeblieben, mit Beysetzung der ersten Ziffer der dritten Classe, durch dasjenige, so an der Wurzel allbereit gefunden worden ist, zwey mal genommen, dividiret. Mit Abziehung des Products und des Quadrats hat es die Verwandtniß wie vorher, und so gehet es bis ans Ende: daß wir nicht nöthig finden in dieser Betrachtung, welche ein jeder vor sich vollführen kan, weiter zu gehen.

§. 36. Man kan die Sache auch auf die Art einsehen. Wir haben die vorgelegte Quadratzahl, in ihre Theile A, B, C, D, E, F, G, H, I zergliedert, welche Theile weil sie nach und nach von derselben abgezogen, endlich nichts übrig lassen, allerdings die gedachte Quadratzahl ausmachen, und ihr gleich sind. Man hat aber diese Theile von der Art angenommen als diejenige sind, aus welchen jede Quadrate, nach der bekannten Regel zusammen gesetzt werden:

A ist das Quadratum der ersten Ziffer 7.

B ist das Product aus jener gedoppelt durch die andere 5.

C ist das Quadrat dieser Ziffer 5.

D ist wieder das Product aus den ersten zwey Ziffern 75 gedoppelt durch die dritte 3.

E ist das Quadrat dieser dritten Ziffer 3.

F ist das Factum aus der ersten, zweyten und dritten Ziffer 753 gedoppelt durch eine vierte 4.

G ist das Quadrat dieser vierten Ziffer 4.

H ist abermal ein Factum aus der ersten, zweyten, dritten und vierten Ziffer 7534 gedoppelt durch die fünfte 2.

I ist das Quadrat aus dieser fünften Ziffer, und hierbey sind allemal die Größen der Einheiten, welche in allen diesen Quadraten und Producten vorkommen gehörig beobachtet, wie aus der Rechnung sichtlich ist.

Es ist demnach allerdings die Zahl welche aus A, B, C, D, E, F, G, H, I, gehörig zusammen gesetzt ist, das richtige Quadrat der Zahl 75342.

III. 75342. III. 25. Da nun aber die gegebene Zahl 5676416964, aus gewissem Theilen A, B, C, D, E, F, G, H, I bestehet, so muß dieselbe notwendig das Quadrat der gefundenen Zahl 75342 seyn, und diese ist demnach die Quadratwurzel von jener, welche Wurzel man hat finden sollen.

Ganze Zahlen, deren Quadratwurzeln keine ganze Zahlen sind.

§. 37. Auf die Art wird die Wurzel einer jeden ganzen Zahl gefunden, wenn diese Wurzel ebenfalls eine ganze Zahl ist. Aber nicht alle ganze Zahlen haben ganze Zahlen zu Wurzeln, und dieses ist leicht einzusehen. Wenn man die Quadrate der gemeinen Zahlen vor sich schreibt 1, 4, 9, 16, 25, so findet man, daß zwischen jeden zweyen derselben noch andere ganze Zahlen fehlen. Zwischen 1 und 4 die 2, und zwischen 4 und 9 die 5, 6, 7, 8, zwischen 9 und 16, die 10, 11, 12, 13, 14, 15, und also immer mehrere, je weiter man fortgehet. Diese Zahlen können unmöglich Wurzeln haben, die ebenfalls ganze Zahlen wären. Denn die Wurzel von 3 zum Exempel, wenn sie eine ganze Zahl seyn sollte, müßte ohnstreitig größer seyn als 1 die Wurzel von 1, und kleiner als 2, die Wurzel von 4, weil 3 zwischen diesen beyden Quadraten in der Mitte stehet. Nun ist hier keine ganze Zahl möglich, welche größer wäre als 1 und kleiner als 2. Demnach kan auch 3 keine Wurzel haben die eine ganze Zahl wäre. So ist es mit der 8, welche Zahl zwischen die Quadrate 4 und 9 fällt, es muß ihre Wurzel größer seyn als die Wurzel von 4 welche 2 ist, und kleiner als die Wurzel von 9, welche 3 ist. Es ist keine ganze Zahl möglich, welche zwischen 2 und 3 fiel, und größer wäre als 2, kleiner aber als 3, derowegen kan auch keine ganze Zahl die Wurzel von 8 abgeben.

§. 38. Es fallen aber zwischen jede 2 ganze Zahlen unendlich viele gebrochene. Zwischen 1 und 2 stehet die gebrochene Zahl $1\frac{1}{2}$, $1\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $1\frac{4}{5}$ und noch viele andere mehr, ja man mag derselben so viele geschrieben haben als man wil, so kan man doch immer mehrere und neue schreiben, welches eben dadurch angezeigt wird, wenn man sagt, es fallen zwischen 1 und 2 unendlich viele gebrochene Zahlen. Sollte nicht unter allen diesen Brüchen ein einziger die genaue Wurzel der Zahl 3 seyn, so daß wenn er in sich selbst multipliciret würde, eben 3 und nicht mehr oder weniger käme? Und ob zwar 8 keine Wurzel in ganzen Zahlen hat, als die zwischen 2 und 3 fallen müßte, so fal-

fallen doch wieder zwischen 2 und 3 unendlich viele Brüche, das ist, so viele, daß man sie ohnmöglich alle schreiben, denken, oder aussprechen kan, und unter diesen sind $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{4}{5}$ u. $2\frac{5}{6}$, $2\frac{6}{7}$ u. sollte nicht unter diesen allen ein einziger Bruch angetroffen werden können, welcher die genaue Wurzel von 8 wäre, und in sich selbst multipliciret eben die Zahl 8 brächte? So unglaublich es scheint, daß unter so vielen Millionen Brüchen, nicht ein einziger die hier erfordernte Größe haben sollte, so wird doch verneinet, daß ein Bruch angegeben, geschrieben oder ausgesprochen werden könne, welcher eine dergleichen Wurzel abgeben könnte. Es wird zum Exempel verneinet, daß die Wurzel der Zahl 8, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{4}{5}$ oder sonst ein anderer dergleichen Bruch sey, welchen man angeben kan.

§. 39. Wie ist es aber möglich, daß unter den unendlich vielen Brüchen, die zwischen der 2 und 3 stehen, nicht ein einziger die erwähnte Größe haben sollte? Da ihrer unendlich viele, und alle in der Größe von einander unterschieden sind, müste sich doch endlich ein einziger finden, welcher eben paßte: man kan denjenigen welcher zu klein ist nach und nach vermehren, und auf die Art endlich auf einen solchen Bruch kommen, welcher durch die Multiplication in sich selbst eben 8 bringt, Unter vielen Millionen Leisten, welche alle verschiedene Größe haben, aber doch ohngefehr nach der Größe des Fußes eines erwachsenen Menschen gemacht sind, sol kein einziger seyn, welcher eben vor meinen Fuß gerecht wäre? ist dieses nur einiger massen gläublich?

§. 40. Dieser Einwurf wäre nicht zu beantworten, wenn man sagte, 8 habe gar keine Quadratwurzel, oder es sey an sich widersinnig, wenn man sich eine Zahl vorstellte, welche in sich selbst multipliciret, 8 bringt, welches aber die Meynung nicht ist. Man setzet bloß, daß diese Zahl vermittlest der erklärten Zeichen nicht ausgedrückt, und also weder geschrieben noch ausgesprochen werden könne, und dieses kan ohne sonderliche Schwierigkeit erwiesen werden, wenn wir nur zu dem Ende, und auch wegen seines eigenen Nutzens etwas von den Quadratzahlen der Brüche werden voraus gesetzt haben.

§. 41. Doch ehe wir uns dazu wenden, wollen wir mit einem ähnlichen und bereits bekannten Exempel darthun, daß die Sätze, die Zahl 8 habe eine Quadratwurzel, oder eigentlich, man könne ohne Widerspruch eine Zahl in die Gedanken fassen, welche in sich selbst multipliciret, die Zahl 8 bringet, aber diese Zahl könne weder geschrieben noch ausgesprochen werden, nichts widersprechendes enthalten. Wenn

III. Abschnitt. man 11 durch 9 dividiret, so ist der Quotient $1\frac{2}{9}$, und dieser kan leicht geschrieben und ausgesprochen werden. Wil man aber zehentheilige Brüche zum Quotienten haben, und fänget die Division an:

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 11,000} \quad 1,222 \\ \underline{9} \\ 22 \\ \underline{18} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \\ \underline{36} \\ 40 \end{array}$$

so siehet man so gleich, daß man niemals ans Ende kommen, und den Quotienten durch dergleichen Brüche genau ausdrücken können werde. Wir haben seinen Anfang gefunden, wir können ihn weiter fortführen, wenn wir nur an die gefundene Ziffer beständig 2 setzen, folgender gestalt 1,22222, aber es wird doch immer etwas fehlen, welchen Fehler man durch einen neuen Zusatz von 2 zwar kleiner machen, aber nicht gänzlich heben wird, man mag auch so viele 2 zusehen, als man wil. L. 176. Demnach kan der Quotient der Zahl $1\frac{2}{9}$ durch zehentheilige Brüche weder geschrieben noch ausgesprochen werden, und gleichwohl kan man diesen Quotienten auf eine andere Art angeben, weil er $1\frac{2}{9}$ ist. Da nun dieser Quotient, welchen man doch gar leicht übersiehet, durch zehentheilige Brüche nicht ausgedrückt werden kan: warum sollte es widersinnisch seyn, sich eine Quadratwurzel einer Zahl vorzustellen, welche sich weder durch zehentheilige noch andere Brüchen ausdrücken läffet?

Vorbereitung zu dem Beweis. Quadrate der Brüche.

§. 42. Das Quadrat eines Bruchs entsteht, wenn man den Bruch in sich selbst multipliciret, eben wie man eine ganze Zahl in sich selbst multipliciren muß, ihre Quadratzahl zu erlangen. Es sey das Quadrat des Bruchs $\frac{2}{3}$ zu machen, so habe ich $\frac{2}{3}$ durch $\frac{2}{3}$ zu multipliciren. Wil ich dieses thun, so muß der Zehler 2 durch 2 oder durch sich selbst multipliciret werden, und der Nenner 3 ebenfalls durch sich selbst oder durch 3. Und dieses ist die Weise ein Quadrat von einem Bruch zu machen. So wohl der Zehler als der Nenner muß in sich selbst multipliciret werden, oder es muß so wol die Quadratzahl des Zehlers als auch hernach die Quadratzahl des Nenners gemacht werden. III, 1. Die erstere giebt den Zehler, die zweyte den Nenner des Bruchs ab, welcher das Quadrat des gegebenen ist. Das Quadrat von $\frac{2}{3}$ ist $\frac{4}{9}$, da 16 das Quadrat des Zehlers 4 ist, und 25 das Quadrat des Nenners 5.

§. 43. Man siehet demnach, daß, wenn man die Quadratwurzel von

von einem Bruch als $\frac{16}{25}$, oder einen andern Bruch $\frac{4}{5}$ schaffen soll, III. Abschnit.
welcher in sich selbst multipliciret den erstern giebt, man so wohl aus dem Zehler 16, als aus dem Nenner 25 die Quadratwurzeln auszu-
ziehen habe, welche Wurzeln den Zehler und Nenner des verlangten
Bruchs $\frac{4}{5}$ geben.

S. 44. Hat man aber eine Zahl, welche aus einer ganzen und
einem Bruch zusammen gesetzt ist, als $1\frac{1}{2}$, und man will die Qua-
dratwurzel derselben haben, so thut man am besten, wenn man die-
selbe erstlich ganz in einen unächten Bruch verwandelt, als hier in
 $\frac{3}{2}$, und so dann die Ausziehung der Wurzel, wie gewiesen worden,
verrichtet, indem man nemlich so wohl von dem Zehler als auch von
dem Nenner die Wurzel nimt; da denn in unserm Fall die gesuchte
Wurzel des Bruchs $\frac{4}{5}$ oder $1\frac{1}{2}$ wird. Dieses hat auch seines eigenen
Nutzen halber gezeigt werden müssen.

Nähere Gründe, und wirklicher Beweis.

S. 45. Dasjenige aber anlangend, so insonderheit wegen unsers
vorhabenden Beweises anzumerken ist: so setzen wir, daß ein Bruch
durch die kleinste Zahlen geschrieben sey, durch welche er sich ausdrü-
cken lässet, und demnach in einen andern, welcher mit noch kleinern
Zahlen geschrieben wäre, nicht könne verwandelt werden, und daß man
von diesem Bruch ein Quadrat gemacht; und behaupten, daß ein
solches Quadrat sich niemals zu einer kleinern Benennung bringen las-
se. Zum Exempel $\frac{2}{3}$ ist mit den kleinsten Zahlen geschrieben, welche
eben diesen Bruch ausdrücken können, und das Quadrat davon $\frac{4}{9}$
kan ebenfalls nicht zu kleinern Benennungen gebracht werden. So ist
es mit $\frac{3}{4}$, von welchen das Quadrat $\frac{9}{16}$ ist. Der erste dieser Brüche
läßt sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen, und auch der
zweite nicht, gleichwie auch weder $\frac{5}{7}$ noch sein Quadrat $\frac{25}{49}$ zu
kleinern Benennungen kan gebracht werden. Denn dieses Quadrat
ist ein Product der Wurzel durch sich selbst, das ist $\frac{5}{7} \times \frac{5}{7}$, oder

$\frac{6 \times 6}{35 \times 35}$ III, 42. Man zerfalle den Nenner so wohl als den Zehler der
Wurzel in die einfache Zahlen, aus welchen sie zusammen gesetzt sind,

II, 79. und setze an statt $\frac{5}{7}$ nunmehr $\frac{2 \times 3}{5 \times 7}$ so wird das Quadrat

dieses Bruchs $\frac{2 \times 3 \times 2 \times 3}{5 \times 7 \times 5 \times 7} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 7 \times 7}$ und es können in dessen
U 1 Zeh.

III. Zehler keine andere einfache Zahlen stehen, als diejenigen, welche in Abschnitt. dem Zehler der Wurzel vorkommen, und so ist es auch mit dem Nenner.

Solte nun dieser Bruch $\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{5 \times 5 \times 7 \times 7}$ sich zu einer kleinern Benennung bringen lassen, so müßten einige der einfachen Zahlen, welche dessen Nenner ausmachen, auch in dem Zehler desselben vorkommen.

II, 95. Dieses aber ist bey dem, so wir angenommen, daß nemlich die Wurzel dieses Bruchs $\frac{2 \times 3}{5 \times 7}$ sich nicht zu einer kleinern Benennung bringen lasse, nicht möglich.

Denn da in dem Zehler oder Nenner des Quadrats keine andere einfache Zahlen enthalten sind, als in dem Zehler oder Nenner der Wurzel, so müßte eben die einfache Zahl, welche in dem Zehler und Nenner des Quadrats zugleich vorkommt, auch in dem Zehler und Nenner der Wurzel zugleich vorkommen, und es müßte sich demnach die Wurzel zu einer kleinern Benennung bringen lassen. II, 94.

S. 46. Ist demnach die Wurzel ein eigentlicher Bruch, welcher sich nicht in ganze Zahlen verwandeln läßt, es mag nun derselbe acht oder unacht seyn, oder es mag der Werth desselben kleiner oder größer seyn als die ganze Einheit: so kan das Quadrat desselben unmöglich eine ganze Zahl seyn. Denn man drücke die Wurzel durch die kleinste Benennung aus, durch welche sie ausgedrückt werden kan, und mache das Quadrat derselben, so ist bekannt, daß wenn dieses Quadrat sich in eine ganze Zahl verwandeln lassen soll, man dasselbe zu der kleinsten Benennung, die möglich ist, 1, müsse bringen können. II, 14. Nun aber läßt sich dieses Quadrat gar nicht zu einer kleinern Benennung bringen, weil sich sonst auch die Wurzel durch eine noch kleinere Benennung ausdrücken ließe, als durch die kleinste, durch welche sie bereits ausgedrückt worden ist, III, 45. und also läßt sich noch vielweniger das Quadrat zu der allerkleinsten Benennung 1 bringen. Die Quadratzahl des Bruchs $\frac{1}{2}$ ist $\frac{1}{4}$, und diese $\frac{1}{4}$ können nicht in eine ganze Zahl, ohne anhängenden Bruch verwandelt werden. Sie betragen $6\frac{1}{4}$.

S. 47. Es ist demnach das Quadrat einer gebrochenen Zahl allezeit wieder eine gebrochene Zahl. Hieraus aber ist nunmehr gar leicht zu schließen, daß, wenn eine ganze Zahl keine Wurzel hat, die auch eine ganze Zahl ist, ohnmöglich eine gebrochene Zahl angegeben wer-

werden könne, welche die wahre Wurzel abgeben könnte. Wir nehmen zum Exempel, die Zahl 3. Wolte jemand setzen, die Wurzel davon wäre $1\frac{1}{2}$, oder welches eben das ist $\frac{3}{2}$, so würde man also schließen können, um zu erweisen, daß dieser Bruch die Wurzel nicht seyn könne. Wenn $\frac{3}{2}$ die Wurzel wäre, so müßte der Bruch $\frac{3}{2}$ in sich selbst multipliciret 3 bringen; III, 1. das ist, das Quadrat einer gebrochenen Zahl $\frac{3}{2}$, müßte eine ganze Zahl 3 seyn. Nun ist es unmöglich, daß das Quadrat einer gebrochenen Zahl eine ganze Zahl werde. III, 46. Also ist es auch nicht an dem, daß $\frac{3}{2}$ die Wurzel von 3 sey.

III.
Abschnitt.

S. 48. Man siehet leicht, daß man eben so bey einem jeden andern Bruch schließeln könne, welcher als die Wurzel von 3 angegeben wird, und daß man also darthun könne, daß keine von den gebrochenen Zahlen zwischen 1 und 2, welche nur genennet werden mag, die Wurzel von 3 sey, und eben so ist es mit allen übrigen ganzen Zahlen, deren Wurzeln in ganzen Zahlen nicht können gefunden werden. Wären ihre Wurzeln gebrochene Zahlen, so müßten sie auch selbst, als die Quadrate von gebrochenen Zahlen, dergleichen gebrochene Zahlen seyn, und wären folgender dieselben ganze Zahlen keine ganze Zahlen, welches sich selbst widerspricht.

S. 49. Es ist also wohl keine Hoffnung übrig, die Wurzel von 3 und allen dergleichen Zahlen genau zu finden; denn wie will ich eine Zahl finden, welche weder geschrieben noch ausgesprochen werden kan? aber es bleibt uns doch noch etwas bey der Sache zu thun übrig. Man kan eine Zahl finden, welche der Wurzel ziemlich nahe kommt, und in sich selbst multipliciret nicht vielweniger als 3 bringt, dergleichen die Zahl 1, 7 ist. Denn wenn man diese in sich selbst multipliciret, bekommt man das Quadrat 2, 89, welches eben von der 3 so gar sehr nicht unterschieden ist, und man kan noch einen andern dergleichen zehentheilchten Bruch finden, welcher in sich selbst multipliciret, eine Zahl giebt, welche der 3 noch näher kommt, und wieder einen andern, welcher noch genauer ist, und so beständig fort. Ob man zwar niemals auf einen Bruch kommen wird, dessen Quadrat die Zahl 3 ohne einigen Abgang oder Ueberschuß wäre.

Wie man sich den Quadratwurzeln nähert, die nicht genau ausgedrückt werden können.

S. 50. Die Weise dergleichen Brüche zu finden, und sich des Wur

III. Abschnitt. Wurzel einer jeden vorgegebenen Zahl, wenn sie nicht genau zu haben ist, so sehr zu nähern, als man nur will, ist gar leicht, und was eben gezeigt worden, wird dazu nicht weiter erfordert, als daß es uns alle vergebliche Hoffnung benehme, jemals mit der Arbeit ans Ende zu kommen.

§. 11. Ich soll einen Bruch finden, welcher in sich selbst multipliciret die Zahl 3 mit so geringen Abgang bringet, als man will, so setze ich der Zahl so viele paare von 00 bey, als ich denke genug zu seyn. Je mehr ich derer besetze, desto genauer wird die Zahl, die ich heraus bringe. Ich setze zum Exempel, an statt der 3, die Zahl 3, 000000, welche nicht mehr und nicht weniger als drey bedeutet, wie aus der Bezeichnung der Zahlen bekannt ist. I, 40. So dann ziehe ich die Wurzel bloß nach der gegebenen Regel III, 31. aus, da mir denn die erste Classe 3, ganze Einheiten in der Wurzel bringen wird, die nächste, Zehentheil, die folgende, Hunderttheil, und so ferner. Oder ich bekümmere mich im Anfang um die Ordnung der Einheiten, welche in der Wurzel kommen, nicht, und erwege nur nach vollbrachter Arbeit, daß von dem (,) als dem Ort der einzeln Einheiten an, bis an die letzte Ziffer der Wurzel, halb so viele Ziffern stehen müssen, als in dem Quadrat von dem (,) an, bis an die letzte Ziffer stehen, welches oben III, 5. erwiesen worden, und daß demnach in unserm Exempel das (,) in der Wurzel so gesetzt werden müsse, daß von demselben an bis ans Ende der Wurzel noch drey Ziffern stehen, weil in dem Quadrate 3, 000000, derselben hinter dem (,) sechs vor- kommen. Die Rechnung selbst stehet folgender gestalt:

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 00 \, 00 \, 00} \quad 1, 732. \\
 \underline{1} \\
 200 \\
 \underline{14} \\
 49 \\
 \underline{34} \\
 11 \, 00 \\
 \underline{60} \, 2. \\
 9 \\
 \underline{346} \\
 71 \, 00 \\
 \underline{69} \, 2. \\
 4 \\
 \hline
 \text{8c.}
 \end{array}$$

Die

Die also gefundene Zahl 1, 732 kommt der Wurzel gar nahe. Ihr Quadrat ist:

III.
Abschnitt.

2, 999824, welches
von 3, 000000 abgezogen

0, 000176 läßt, um welche die Zahl 3 grösser ist als das Quadrat dieser Zahl. Dieser Unterschied ist gar gering, und beträgt noch nicht zwey Zehentausendtheil der Einheit. Und doch hätte man noch näher kommen können, wenn man gleich Anfangs mehr 00 hinzu gesetzt hätte.

S. 52. Oder man kan nur die 00 nach und nach zu den Ueberbleibseln setzen, ohne sie gleich Anfangs hinzu schreiben. Dieses kommt auf eines hinaus, und man hat hiervon einige Bequemlichkeit, welche sich insonderheit äussert, wenn von einer grossen Zahl eine Wurzel auszuziehen ist, und man nicht weiß, ob dieselbe eine Quadratzahl sey, und folgendes eine Wurzel in ganzen Zahlen habe oder nicht. In welchem Fall man nur die Ausziehung der Wurzel bis ans Ende der Ziffer fortsetzen, und wenn nach der letzten Subtraction noch etwas übrig bleibt, diesem Ueberbleibsel eine Classe von 00 beyfügen, so dann aber die Arbeit fortführen kan, da denn die erste Classe der 00 in der Wurzel Zehentheil giebt. Findet man es nöthig, so kan man den Ziffern, die hier übrig geblieben, wieder eine Classe von 00 zusetzen, aus welchen so dann Hunderttheilchen kommen, und eben so erlangt man in der Wurzel die Tausendtheilchen, und die übrigen untern Ordnungen der Einheiten, wenn man sie nöthig hat.

S. 53. Ein paar Exempel werden diese Sache klar machen. Erstlich wollen wir uns nochmals der Wurzel von 3 nähern:

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 1, 7320508} \\
 \underline{1} \\
 2) 200 \\
 14 \\
 \underline{49} \\
 34) 1100 \\
 102 \\
 \underline{9} \\
 346) 7100 \\
 692 \\
 \underline{4}
 \end{array}$$

3464)

III.
Weßnitz.

$$\begin{array}{r}
 3464) \quad 17600 \\
 \underline{00000} \\
 34640) \quad 1760000 \\
 \underline{173200} \\
 \quad 25 \\
 346410) \quad 2797500 \\
 \underline{0000000} \\
 3464100) \quad 279750000 \\
 \underline{27712800} \\
 \quad 64 \\
 \hline
 \text{\&c.}
 \end{array}$$

Nun sey eine Zahl zu finden, welche von der Wurzel der Zahl 465 nicht weit entfernt sey:

$$\begin{array}{r}
 465 \mid 21563858 \\
 \underline{4} \\
 4) \quad 65 \\
 \underline{4} \\
 \quad 1 \\
 42) \quad 2400 \\
 \underline{210} \\
 \quad 25 \\
 430) \quad 27500 \\
 \underline{2580} \\
 \quad 36 \\
 4312) \quad 166400 \\
 \underline{12936} \\
 \quad 9 \\
 43126) \quad 3703100 \\
 \underline{345008} \\
 \quad 64 \\
 431276) \quad 25295600 \\
 \underline{2156380} \\
 \quad 25 \\
 4312770) \quad 373177500 \\
 \hline
 \text{\&c.}
 \end{array}$$

Die

Die Wurzeln zehentheilichter Brüche.

III.
Nöthiger.

S. 54. Eben so werden auch die Wurzeln der zehentheilichten Brüche gefunden. Nur hat man hier zu beobachten, daß indem man die vorgegebene Zahl, aus welcher die Wurzel verlangt wird, theilet, III, 28. ein Theilungszeichen eben durch das (,) welches den Ort der Einheiten bezeichnet, gehen müsse, sonst kan man nicht wissen von welcher Ordnung die Einheiten sind, welche durch jede Ziffer der Wurzel bedeutet werden. Stehet demnach hinter dem Ort der Einheiten in einer dergleichen Zahl eine ungerade Zahl von Ziffern, so muß man dieselbe mit einer darzu geschriebenen 0 gerade machen. Denn es müssen alle Classen zwey Ziffern haben, außer der ersten zur linken Hand, welche auch nur eine haben kan. Es sey zum Exempel die Wurzel von 0, 000729 zu geben, so theile ich sie in Classen, 0, | 00 | 07 | 29, fange so dann von der dritten Classe an, weil die erstern in der That nichts geben, und fahre mit Ausziehung der Wurzel fort, wie in beystehender Rechnung:

$$\begin{array}{r}
 7 \overline{) 29} \overline{) 27} \\
 \underline{4} \\
 4 \overline{) 3 } \overline{) 29} \\
 \underline{28} \\
 49 \\
 \underline{49} \\
 0
 \end{array}$$

Demnach sind 27 die Ziffer der Wurzel, welche man gehörig setzen wird, wenn man bedenket, daß in dem Quadrate von dem Ort der Einheiten an bis ans Ende 6 Ziffern stehen, und folgendes in der Wurzel hinter dem (,) drey Ziffern zu stehen kommen müssen, III, 5. daß man demnach den gefundenen zweyen noch eine 0 vorzusetzen hat, wodurch die Wurzel wird 0, 027, und dieses zwar im gegenwärtigen Exempel genau, weil nach der letzten Subtraction nichts übrig geblieben ist.

S. 55. Endlich sey noch die Wurzel von 0, 006 so genau als es nöthig seyn möchte, zu schaffen. Weil hier hinter dem Ort der Einheiten nur 3 Ziffern stehen, und die Eintheilung in Classen nicht so geschehen kan, daß eine Theilung in das (,) fiele, so setze ich noch eine 0 ans Ende und theile so dann, also: 0, | 00 | 60. | Es wird nunmehr bloß die Wurzel von 60 gesucht, denn die vorhergehende 00 geben nichts, und steht hierzu die Rechnung dergestalt:

Æ

60 |

III.
Abchnitt.

$$\begin{array}{r}
 60 \overline{) 7745} \\
 \underline{49} \\
 14) 1100 \\
 98 \\
 \underline{49} \\
 154) 7100 \\
 616 \\
 16 \\
 1548) 92400 \\
 8c.
 \end{array}$$

Hier stehen in der gegebenen Zahl 0, 0060 hinter dem Ort der Einheiten vier Ziffern, und drey Classen von Ziffern sind in der Rechnung darzu gekommen, welche mit den vorigen vier Ziffern oder zwey Classen in allen fünf Classen, oder paare von Ziffern, ausmachen, so in dem Quadrat hinter dem Ort der einfachen und ganzen Einheiten stehen. Eben so viele einzelne Ziffern müssen in der Wurzel hinter dem (.) stehen, daß demnach die eigentliche Wurzel, oder vielmehr die Zahl, welche an statt der wahren Wurzel, als derselben genugsam nahe, gefunden worden, diese ist 0, 007745, und diese in sich selbst multipliciret, giebt:

$$\begin{array}{r}
 0, 0059985025 \\
 \text{so von } 0, 0060000000
 \end{array}$$

um 0, 0000014975 unterschieden ist, welcher Unterschied kleiner ist als ein anderthalb millionstes Theilchen der Einheit.

Irrationalzahlen.

§. 56. Uebrigens nennet man die Quadratwurzeln solcher ganzen Zahlen, welche nicht selbst ganze Zahlen sind, und alle dergleichen Zahlen, welche nicht ausgesprochen werden können, Irrationalzahlen, und man könnte sie im Deutschen gar wohl unaussprechliche Zahlen nennen. Dergleichen ist die Quadratwurzel von 3. Man kan sich derselben nähern, wie wir gesehen. III. 53. 1, 7 ist von dieser Wurzel so gar sehr nicht entfernt, 1, 73 kommt ihr noch näher, und noch weniger fehlet 1, 732 oder 1, 7320; wieder weniger 1, 73205, und weniger als diese Zahlen alle ist 1, 7320508 von dieser Wurzel verschieden. Wolte man in der Ausziehung der Wurzel noch weiter fortfahren, so kämen noch immer Ziffern zu den vorigen hinzu, welche

Ob der Fehler vermindert, aber niemals wird man die Wurzel genau bekommen: es wäre denn, daß man in dieser Arbeit ohne Ende fortführe. Denn so bald als man aufhört, und dasjenige, so bereits gefunden worden, vor die wahre Wurzel hält, so fehlet man. III, 41. Daß man aber in Ausziehung der Wurzel ohne Ende fortfahre, ist unmöglich, indessen leitet uns dasselbe noch zu einem andern Begriff von diesen Zahlen.

III.
Beyspiehl

Es Brüche ansehen, deren Nenner, daß man die Einheit in un-
strogen ist der Bruch $1,7320508$
iemlich nahe, weil der Nenner
n. Aber weil er eigentlich noch
r die Größe der Theilchen, aus
gesetzt werden kan, genau aus-
s. Nämlich gleichwie sich der
ers durch zehentheilige Brüche
ttelt der selben die Einheit ohne
dergleichen Wurzeln durch gar
n sehn, daß man den Nenner
en, und dadurch die Einheit oh-
e man deswegen $1,222 \dots$ und
icht darstellen kan, weil dassel-
 $\frac{2}{3}$; also kan man durch solche

Größen, welche durch Irrationalzahlen ausgedrückt werden, darstel-
len, wenn man alle ihre Theilchen auf einmal, und ohne sie von ein-
ander abzusondern, angiebt, wie dieses in der Geometrie geschieht.

Begriffe von den Cubiczahlen.

S. 58. Wenn man eine Zahl durch ihr eigenes Quadrat multi-
pliciret, wird sie eine Cubiczahl, welche auch zuweilen ein Cubus
genennet wird. Man beziehet diese auf diejenige Zahl, welche in ihr
eigenes Quadrat multipliciret die Cubiczahl heraus bringt, und nen-
net sie die Cubiczahl derselben. Die Zahl im Gegentheil, welche
durch ihr Quadrat multipliciret die Cubiczahl heraus gebracht, wird
dieser Cubiczahl ihre Cubicwurzel genennet. Das Quadrat von 3
ist 9; multipliciret man demnach 3 durch 9, so wird das Product 27,
die Cubiczahl von 3, und die Zahl 3, ist die Cubicwurzel von 27. So
ist es mit allen übrigen Zahlen. Man kan aus jeder derselben eine

III. Cubiczahl machen. Denn man kan sie in sich selbst multipliciren, und auf die Art ihre Quadratzahl heraus bringen, und was hindert, daß man diese Quadratzahl nicht noch einmal durch die Zahl, welche zuerst angenommen worden, multiplicire? Wil man eine Cubiczahl aus 23 machen, so mache man von 23 erstlich die Quadratzahl 529, multiplir die diese Zahl wieder durch 23, das Quadrat nemlich durch seine Quadratwurzel, das Factum 23×529 welches ist 12167, ist die Cubiczahl von 23, und diese 23 ist die Cubicwurzel von jener 12167.

S. 59. Also hat wohl die Verrfertigung der Cubiczahlen eben so wenige Schwierigkeit, als die Verrfertigung der Quadratzahlen, Ganz was anders aber ist es, wenn man die Aufgabe umkehret, eine Cubiczahl angiebet, und verlangt, daß man ihre Wurzel anzeigen sol. Die bloße Division oder eine jede andere einfache Rechnungsart, welche bis anhero gezeigt worden, kan diese Wurzel zu erfinden eben so wenig hinlänglich seyn, als wenig dieselbe die Quadratwurzel heraus zu bringen vermögend war. III, 2. Man müste dann durch wiederholte Versuche verfahren wollen, und wenn man zum Exempel die Wurzel von 12167 schaffen solte, so lang verschiedene Zahlen probieren, bis man auf eine käme, welche durch ihre Quadratzahl multipliciret, eben 12167 herausbrächte, oder welche, wenn man durch dieselbe die vorgegebene Zahl dividiret, zum Quotienten das Quadrat des Theilers brächte, wie hier geschieht, wenn man mit 23 dividiret, da der Quotient 529 die Quadratzahl des Theilers 23 ist.

S. 60. In der That kan man die Cubicwurzeln, welche nicht über 9 steigen, nicht anders als auf diese Weise finden. Man machet nemlich die Cubiczahlen von allen Zahlen bis auf 9, und schreibt sie vor sich, so ist man so gleich im Stande, wenn eine oder die andere dieser Cubiczahlen gegeben wird, die Wurzel davon anzuzeigen; denn dieselbe stehet in einer dergleichen Tafel bey der Cubiczahl. Hier sind diese Cubiczahlen alle mit ihren Wurzeln über ihnen:

Cubicwurzeln: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Cubiczahlen: 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

S. 61. Damit man aber einsehen könne, wie auch die Wurzeln zu verhalten sind, welche aus mehr als einer Ziffer bestehen, so müssen wir auch hier vor allen Dingen untersuchen, wie eine Cubiczahl, und die verschiedene Ziffer derselben, aus den Ziffern ihrer Wurzel entstehen, und wie diese Ziffern in jene nach und nach verwickelt werden. Der Nutzen von dieser Erkenntniß kan nunmehr nicht verborgen seyn,

seyn, nachdem wir ihn bey der Quadratrechnung so deutlich gespüret, III. und wir werden uns also ohne Aufschub zur Sache selbst wend- schen können.

Wie die Cubiczahl einer zventheilichten Wurzel zusammen gesetzt wird.

§. 62. Es entsteht aber eine Cubiczahl aus einer Wurzel, welche in zwey Theile nach Belieben getheilet ist, nachfolgender massen: Die Cubiczahl hat acht Theile, und sind dieselbe:

- 1) Die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel.
- 2) Das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel in den zweyten Theil derselben. Dergleichen Facta hat man drey, und diese mit der erst genannten Cubiczahl machen vier Theile.
- 3) Das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel durch den ersten Theil. Dergleichen Producte sind in der Cubiczahl wieder drey, und diese machen mit den vorigen vier Theilen dreyen aus, und endlich ist der achte Theil
- 4) die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel.

Daß demnach der Cubus einer Zahl, welche aus zweyen Theilen wie man wil zusammen gesetzt ist, zum Exempel der Cubus der Zahl 6, welche aus den Theilen 4 und 2 bestehet, heraus kommt, wenn man nimt:

- 1) Die Cubiczahl von 4, welche 64 ist.
- 2) Das Factum aus 16, dem Quadrat des ersten Theils 4 durch den zweyten Theil 2 multipliciret, wodurch 32 kommt, und dieses Factum drey mal sehet.
- 3) Das Factum aus 4, dem Quadrat des zweyten Theils durch den ersten Theil 4 multipliciret, welche Multiplication 16 giebt, und dieses Factum wieder drey mal sehet, und endlich:
- 4) Die Cubiczahl des zweyten Theils welche 8 ist. Dieses alles zusammen gesetzt:

64
32
32
32
16
16
16
8

bringet

216,
2 3

welche Zahl die richtige Cu-

III. Cubiczahl von 6 ist, wie aus dem Täfelchen der Cubiczahlen zu Abchnitt. ersieht.

§. 63. Man siehet leicht, daß man die angegebene acht Theile auf viere bringen kan, wenn man gleich Anfangs das zum zweyten gesetzte Factum drey mal nimt, und eben so auch mit dem andern Product verfähret. Geschiehet dieses, so wird die Cubiczahl, welche wir eben gemacht aus nachfolgenden vier Theilen bestehen:

1) Der Cubiczahl des ersten Theils	64
2) Dem Product aus dem Quadrat des ersten Theils in dem zweyten, drey mal:	96
3) Dem Product aus dem Quadrat des zweyten Theils in dem ersten, drey mal	48
4) Die Cubiczahl des zweyten Theils	8
Die Summe ist wie vorher	216

Der zweyte Theil der Cubiczahl, nemlich das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten multipliciret, und so dann drey mal genommen, kommt auch, wenn man zuerst das Quadrat des ersten Theils drey mal nimt, und dieses Factum so dann durch den zweyten Theil multipliciret. Das Quadrat des ersten Theils ist 16, dieses drey mal giebt 48, und dieses ferner durch den andern Theil 2 multipliciret bringt 96: und eben so kommt auch der dritte Theil der Cubiczahl, wenn man das Quadrat des zweyten Theils drey mal nimt, und dieses Factum so dann durch den ersten Theil multipliciret.

§. 64. Demnach kan man dasjenige so eben gesagt worden, mit etwas wenig veränderten Worten, auch also ausdrücken: Die Cubiczahl einer Wurzel die aus zweyen Theilen bestehet, ist zusammen gesetzt:

- 1) Aus der Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel.
- 2) Aus dem Product von dem Quadrat des ersten Theils drey mal genommen, durch den zweyten Theil.
- 3) Aus dem Product von dem Quadrat des zweyten Theils drey mal genommen, durch den ersten Theil.
- 4) Aus der Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel.

§. 65. Es ist vielleicht unnöthig zu erinnern, daß, wenn wir sagen, das Quadrat des ersten (oder zweyten) Theils drey mal genommen, müsse durch den zweyten (ersten) Theil multipliciret werden, wir nicht

nicht verstehen wollen, daß derselbe Theil drey mal genommen, so dann das Quadrat von diesem Product gemacht, und dieses Quadrat in den andern Theil multipliciret werden müsse; denn auf diese Art würde zu viel kommen: und in unserm Exempel würde vor dem andern Theil auf die Art gefunden werden 144×2 , oder 288 an statt 96; sondern man muß erstlich das Quadrat machen, dieses so dann durch drey und ferner das hieraus entstehende Factum durch den andern Theil der Wurzel multipliciren. Dieses zu erinnern dürfte wie gesagt vielleicht unnöthig seyn, doch damit wir nichts versäumen, so zur Deutlichkeit etwas beytragen kan, haben wir es nicht vorbeyp gehen wollen.

S. 66. Den Beweis von dieser Zusammensetzung kan man sich sehr deutlich vorstellen, wenn man sich Würfel von Holze machen läßt, und dieselbe nach der Anweisung die wir so gleich geben wollen, zusammen setzet. Man kan deren mit geringen Kosten eine grosse Menge bekommen, aber an 125, (diese ist die Cubiczahl von 5) hat man genug. Diese Würfel hat man als Einheiten und nicht anders anzusehen, und wir erwählen bloß diese Figur, weil die Würfel sich am bequemsten zusammen setzen lassen, da man außer dem auch Kugeln, oder Körperchen von einer jeden andern Figur brauchen könnte.

S. 67. Man setze nunmehr aus diesen Einheiten eine Zahl zusammen, was man vor eine wil AB, und theile dieselbe in zwey Theile in C; man multiplicire sie ferner in sich selbst, damit man ihre Quadratzahl ABED erhalte, welche man aber hier eben so wie vorher bey den Quadratzahlen geschehen III, 8. in ihre vier Theile, DC das Quadrat des ersten Theils, CE und DF die Producte aus den Theilen, und EF, das Quadrat des zweyten Theils, theilen muß. Dieses ist die erste Arbeit welche man vorzunehmen hat, wenn man aus einer gegebenen Zahl ihre Cubiczahl machen wil. Das also formirte Quadrat ist nun ferner durch die Wurzel zu multipliciren, damit die Cubiczahl heraus komme, und dieses geschiehet am füglichsten wenn man über ein solches Quadrat ein anders setzet, und so schichtweise Quadrate über einander zu ordnen fortfähret, bis man derselben so viel über einander habe, als viele Einheiten in der Wurzel sind. Denn wenn dieses geschehen, so ist klar, daß gedachtes Quadrat durch seine Quadratwurzel multipliciret, und folgendes die Cubiczahl von eben der Wurzel gemacht worden sey.

F. 22.

S. 68. Damit man aber die acht Theile, die wir hernach auf viere

III. ~~Abgeleitet.~~ viere gebracht, III, 62. in der Cubiczahl erhalte, muß man in dieser multiplication absehen, so bald man der Quadrate so viele über einander gesetzt, als viele Einheiten in dem ersten Theil der Wurzel sind, und so denn ferner eben diese Quadrate so oft auf einander bringen, als oftmals die Einheit in dem zweyten Theil der Wurzel enthalten ist. Es wird, wenn das Quadrat durch den ersten Theil der Wurzel multipliciret wird, dieses Factum so stehen wie die 23 Figur weiset.

1) Stehet bey A die Cubiczahl 27 des ersten Theils der Wurzel 3.

2) Bey B steht ein Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel 3, durch den zweyten Theil 2. Dieses siehet man, wenn man das Factum B erstlich auf seiner linken Seite betrachtet, da das Quadrat zum Vorschein kommt, so dann aber oben oder vorne, da erhellet, wie dasselbe durch den zweyten Theil der Wurzel multipliciret worden.

3) Bey C steht noch ein dergleichen Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten Theil derselben. Man siehet dieses, wenn man das Factum bey C erstlich von vorne, so dann auf der Seite oder oben betrachtet. Denn das Quadrat steht vorne aufrecht, und ist in unserm Exempel zwey mal hinter einander gesetzt, oder durch den zweyten Theil der Wurzel 2 multipliciret.

4) Endlich steht bey D ein Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel in dem ersten Theil derselben; und dieses einzusehen, darf man nur dieses Factum erstlich oben betrachten, da das Quadrat steht, und so dann die Seiten ansehen, da es sich weiset, wie dieses Quadrat multipliciret worden.

S. 69. Wir verstehen aber hier eine Betrachtung, nicht die bloß mit den Augen geschieht, denn diese kan uns aufs höchste zeigen, daß in dem vorliegenden Fall die Sache richtig sey; sondern wir wollen daß man sich besinne, wie diese Theile alle aus der Multiplication entstanden sind, und die Figur sol uns dieses Nachdenken bloß einiger massen erleichtern. Thun wir dieses, so werden wir bald sehen, daß dasjenige, so die Figur nur bey einer Zahl weisen kan, von allen überhaupt seine Richtigkeit habe.

S. 70. Nun müssen wir in der Zusammensetzung unserer Cubiczahl fortfahren. Wir haben III, 68. das Quadrat der Wurzel durch den ersten Theil derselben multipliciret, wir müssen es noch durch ihren

ten zweyten Theil multipliciren, und was hier kommt zu dem vorigen setzen, damit wir die ganze Cubiczahl, welche wir machen sollen, erhalten. Wenn diese Multiplication mit unsern Einheiten verrichtet wird, steht das Factum wie in der 24. Figur, und bestehet dasselbe wieder aus vier Theilen, welche zu den bereits oben gefundenen gesetzt werden müssen. Es steht nemlich

5) Bey E ein Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel durch den zweyten Theil derselben. Man sehe dieses Factum erst oben an, da das Quadrat steht, so dann an den Seiten, da sich zeigt, wie oft dieses Quadrat genommen worden.

6) Bey F steht ein Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils durch den ersten Theil der Wurzel, welches klar erhellet, wenn man dieses Factum erstlich von vorne, und so dann von oben und von der Seite betrachtet.

7) Stehet bey G noch ein dergleichen Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils, welches zur Linken steht, durch den ersten Theil, welche Multiplication oben und von vorne sichtbar ist: und endlich

8) Ist bey H die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel anzutreffen.

welch
seyn i
ge ka
mehr
aus d
Ende
Ende

Sas lässt sich nunmehr aus einer jeden Zahl, Einheiten, von welcher Ordnung diese auch Cubiczahl zusammen setzen. Nur das eingetretet werden, damit uns hernach gar nichts eine Ziffer am Ende eine 0 hat, und man abel machen will, der Cubiczahl der Ziffer an et werden müssen, daß wenn die Wurzel am Cubiczahl derselben am Ende sechs 00 kommen, und daß überhaupt der Cubiczahl einer Ziffer drey mal so viele 00 hinten nach stehen, als viele derselben in der Wurzel anzutreffen sind. Die Cubiczahl von 2 ist 8, die Cubiczahl von 20 ist 8000, die Cubiczahl von 200 ist 8000000, und so weiter. Dieses erhellet aus der Multiplication so deutlich, daß wir nicht nöthig finden, uns länger dabey aufzuhalten.

S. 72. Es sey nunmehr die Cubiczahl von 57, oder von 50 + 7 zu machen, so nehme man nach der Regel:

1) Die

III.	1) Die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel 50,	
Wohnen welche ist		125000
	2) Das Factum aus dem Quadrat 2500, des ersten	
	Theils 50 drey mal, durch den zweyten Theil 7	12500
	3) Das Factum aus dem Quadrat 49, des zweyten	
	Theils 7 drey mal, durch den ersten Theil 50	7350
	4) Die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel 7	343
	Die Summe hiervon	185193
	ist die gesuchte Cubiczahl.	

§. 73. Man siehet auch hieraus, wie sich die angegebene Theile einer Cubiczahl, welche aus Zehnern und Einheiten bestehet in dieselbe verwickeln. Die Cubiczahl der ersten Ziffer, welche Zehner bedeutet, nemlich 125, bedeutet tausende, oder hat drey 000 hinter sich stehen, und kommt also die letzte Ziffer davon 5, an die vierte Stelle von dem Orte der einfachen Einheiten nach der linken zu, da sie sich mit andern Ziffern, die ebenfalls an diesen Ort herüber kommen, in der Addition vermischet: und von dannen stehet der Cubus 125 weiter nach der linken, aber nicht über drey Ziffern, weil keine Cubiczahl einer einzeln Ziffer aus mehr als drey Ziffern bestehet. III, 60. So dann endiget sich das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils drey mal genommen in die folgende 7 multipliciret, in der nächsten Stelle zur rechten, und stehet von dannen weiter nach der linken zu. Daß es sich daselbst endiget, siehet man daraus, weil das besagte Quadrat der ersten Ziffer, 2500 00 haben muß, indem diese erste Ziffer Zehner bedeutet, und diese 2500 00 bleiben in allen nachfolgenden Multiplicationen, welche gemacht werden müssen, unverändert. Ferner endiget sich das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils drey mal genommen, und durch den ersten Theil der Wurzel multipliciret, mit der folgenden Stelle, weil es Zehner bedeutet. Denn dieses Quadrat enthält einfache Einheiten, welche von der Art bleiben wenn sie durch 3 multipliciret werden, aber zu Zehnern erwachsen, oder eine 0 bekommen, so bald sie durch die erste Ziffer der Wurzel multipliciret werden, als welche Zehner enthält. Endlich endiget sich die Cubiczahl des zweyten Theils der Wurzel an dem Ort der einfachen Einheiten, und gehet niemals über denselben weiter nach der rechten zu, wie dieses leicht einzusehen ist.

§. 74. Läßt man die letzte Ziffer der Wurzel 7, nicht einfache Ein-

Einheiten, sondern Einheiten von der ersten höhern Ordnung oder III. Zehner bedeuten, so kommt noch alles wie vorhin, nur müssen am ^{Wissheit.} Ende drey 000 der auf die Art gefundenen Cubiczahl angehängt werden. Denn vor jede 0 die der Wurzel angefügt wird, bekommt die Cubiczahl am Ende drey 000, wie III, 71. gezeigt worden. Demnach da die Cubiczahl von 57 ist 185193, so ist die Cubiczahl von 570 folgende: 185193000, die von 5700 die nachstehende 185193000000, und so weiter.

Wie die Cubiczahl einer Wurzel zusammen gesetzt wird, die mehr als zweien Theile hat.

§. 75. Vermittelt dieser Regul kan man nunmehr weiter gehen, und einsehen, daß wenn von einer jeden gegebenen Wurzel als 75328 eine Cubiczahl zu machen ist, man nehmen müsse:

- 1) Die Cubiczahl der ersten Ziffer 7, A
 - 2) Das Factum aus dem Quadrat dieser Ziffer 7, drey mal, B
durch die nächste 5.
 - 3) Das Factum aus dem Quadrat der zweyten Ziffer 5, drey C
mal genommen, durch die erste 7.
 - 4) Die Cubiczahl der zweyten Ziffer 5. D
 - 5) Das Factum aus dem Quadrat der ersten und zweyten Ziffer E
75 drey mal, durch die dritte Ziffer 3.
 - 6) Das Factum aus dem Quadrat der dritten Ziffer 3 drey mal F
genommen durch die ersten zwey 75.
 - 7) Die Cubiczahl der dritten Ziffer 3. G
 - 8) Das Factum aus dem Quadrat der ersten, zweyten und drit- H
ten Ziffer 753 drey mal genommen durch die vierte 2.
 - 9) Das Factum aus dem Quadrat der vierten Ziffer 2 drey mal I
genommen, durch die ersten drey, 753.
 - 10) Die Cubiczahl der vierten Ziffer 2. K
 - 11) Das Factum aus dem Quadrat der ersten, zweyten, dritten L
und vierten Ziffer 7532 drey mal genommen in die fünfte 8.
 - 12) Das Factum aus dem Quadrat der fünften Ziffer 8, drey M
mal genommen durch die ersten viere 7532.
 - 13) Die Cubiczahl der fünften Ziffer 8. N
- Und so immer fort nach eben den Gesetzen, wenn die Wurzel aus mehr als fünf Ziffern bestehet.

von 750 + 3, oder 753. Demnach da die erste Cubiczahl von 75, der III. nen Zahlen $A + B + C + D$ gleich war, so bestehet diese Cubiczahl von Abschnitt. 753, aus der Summe der Zahlen $A + B + C + D + E + F + G$.

Wiederum giebt diese Cubiczahl von 753 zusamt der Zahl bey H, als welche das Factum ist aus dem Quadrat von 753 drey mal genom-

men
drey.
Cubl
 $A +$
7532
 $H +$

duct
von
get
bicja
+ E
nach
siehel
len ei
der
ande
ten

Quadrat der Zahl 2
dieser 2 bey K, die
on 753 denen Zahlen
die Cubiczahl von
+ G, und ferner aus

7532, mit dem Pro-
ie ganze Cubiczahl,
weny man überles-
nunmehr: die Cu-
len $A + B + C + D$
+ N, und demnach
vorden. Und man
und jede Cubiczah-
biczahlen der Theile
schehen, und nicht
nungen ihre Einzel-

S. 78. Hieraus aber erhellet ferner, daß wenn man die also ge-
fundene Cubiczahl in Classen theilet; deren jede drey Ziffern enthält,
so daß man diese Abtheilung von der rechten Hand anfänget, und von
dannen nach der linken zu fortsetzet, sich mit einer jeden Ziffer, die
vor einem Theilungszeichen nach der linken Hand zu stehet, eine der
Cubiczahlen der Theile der Wurzel endigen werde, welche Cubiczahl
von dannen weiter nach der linken Hand zu sich erstrecken kan. Also
endiget sich in unserm Exempel bey der letzten Ziffer 2 die Cubiczahl der
letzten 8 der Wurzel, und stehet von dannen weiter nach der linken;
bey der 7 der nächsten Classe endiget sich 8, welches die Cubiczahl der
Ziffer der Wurzel 2 ist, welche Cubiczahl hier nur aus einer Ziffer
bestehet; und über der 2 der dritten Classe endiget sich 27, die Cubic-
zahl von 3.

S. 79. In der Mitte aber einer jeden Classe endiget sich jederzeit
das

III. **Wichtig.** Das Factum so durch die Multiplication des Quadrats der nachfolgenden Ziffern der Wurzel drey mal genommen, durch alle vorhergehende Ziffern derselben, entsteht. Und endlich im Anfang der Classen endigen sich die Producte, welche aus den Quadraten der vorhergehenden Ziffer drey mal genommen, durch die nächstfolgende entstanden sind. Beyde stehen von dannen nach der linken Hand, wenn sie mehr als eine Ziffer haben. Also endiget sich unter der ersten Ziffer zur rechten der zweyten Classe, welche hier 4 ist, das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils der Wurzel drey mal genommen, durch den nächstfolgenden Theil, welches in unserer Cubiczahl 735 ist. In der mittlern Zahl dieser Classe 3 endiget sich das Factum aus dem Quadrat der zweyten Ziffer der Wurzel drey mal genommen, durch den ersten Theil multipliciret, denn also ist das Factum 525 heraus gekommen. Beyde stehen von dannen nach der linken zurück, weil sie aus mehr als einer Ziffer bestehen. In der ersten Classe zur linken aber ist auſſer dem so von den nächstfolgenden Factis hierüber gegangen, nichts als nur die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel enthalten.

Ausziehung der Cubicwurzel.

§. 80. Nachdem wir also deutlich eingesehen, wie eine Cubiczahl aus einer jeden Wurzel entstehe, und wie die Ziffer der Wurzel in diejenige, aus welchen die Cubiczahl bestehet, nach und nach hinein gebracht werden, so können wir auch begreifen wie hinwiederum die Ziffer der Wurzel nach und nach aus den Ziffern der Cubiczahl heraus gebracht, und gleichsam ausgewickelt werden können. Wir müssen zu dem Ende die gegebene Cubiczahl in die Theile zergliedern, aus welchen wir gesehen, daß sie bestehe. Ist dieses geschehen, so finden sich die Theile der Wurzel leicht, oder vielmehr, es kan diese Zergliederung der Cubiczahl nicht angeben, wenn man nicht nach und nach die Theile der Wurzel heraus bringt. Die Methode dieses zu thun, kommt mit der, welcher man sich bey der Quadratwurzel bedienet, überein, und ist nur von jener in den Stücken unterschieden, welche aus der besondern Art, nach welcher eine Cubiczahl gemacht wird, herfließen, in so fern dieselbe von der Art, nach welcher die Quadratzahlen aus ihren Wurzeln entspringen, unterschieden ist.

S. 81. Es sey die Cubicwurzel der Cubiczahl, welche wir oben III. längst III, 76. zusammen gesetzt haben 427434241687552 zu schafffen. Man machet hier eben eine dergleichen Vorbereitung als bey den Quadratzahlen gewiesen worden. Man theilet die Zahl in Classen von der rechten nach der linken Hand, aber man giebt jeder Classe drey Ziffern, es müste sich dann fügen, daß die Zahl aller Ziffern der Cubiczahl sich nicht genau durch drey theilen liesse, in welchem Fall die erste Classe zur linken Hand, auch zwey oder nur eine Ziffer haben kan, so viele nemlich übrig bleiben, nachdem die übrigen Classen alle voll gemacht worden. Aus dem III, 78. bereits gesagten ist klar, was wir durch diese Eintheilung der Cubiczahl in solche Classen suchen und erhalten. Wir bestimmen die Ziffer, unter welchen die verschiedene Producte und Cubiczahlen, aus welcher die vorgegebene Cubiczahl zusammen gesetzt worden, sich endigen, nachdem sie ihren Anfang entweder unter eben den Ziffern, oder weiter vorne nach der linken Hand genommen. Nach dieser Vorbereitung fängt man das Ausziehen der Wurzel selbst an:

	427:434:241:687:552	75328 Q
	343:---:---:---:---	A
147)	84 434: : :	
	73 5.1- - - : - - - : - - -	B
	5 25. : - - - : - - - : - - -	C
	125: - - - : - - - : - - -	D
16875)	5 559241 : :	
	5 0625 - - - : - - -	E
	2025 - - - : - - -	F
	27 - - - : - - -	G
1701027)	476464687 : :	
	3402054. - - - : - - -	H
	9036. - - - : - - -	I
	8 - - - : - - -	K
170193072)	136168919552 : :	
	1361544576. . : L	
	1446144. : M	
	512 : N	

1) Werk

III. 1) Weil in der ersten Classe zur linken Hand nichts als die Cubiczahl des ersten Theils der Wurzel enthalten, zusamt einigen Ziffern, welche von den nächsten Producten hierüber gegangen sind, III, 79. so suchet man eine Cubiczahl von einer einzeln Ziffer, welche unmittelbar kleiner ist, als die Ziffer dieser Classe. Diese Cubiczahl ist hier 343. III, 60. Die Cubicwurzel davon 7 ist nun die erste Ziffer der Wurzel, welche wir suchen, und an einen beliebigen Ort, anzumerken. Wir haben diese 7, wie man gemeinlich zu thun pflegt, eben dahin gesetzt, wo wir vor dem die Ziffer der Quadrattourzel, wie sie nach und nach kamen, gesetzt haben.

2) Die also gefundene Cubiczahl der ersten Ziffer der Wurzel 343 wird von den Ziffern der ersten Classe abgezogen, damit man die Ziffer, welche von den folgenden Classen in diese übergegangen, alleine behalte. Die Cubiczahl 343 hat ihre Dienste gethan, und kan uns ferner bey der Ausziehung der folgenden Ziffer der Wurzel nichts nützen.

3) In demjenigen so von dieser Subtraction übrig geblieben, ist das Factum aus dem Quadrat der bereits gefundenen Ziffer der Wurzel 7 drey mal genommen, und in die nächstfolgende Ziffer der Wurzel multipliciret, zum Theil enthalten, und dieses Factum endiget sich mit der ersten Ziffer der zweyten Classe 4. Man zieht derowegen diese erste Ziffer der zweyten Classe 4 zu dem Ueberbleibsel der ersten 84 herunter, wodurch 844 kommt, und dividire diese 844 durch das Quadrat des an der Wurzel bereits gefundenen Theils 7 drey mal genommen; das ist, man dividire durch 3×49 oder 147, der Quotient dieser Division 5 ist die zweyte Ziffer der Wurzel.

Wir können noch nicht fortgehen den dritten Theil oder die dritte Ziffer der Wurzel zu suchen. In der zweyten Classe der Ziffer der Cubiczahl, welche uns die zweyte Ziffer der Wurzel gegeben, enden sich verschiedene Producte, welche zur Erfindung der nunmehr in der Wurzel folgenden dritten Ziffer nichts bestragen können, und damit das folgende desto weniger verwirret bleibe, von der Cubiczahl weggenommen werden müssen. Man setze demnach

4) Diese Producte bey B, C und D ordentlich, und so wie sie in die Cubiczahl gebracht worden; bey B nemlich das bereits erwähnte Factum aus dem Quadrat des ersten Theils 7 drey mal, in den zweyten und nunmehr gefundenen Theil 5, multipliciret, oder welches eben das ist, das Factum aus dieser 147 gefundenen Ziffer der Wurzel 5 durch

durch den Theiler 147, multipliciret. Dieses Factum endiget sich mit der ersten Ziffer der Classe. III.

Abchnitt.

Man schreibe ferner bey C das Factum aus dem Quadrat dieser zweyten Ziffer 5 drey mal genommen durch die vorhergehende 7 multipliciret, welches Factum sich mit der mittelsten Ziffer der Classe endigen muß, und endlich setze man bey D die Cubiczahl dieser letzten Ziffer, so daß sie sich unter der letzten Ziffer der Classe endige. Diese drey Zahlen, B, C und D, welche man nur in Gedanken addiren kan, ziehe man von den Ziffern der zweyten Classe, und demjenigen, so von der ersten Classe übrig geblieben, ab, das Ueberbleibsel ist hier 5559; alle diese Ziffern sind, indem die Cubiczahl gemacht worden, von den nachstfolgenden Producten hierüber gegangen. III, 76.

5) Nun setze man diesem Ueberbleibsel die erste Ziffer der folgenden dritten Classe zu, so stehet die Zahl 55592 bereit, durch deren Division die nächste Ziffer der Wurzel erhalten wird. Der Theiler, welcher sie heraus bringt, ist das Quadrat alle desjenigen, so an der Wurzel bereits gefunden worden, drey mal genommen, und demnach hier das Quadrat von 75 durch 3 multipliciret, wodurch die Zahl 16875 kommt, welche der zu dividirenden Zahl an die Seite gesetzt ist. Man dividire wirklich, so kommt der Quotient 3, welches der dritte Theil der Wurzel ist. Denn weil bis an die erste Ziffer der dritten Classe das Factum aus dem Quadrat der ersten zwey Ziffern der Wurzel drey mal genommen, durch den dritten Theil der Wurzel multipliciret, enthalten ist, zusamt einigen Ziffern, welche sich von den folgenden Producten mit diesen vermischen, so kan es nicht anders seyn, es muß, wenn man mit dem ersten Factor dividiret, der andere, welcher die dritte Ziffer der Wurzel ist, zum Quotienten kommen: nur hat man einiger massen auf die gedachte Vermehrung fremder Ziffern Acht zu haben, und den Quotienten nicht gar zu groß anzunehmen, welches sich aber von selbst giebt. Denn man siehet es aus der Subtraction, welche gemacht werden muß, leicht, wenn man ihn zu groß angenommen hat.

6) Nun hat man von den Ziffern der dritten Classe mit dem vorigen Ueberbleibsel zusammen gesetzt, das ist, von 5559241, eben dergleichen Producte abziehen als vorher No. 3. geschehen. Nämlich das Factum bey E aus dem Quadrat der ersten Ziffern der Wurzel 75, drey mal, durch die dritte 3 multipliciret, oder das Factum aus dem Divisor durch den Quotienten: das Factum bey F, aus dem Quadrat der dritten Ziffer 3, drey mal, durch die ersten zwey 75 mul-

III.
Abschnitt.

tipliciret, und dann die Cubiczahl dieser dritten Ziffer der Wurzel bey G, nachdem man sie, wie vorher bey dergleichen Producten geschehen, und aus der Rechnung sichtlich ist, in Ordnung gesetzt.

7) Man hat bey der vierten und folgenden Classe nichts anders zu thun, als was bey der zweyten und dritten bereits gewiesen worden. Man setzt zu dem Ueberbleibsel der vorigen Classe die erste Ziffer der vierten herab, so hat man die Zahl, durch deren Division der folgende Theil der Wurzel erhalten wird, welches hier 4764646 ist. Von alle denjenigen Ziffern, welche an der Wurzel bereits gefunden worden, hier 753, mache man das Quadrat, und nehme dieses drey mal, dieses ist der Theiler, durch welchen aus der besagten Zahl der Quotient 2, als die vierte Ziffer der Wurzel gebracht wird. Nachdem dieser gefunden, werden zu der dividirenden Zahl hier ebenfalls die zwey letztern Ziffern dieser Classe 87 gesetzt, und so dann werden die Producte H, I, und die Cubiczahl K abgezogen. H ist wieder das Factum aus dem Theiler durch den Quotienten 2: I das Factum aus dem Quadrat dieses Quotienten drey mal durch die vorhergehende Ziffer der Wurzel 753.

8) Nun ist noch eben die Arbeit mit der letzten Classe vorzunehmen, deren erste Ziffer 5 zu dem Ueberbleibsel der eben gesagten Subtraction herunter gesetzt, die Zahl giebt, aus welcher vermittelt der Division durch den bengelegten Theiler, die letzte Ziffer der Wurzel 8 gefunden wird. Dieser Theiler ist wieder das Quadrat aller Ziffern, die an der Wurzel durch die vorhergehende Arbeit bereits gefunden worden, das ist in unserm Exempel das Quadrat von 7532, drey mal genommen. Da hier die Producte L, M und die Cubiczahl N von alle demjenigen, so an der Cubiczahl noch übrig ist, abgezogen, nichts übrig lassen, so ist dieses ein Zeichen, daß die gefundene Zahl 75328 die genaue Cubicwurzel der gegebenen Cubiczahl sey, und daß durch die Multiplication derselben in ihre Quadratzahl diese Cubiczahl wirklich heraus komme.

S. 82. Und dieses ist zwar aus demjenigen, so wir eben gesagt haben, klar genug, man kan es aber auch kürzer einsehen. Die Buchstaben, welche wir den Producten und Cubiczahlen, die von unserer gegebenen Cubiczahl nach und nach abgezogen worden sind, bengelegt, A, B, C, D, &c. sind eben dieselbige, welche wir oben III, 76. zu den Theilen dieser Cubiczahl, als wir sie verfertiget, geschrieben, und beziehen sich hier auf die Theile der bey Q gefundenen Zahl 75328.

Nem

Nemlich A ist die Cubiczahl des ersten Theils derselben 7. B das Factum aus dem Quadrat des ersten Theils drey mal durch den zweyten \times multipliciret. C, das Factum aus dem Quadrat des zweyten Theils \times drey mal durch den ersten Theil 7 multipliciret. D die Cubiczahl des zweyten Theils, und so beständig fort nach der III, 75. gegebenen Regel. Es ist demnach richtig, daß die Summe aller Zahlen A, B, C . . . M, N, wie sie stehen, die eigentliche Cubiczahl der Wurzel 75328 seyn müsse. Nun ist aber die Summe aller dieser Zahlen A, B, C . . . M, N keine andere als die gegebene Cubiczahl, aus welcher die Wurzel zu ziehen war. Denn die Zahlen A, B, C . . . M, N, nach und nach von dieser Zahl abgezogen, lassen nichts übrig, welches ohnmöglich seyn könnte, wenn die Cubiczahl mehr oder weniger wäre, als die Summe aller dieser Zahlen. Demnach ist die Cubiczahl eben diejenige, welche aus der Wurzel 75328 entsteht, und es ist demnach hinwiederum diese Zahl Q die eigentliche Wurzel der gegebenen Cubiczahl, welche wir finden sollten. Und dieses erachten wir zur Erfindung aller Wurzeln wirklicher Cubiczahlen, wenn derselben Wurzeln ganze Zahlen sind, genug zu seyn.

Cubicwurzeln der Brüche.

§. 83. Ist die Wurzel ein Bruch, so bekommt man die Cubiczahl desselben, wenn man so wohl von dem Nenner als von dem Zehler die Cubiczahl nimt, und aus der ersten den Nenner, aus der zweyten den Zehler des Cubicbruchs machet. Die Cubiczahl von $\frac{2}{27}$ ist $\frac{8}{27}$, da der Zehler des Cubicbruchs die Cubiczahl ist von dem Zehler der Wurzel 2, und der Nenner 27, die Cubiczahl des Nenners der Wurzel 3. Die Sache ist leicht eingesehen. Will man die Cubiczahl eines Bruchs schaffen, als eben desjenigen, dessen wir uns zum Exempel bedienen, $\frac{2}{27}$, so muß man erstlich das Quadrat desselben machen, indem man nemlich so wohl von dem Zehler als von dem Nenner die Quadratzahlen nimt. III, 42. Dieses Quadrat ist $\frac{4}{729}$, und dieses muß wieder in die Wurzel $\frac{2}{27}$ multipliciret werden, III, 58. welches geschieht, wenn man den Zehler 4 durch den Zehler 2, und den Nenner 9 durch den Nenner 3 multipliciret, wodurch allerdings die Cubiczahlen so wohl des Zehlers als Nenners der Wurzel $\frac{2}{27}$ in dem Cubicbruch $\frac{8}{27}$ kommen.

§. 84. Man wird also hinwiederum die Cubicwurzel so wohl des Zehlers als auch des Nenners nehmen müssen, wenn man aus ei-

III. nem Bruche die Cubicwurzel ziehen will: gleichwie man aus dem Bruch $\frac{2}{3}$, den Bruch $\frac{2}{3}$, welcher jenes seine Cubicwurzel ist, durch diese Ausziehung der Cubicwurzeln, aus den beyden Gliedern des Bruches, wieder erhält. Hat man eine Zahl, so aus einer ganzen und einem Bruch zusammen gesetzt ist, und man soll derselben Cubicwurzel schaffen, so thut man auch hier am besten, wenn, bevor man die Arbeit angreift, man die Zahl gar in einen Bruch verwandelt. So findet man die Cubicwurzel von $20\frac{1}{2}$, wenn man an die Stelle dieser Zahl den Bruch setzt, welcher ihr gleich ist $20\frac{1}{2}$. Von diesem ist die Cubicwurzel $\frac{1}{2}$ oder $2\frac{1}{2}$, und diese ist auch die Cubicwurzel der Zahl $20\frac{1}{2}$.

S. 85. Gleichwie wir von den Quadratzahlen solcher Brüche, die sich nicht auf kleinere Benennungen bringen lassen III, 45. gezeigt, daß sie sich ebenfalls nicht mit kleinern Zahlen ausdrücken lassen, als diejenige sind, mit welchen man sie gleich Anfangs ausgedrückt, als man sie aus ihren Wurzeln gemacht hat: eben so läßt sich dieses auch von den Cubiczahlen dieser Art Brüche darthun. Der Bruch $\frac{2}{3}$ kan ohnmöglich mit kleinern Zahlen geschrieben werden, aber die Cubiczahl davon $\frac{2}{3}$ läßt sich eben so wenig zu kleinern Benennungen bringen. So ist es mit dem Bruch $\frac{1}{2}$, und seiner Cubiczahl $\frac{1}{2}$, und mit allen übrigen verglichen Brüchen. Dieses einzusehen hat man nur der Weise zu folgen, der wir uns bedienen, diesen Satz von den Quadratbrüchen darzuthun. Man nehme zum Exempel den eben gesetzten Cubicbruch $\frac{2}{3}$ dessen Wurzel $\frac{1}{2}$ ist. Der Zehler des erstern kommt aus dem Zehler des zweyten, wenn man 3 mal 3 noch durch 3 multipliciret, und ist demnach $3 \times 3 \times 3$, und eben so ist der Nenner $= 4 \times 4 \times 4$,

und demnach $\frac{2}{3} = \frac{3 \times 3 \times 3}{4 \times 4 \times 4}$. Sollte sich nun dieser Bruch auf kleinere

Benennungen bringen lassen, so müste in dem Zehler eine einfache Zahl enthalten seyn, welche zugleich in dem Nenner vorkommt. Sonst kan die Verkleinerung beyder Glieder des Bruches, die hier erfordert wird, nicht angehen. Da aber alle Factore des Zehlers des Cubicbruchs in dem Zehler der Wurzel vorkommen, und alle Factore des Nenners eben des Cubicbruchs in dem Nenner der Wurzel, so müste, wenn ein gemeinschaftlicher Theiler in dem Zehler und Nenner des Cubicbruchs enthalten wäre, eben derselbige Theiler sich auch so wohl zu dem Zehler als dem Nenner der Wurzel schicken, welches nicht seyn kan, weil man setzt, daß sich die Wurzel nicht zu kleinern Benennungen bringen lasse. II, 94.

§. 86. Ist aber dieses, so muß die Cubiczahl eines unächten Bruchs notwendig wieder ein unächter Bruch seyn, und kan keine ganze Zahl werden. Denn es wird ein unächter Bruch eine ganze Zahl, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret, und wenn man will, kan man auch den Nenner durch sich selbst dividiren, denn dadurch kommt zum Quotienten 1, und die Bedeutung ist eben die vorige. Gehet diese Di-
Bruch keine ganze Za-
nert, wenn aus einem
muß sich derselbe zu e-
der allerkleinsten die m
Schreibet man aber e
mit welchen er ausgedi-
den, daß die Cubiczah-
gen könne gebracht w
den Bruch $\frac{1}{2}$ auf die
ganzen Zahl gleich machen.

Ganze Zahlen, deren Cubicwurzeln keine ganze Zahlen sind.

§. 87. Dieses kan uns dienen, dasjenige so von den Quadrat-
zahlen gezeigt worden ist, daß nemlich, wenn eine ganze Zahl keine
Quadratwurzel unter den ganzen Zahlen hat, auch kein Bruch könne
gefunden werden, welcher in sich selbst multipliciret, dieselbe Zahl her-
aus bringen, und demnach die genaue Wurzel derselben abgeben könn-
te; auch von den Cubiczahlen zu zeigen. Die Cubiczahl von 1 ist wie-
der 1, die Cubiczahl aber von 2 ist 8. Zwischen 1 und 8 fallen ver-
schiedene Zahlen, 2, 3, 4, 5, 6, 7, welche ohnmöglich Cubicwurzeln ha-
ben können die ganze Zahlen wären. Denn es müsten dieselben größ-
ser seyn als 1 und kleiner als 2, welches bey ganzen Zahlen ohnmög-
lich ist. Da aber zwischen 1 und 2 eine Menge von gebrochenen Zah-
len fallen, als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und unendlich viele andere, so kan man durch
eben die Schlüsse, welche bey der Quadratrechnung III, 41. gebraucht
worden sind, darthun, daß keiner dieser Brüche die wahre Cubicwur-
zel einer ganzen Zahl zwischen 1 und 8, als zum Beispiel 4, seyn könne.

§. 88. Denn wenn man annimmt, daß einer unter diesen Brü-
chen, was man vor einen nehmen will, als $\frac{1}{2}$ die wahre Cubicwur-
zel von 4 sey, so wird man folgender massen schließen, und zeigen

III. Können, daß derselbe die gedachte Wurzel nicht sey: Der angegebene Abschnitt. Bruch $\frac{7}{4}$ ist mit den kleinsten Zahlen geschrieben, welche ihn ausdrücken könnten, und läßt sich demnach nicht in eine ganze Zahl verwandeln, denn von solchen Brüchen ist hier allein die Rede. Bedeutete $\frac{7}{4}$ eine ganze Zahl, so wäre an sich klar, daß er die Wurzel von 4 nicht seyn könnte, III, 87. wäre er aber sonst nicht mit den kleinsten Zahlen ausgedrückt, so könnte man ihn vorher II, 8. auf die kleinste Benennung bringen, welche er haben kan, und eben das beweisen. Und muß also oder kan wenigstens jederzeit gesagt werden, daß ein dergleichen Bruch, welcher als die Wurzel angegeben wird, sich nicht auf kleinere Benennungen bringen lasse. Man mache die Cubiczahl des angegebenen Bruchs, $\frac{7}{4}$, so ist III, 86. bewiesen, daß dieselbe ohnmöglich eine ganze Zahl seyn könne. Da nun die angegebene Zahl 4 eine ganze Zahl ist; so kan die Cubiczahl des angegebenen Bruchs $\frac{7}{4}$ ohnmöglich der 4 gleich seyn. Also kan auch derselbe Bruch $\frac{7}{4}$ ohnmöglich die wahre Cubicwurzel von 4 seyn. Eben so kan man bey einem jeden andern Bruch, so nur angegeben werden kan, schließen, und daraus ist klar, daß keiner angegeben werden könne, von welchem nicht zu zeigen wäre daß er die Wurzel nicht sey. Demnach ist kein Bruch, von was Größe und Beschaffenheit er auch seyn mag, die Cubicwurzel von der Zahl 4, oder von einer jeden ganzen Zahl, deren Cubicwurzel nicht wieder eine ganze Zahl ist.

S. 89. Es ist also wieder keine Hofnung eine solche Wurzel genau zu finden. Denn wie wil ich das finden, so nicht angegeben, und demnach auch nicht gefunden werden kan, oder etwas schreiben, so doch weder zu schreiben noch auszusprechen ist? Aber man kan sich auch hier einer dergleichen Wurzel nähern, und ob zwar, daß wir bey unserm Exempel bleiben, keine Zahl kan gefunden werden, welche in ihr Quadrat multipliciret, genau und ohne dem geringsten Abgang 4 brächte, so kan doch ein solcher Bruch angegeben werden, welcher in sein Quadrat multipliciret, eine Cubiczahl giebt, welche von 4 sehr wenig unterschieden ist, und diesen Unterschied kan man nach Belieben kleiner machen, und sich also der wahren Wurzel der gegebenen Zahl so sehr nähern, als nur in einem jeden vorkommenden Fall mag erfordert werden.

Wie man sich den Cubicwurzeln nähert, wenn sie nicht genau zu haben sind.

S. 90. Die Weise dieses zu verrichten ist einerley mit derjenigen, wel-

welche oben bey der Quadrat-Wurzel ist gezeigt worden. III, 50. Es muß zum voraus gesetzt werden, daß, wenn man die Cubiczahl von einem zehentheiligen Bruch machet, in dieser Cubiczahl von der letzten Ziffer bis an dem Ort der Einheiten drey mal so viele Ziffer vorkommen, als in der Wurzel. Also ist von 0,2 die Cubiczahl 0,008, denn die Quadratzahl davon ist 0,04, wie oben III, 5. gesehen worden, und aus der Multiplication leicht erhellet, und diese durch 0,2 multipliciret, giebt 0,008. Eben so wird gefunden, daß die Cubiczahl von 0,02, die Zahl von 0,000008 sey, die von 0,003 aber 0,000000027, und so ferner, daß also jederzeit die Zahl der Ziffer die in der Wurzel nach dem Ort der Einheiten oder dem (,) stehen müssen, gefunden werden, wenn man die Zahl der Ziffer, die in der Cubiczahl hinter dem Ort der Einheiten vorkommen, durch drey theilet.

III.
Abkürzung.

§. 91. Nun kan das folgende alles nicht viele Schwierigkeit haben. Wir wollen zuerst eine Zahl suchen, welche der Cubicwurzel von 4 nahe kommt. Man hänget nur an die 4, nach welcher man das (,) gesetzt, so viele Classen, jede von drey 000 an, als man nöthig erachtet. Jede von diesen Classen giebt eine Ziffer vor die Einheiten der untern Ordnungen, und demnach die erste Classe, Zehentheil, die zweyte Hunderttheil, die dritte Tausendtheil, und so ferner. Oder man kan auch diese Classen nach und nach an die Ueberschleisseln anhängen, indem man in Ausziehung der Wurzel fortfährt:

$$\begin{array}{r}
 4,000|000|1,58 \\
 \hline
 1 \quad | \quad | \quad | \\
 3) \quad 3 \quad 000 \\
 \quad 1 \quad 5 \quad . \\
 \quad \quad 75 \\
 \quad \quad 125 \\
 \hline
 675) \quad 625 \quad 000 \\
 \quad 540 \quad 0 \quad . \\
 \quad \quad 28 \quad 80 \quad . \\
 \quad \quad \quad 512 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 55 \quad 688
 \end{array}$$

III.
Abschnitt.

Es ist demnach die gefundene Zahl 1,58 welche der Wurzel gar nahe kommt; denn ihre Cubiczahl ist 3,944312, welches genau genug ist. Denn wegen der zweyfachen Multiplication bringt ein sehr geringer Fehler in der Wurzel einen grossen Unterschied in der Cubiczahl selbst. Wie zum Beispiel; wenn man an statt 4, die Zahl 3 vor die Cubicwurzel annimmt, man an statt 64 die Cubiczahl 27 bekommt, welche von der ersten um ganze 37 Einheiten verschieden ist. Doch kan man die Wurzel noch näher haben, wenn man noch eine Classe von 000 zu dem Ueberbleibsel setzt, und so dann die Rechnung fortführet.

§. 92. Fast eben so machet man es mit den zehentheilligten Brüchen, wenn von denselben die Cubicwurzeln auszuziehen sind. Es muß aber alles hier wieder angewandt werden, so oben III, 54. bey den Quadratzahlen von eben dergleichen Brüchen gelehret worden ist: insonderheit muß man nicht vergessen am Ende jederzeit so-viele einzelne 00 anzuhängen, als erfordert werden, damit ein Theilungszeichen, durch welches man die gegebene Zahl in Classen abtheilet, eben nach der Ziffer zu stehen komme, welche ganze Einheiten bedeutet. Es sey die Cubicwurzel auszuziehen aus 0,0359. Ich setze vor diese Zahl 0,035| 700, und fange so dann die Arbeit bey der zweyten Classe an:

$$\begin{array}{r}
 0,035|900|0,329 \\
 \hline
 27 \\
 27) 8 900 \\
 54 \\
 36 \\
 8 \\
 \hline
 3072) 3 132|000 \\
 800
 \end{array}$$

Die Wurzel ist demnach 0,329, deren Cubiczahl ist 0,03561289, so von unserer gegebenen Zahl nur um etwas wenig verschieden ist.

§. 93. Man kan sich die Arbeit bey Ausziehung so wohl der Quadrat- als auch der Cubicwurzel ungemein erleichtern, wenn man eine Tafel bey der Hand hat, in welcher die Quadrat- und Cubiczahlen von allen Wurzeln bis auf 1000, oder noch weiter verzeichnet sind.

An statt daß wir, indem wir uns unserer kurzen Tafel bey Ausziehung einer Cubicwurzel bedienen, die erste Classe zur linken höchstens nur von drey Ziffern annehmen dürften, kan man in diesem Fall in derselben viel mehrere stehen lassen, nemlich sieben, achte oder neune, wenn man eine Tafel hat in welcher die Wurzeln bis auf tausend gehen, dergleichen wir hier annehmen wollen. Denn ginge die Tafel bis auf 10000, so könnten bis zwölf Ziffer in der ersten Classe bleiben. Die übrige Arbeit geschieht vollkommen, wie gewiesen worden ist. Aber man bekommt, indem man aus dieser ersten Classe die Wurzel vermittelst der Tafel ausziehet, oder aus derselben die Cubiczahl nimt, welche unmittelbar kleiner ist als die Ziffer dieser ersten Classe: Man bekommt, sage ich, auf die Art so gleich die drey ersten Ziffer der Cubicwurzel, welches eine sehr große Erleichterung ist. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern:

$$\begin{array}{r} 532798752 \mid 354 \mid 810 \text{ B} \\ \text{A } 531441000 \\ \hline 1968300) \quad 1357752 \quad 3 \end{array}$$

Die erste Classe hat hier neun Ziffern, von denselben hat man die Cubiczahl A, welche aus der Tafel genommen worden, abgezogen, und die Wurzel davon 810 bey B hingesezt. Die Cubiczahl A, von den Ziffern der ersten Classe abgezogen, läßt das unter derselben verzeichnete übrig, mit welchen man ferner fortfähret, wie sonst: nemlich man sezt demselben die erste Ziffer der folgenden Classe 3 zu, so hat man die Zahl aus welcher durch die Division die nächste Ziffer der Wurzel gebracht werden muß, und der Theiler ist auch hier das Quadrat desjenigen, so an der Wurzel bereits gefunden worden, drey mal genommen: welches wir größerer Deutlichkeit halben der zu dividirenden Zahl an die Seite gesezt. Wir hoffen daß dieses nicht allein von den Cubiczahlen begreiflich seyn, sondern auch eine hinlängliche Anweisung geben werde, eben dergleichen bey Ausziehung der Quadratwurzeln ohne Schwierigkeit anzuwenden.

A a

Bier

Vierter Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln.

Allgemeine Begriffe von dem ausgedehnten Wesen.

§. 1.

In der Geometrie betrachtet man dasjenige, was man im eigentlichen Verstand bey einigen Dingen eine Grösse nennt, und aus welchen man sie groß oder klein zu seyn urtheilet. Diese eigentlich so genannte Grösse einiger Dinge ist die Ausdehnung derselben nach allen Seiten. Dergleichen ist bey allen Körpern anzutreffen: denn es haben alle Körper Theile, welche neben und über einander liegen, und hieraus entsteht diese Grösse der Körper, und die Ausdehnung derselben nach allen Seiten. Nämlich weil die Theile in einem fort nach einander liegen, so erstreckt sich der Körper in die Länge; da neben den vorigen Theilen zur Seite noch andere dergleichen Theile liegen, so erstreckt sich der Körper auch in die Breite, und daraus, daß wieder solche Theile über einander gesetzt sind, entsteht auch die Ausdehnung des Körpers in die Höhe oder in die Tiefe.

§. 2. Wenn man sich einen Begriff davon machen wil, von was Art die Ausdehnung bey einem jeden Körper sey, das ist, wie die Theile zusammen geordnet worden, daß diese oder jene Art der Ausdehnung bey einem Körper entstanden, hat man nur auf die Gränzen derselben Acht zu haben, oder auf dasjenige, so bey einer jeden Ausdehnung das äußerste ist. Wenn man die Theile so ein ausgedehntes Wesen, von was Art es auch seyn mag, wie in der 25. Zeichnung, zusammen ordnet, so bekommt man ein ausgedehntes Wesen von einer gewissen Gestalt oder Figur ABC, welche Gestalt man deutlich begreift, wenn man sich nur die äußersten Theilchen, und in was Ordnung dieselbe neben einander gesetzt sind, vorstellt. Denn an dem inwendigen ist hier nichts gelegen. Nachdem die äußersten Theile geordnet sind, können die innern nur auf einerley Art gesetzt werden, nem-

nemlich so, daß alles voll werde. Denn man stellt sich vor, daß die Ausdehnung in einem fortgehe ohne Zwischenraum oder Absatz. Und dieses ist den gemeinen Begriffen gemäß; wie man merken wird, wenn man nur darauf Acht hat, wie man sich die Größe eines Schwammes vorstellt. Ob zwar in demselben viele Löcher sind, welche zu den hohlräumen, oder wenn man wil, steinichten Materie, so den Schwamm ausmacht, nicht gehören, so rechnet man diese Löcher doch mit zu der Größe des Schwammes, und wenn man dessen Länge haben wil, so misst man von einem Ende nach dem andern in einem fort, ohne vor die Löcher etwas abzurechnen, welches doch geschehen müßte, wenn man diese Löcher nicht als zu der ganzen Ausdehnung des Schwammes gehörig, annähme.

§. 3. Ob zwar nicht nothwendig ein jedes ausgedehntes Wesen ein Körper ist, und es gar nicht folget, daß indem ich mir etwas ausgedehntes vorstelle, ich mir einen Körper vorstelle: so pflegt man doch in der Geometrie ein jedes dergestalt nach allen Seiten ausgedehntes Wesen einen Körper zu nennen. Wir sagen: nicht alle Dinge die wir uns als ausgedehnt vorstellen, seyn derowegen nothwendig Körper, und man kan sich davon leicht überführen. Was hindert, daß ich mir nicht etwas ausgedehntes vorstellen sol, in dessen inwendiges ich ohne Mühe und Widerstand eindringen vermögend bin? In der Geometrie machet man dergleichen Begriffe beständig, wie auch in dem gemeinen Leben; wenn wir uns zum Exempel den Raum in einem Zimmer vorstellen als einen bloßen Raum, nicht in so ferne in demselben andere Körper, wenigstens Luft, enthalten sind. Denn einen solchen Raum stellen wir uns allzeit so vor, daß er uns gar nicht ver hindere in das Zimmer zu kommen, und in dasselbe etwas hineinzusetzen. Allerdings aber stellen wir uns diesen Raum groß und ausgedehnt vor. Nun ist dieses eine Eigenschaft, welche von einem Körper nicht kan abgesondert werden, daß er seiner Natur nach ver hindere, daß man nicht in sein inwendiges hinein kommen könne. Es müssen erstlich die Theile Raum machen, welche in dem inwendigen der Körper sind, ehe etwas an ihre Stelle kommen kan, welches bey dem leeren Raum nicht so ist, da alle Theile, die wir uns in demselben vorstellen, in ihrer Ordnung bleiben, man mag in denselben bringen was man wil. Demnach kan der leere Raum ohnmöglich ein Körper seyn, ob wir ihn zwar uns eben als wie die Körper ausgedehnet, und aus Theilen, welche auffser einander liegen, zusammen gesetzt, vorstellen.

IV. ~~Wissheit.~~ len. Dennoch nennet ein Geometra diesen leeren Raum doch öfters einen Körper; fragt man warum? so ist die Antwort, weil man in dieser Wissenschaft bey den Körpern nichts mehr als die Ausdehnung betrachtet, und ihn nur auf dieser Seite ansiehet, ohne auf die übrigen Eigenschaften desselben Acht zu haben, so kan man alle dasjenige, so nur eine Ausdehnung haben mag, vor einen Körper halten, es mag nun dasselbe die übrigen Eigenschaften der Körper, welche hier nicht betrachtet werden, haben oder nicht, ohne sich bey der Sache im geringsten zu verwirren, und was von der Ausdehnung der Körper getwiesen wird, ist von einer jeden andern Ausdehnung richtig.

S. 4. Die Ausdehnung eines jeden besondern Körpers muß sich nothwendig irgendwo endigen. Es gehet derselbe niemals beständig fort, sondern seine Ausdehnung höret irgendwo auf. Und dieses zwar auf einmal, nicht mit einem langsamen abnehmen. Ich gehe in dem Raum eines Zimmers nach einander fort. Auf einmal höret der Raum des Zimmers auf, und fänget der Raum eines Saals an, ohne daß etwas dazwischen wäre, welches weder zu dem Zimmer noch zu dem Saal gehörete. Wo sich die Ausdehnung eines Körpers endiget, da sind die Gränzen seiner Ausdehnung. Diese Gränzen haben keine Dicke. Es gehet mit denselben eben so, als mit der Abtheilung welche die Gränzen zweyer Aecker die neben einander liegen, feste stellet, wenn diese Abtheilung nicht durch einen Graben, einen Weg, eine Wand, oder was dergleichen gemacht, sondern bloß durch eine ausgedehnte Schnur oder auf eine andere dergleichen Art bezeichnet worden. Dadurch gehet weder dem einen noch dem andern Acker etwas ab, welches nicht geschehen könnte, wenn die Gränze an sich einige Breite hätte: eben so ist es mit den Gränzen der Körper beschaffen, welche keine Dicke haben.

S. 5. Demnach sind diese Gränzen der Körper in die Länge und Breite ausgedehnet, denn der Körper endiget sich an vielen Orten, die an und neben einander liegen, und ich kan in der Gränze desselben in die Länge und in die Quere fortkommen. Sie haben aber keine Ausdehnung in die Tiefe, wie diese Ausdehnung ausser den vorigen zweyen, die Körper haben. Eine dergestalt in die Länge und Breite, aber nicht in die Tiefe ausgedehntes Wesen pflegt man eine Oberfläche zu nennen.

S. 6. Ich sehe nicht was bey dieser Erklärung nicht leicht und natur-

natürlich könnte genennet werden: und doch haben sich einige Klüglinge gefunden, welche sich bey derselben und andern dergleichen aufgehalten haben. Es ist kein Ding, sagen sie, welches bloß in die Länge und Breite ausgedehnet wäre, und also ist es widersinnisch sich eine Oberfläche als bloß in die Länge und Breite ausgedehnt, vorzustellen. Wie? sind denn die Gränzen sie nichts, das ist, ho über welche er sich in Von diesen Gränzen breit, aber nicht tief der Ausdehnung eine daß in so ferne, wo wendig eine Tiefe mi ohne das andere zu b mir allein vorstellen, geschieht dieses nicht Figur eines Zuckerhu der weiß und süß sey man auf die Frage was ein Zuckerhut eigentlich vor eine Figur hat, vieles von der Süßigkeit dieser Materie, von ihrer Ausdehnung, und dergleichen Dingen sagen wolte?

§. 7. Was von den Eörpern gesagt worden, ist auch auf die Oberflächen anzuwenden. Sie haben meistens Gränzen ihrer Ausdehnung, wo diese sich anfängt, und wo sie sich endiget. Ich sage meistens, denn es haben nicht alle Oberflächen dergleichen Gränzen. Einige derselben fangen eigentlich nirgends an, und endigen sich auch nirgends. Dergleichen sind die Oberflächen einer Kugel, eines eiförmigten Eörpers, und tausend dergleichen mehr. Man nehme aber nur einen Theil von einer dergleichen, oder jeden andern Oberfläche, so hat man sogleich Gränzen der Ausdehnung derselben. Größerer Deutlichkeit halber kan man die Oberfläche eines Blatt Papiers nehmen. Denn es ist nichts daran gelegen, was vor eine Oberfläche man sich hier vorstelle. Man kan die Begriffe welche wir bezubringen suchen, aus der Betrachtung der einen so wohl bekommen, als aus der Betrachtung einer andern. Man thut demnach am besten, daß man sich an etwas dergleichen halte, so man sich am allerleichtesten vorstellen kan.

§. 8. Diese Gränzen der Ausdehnung einer Oberfläche haben

IV. **Abchnitt.** Keine Dicke; denn wie könnten sie eine haben, da die Oberfläche selbst keine hat, aber sie haben auch keine Breite. Man führe die Spitze der subtilsten Nadel, welche Spitze man sich so zart vorstellen kan, als man nur will, nach und nach auf einer dergleichen Oberfläche, als wir betrachten, fort, endlich kommt man ans Ende oder an die Gränze. Führet man um das geringste fort, so kommt man ausser dieselbe. Ich muß entweder die Spitze meiner Nadel innerhalb meiner Oberfläche haben, oder ausser derselben, es ist kein Mittel zwischen beyden. So bald sie aufgehöret innerhalb derselben zu seyn, so ist sie ausserhalb. Es kan die Spitze der Nadel, indem man sie von innen nach aussen zu fortführet, in der Gränze selbst sich nicht noch weiter auswärts bewegen. Dieses alles würde nicht so seyn, wenn die Gränze einige Breite hätte. Wohl aber hat eine dergleichen Gränze eine Länge. Denn man kan in derselben fortgehen, und wenn man will um die Oberfläche, von welchen sie die Gränze ist, um und um herum kommen. Es sind demnach die Gränzen der Oberflächen Längen, welche weder Breiten noch Dicken oder Tiefen haben.

§. 9. Man pflegt diese Längen ohne Breiten und Tiefen, *Linien* zu nennen, welche man sich wieder vor sich vorstellen kan, ohne an die Oberflächen zu gedenken, von welchen sie die Gränzen sind. Dieses thut man in dem gemeinen Leben, wenn man nach der Entfernung zweier Orter von einander, oder nach der Länge des Weges von einem Orte zu dem andern fraget. Man ist in diesem Fall nicht vergnügt, wenn man etwas von der Breite der Landstrassen zur Antwort bekommt, welche man zu reisen hat, da man eigentlich die Zahl der Meilen von dem einen Ort zum andern wissen wolte, und saget man uns diese Zahl der Meilen, und machet uns auf die Art die Entfernung des einen Orts von dem andern bekannt, so siehet man alles übrige, so etwa von der Breite der Strassen, von ihrer Güte, Sicherheit, und dergleichen, hinzugethan worden, als etwas fremdes an, welches eigentlich zur Antwort auf die Frage nicht gehöret. Indem man dieses thut, und die Länge allein wissen will, ohne sich um die Breite und übrige Umstände, die mit einem Weg nothwendig verknüpft sind, zu bekümmern, so sondert man ja allerdings dieses alles in Gedanken von der Länge desselben ab, und man muß es thun, wenn man alle Verwirrungen vermeiden will.

§. 10. Man stelle sich also nunmehr eine Linie vor, was man vor eine will, als die Gränze von einer Fläche, oder auch ehe darauf
Acht

Nicht zu haben, daß sie eben wirklich eine dergleichen Gränze abgebe, weil in der That an diesem Umstand hier nichts gelegen ist. Man kan in einer solchen Linie fortgehen wie gesagt worden, aber man kommt endlich aus Ende derselben. So bald man am Ende ist, und weiter fortgeht, so kommt man ausser derselben: Es ist nicht möglich, den Weg um das geringste fortzusetzen, und doch weder in der Linie zu bleiben noch ausser dieselbe zu kommen. Es endiget sich wieder die Linie auf einmal, und ihr Ende hat keine Länge. Man pflegt diese Gränzen der Linien Puncte zu nennen, welche man sich also nicht nur wie die Linien, welche sie endigen, ohne Breite und Tiefe, sondern auch ohne Länge vorstellt, und hierin ist eben ein Punct von einer Linie unterschieden.

IV.
Nochmal.

S. 11. Man sieht leicht aus diesem allen, daß man die Begriffe vom Punct der Linie und Oberfläche nothwendig so annehmen müsse, wie sie angenommen worden, wenn man sich in diesen Dingen nicht verwirren will. Die Sache leidet es nicht anders: wir müßten ganz was anders einen Körper nennen, als wir thun, und uns ganz einen andern Begriff von einem ausgedehnten Wesen machen, als wir wirklich haben, wenn wir diese Begriffe, welche aus jenen nothwendig herfließen, verändern wollten.

Begriffe der Puncte und Linien.

S. 12. Um aber nunmehr die besondern Arten von diesen Dingen, die besondern Arten nemlich der Linien, der Flächen, der Körper zu erklären, thut man am besten, wenn man, wie auch gemeiniglich geschiehet, von dem Puncte anfängt. Man kan sich dasselbe auch vorstellen, ohne dasjenige, so bisher gesagt worden, zum Grunde zu legen.

S. 13. Wir stellen uns im gemeinen Leben zum öftern Dinge als Puncte ohne einige Theile, und ohne Länge, Breite und Dicke vor. Man nehme zum Exempel, ein einziges Stäubchen Mehl. Niemand sagt, daß sein Kasten voller geworden, wenn man ein einziges Stäubchen Mehl mehr in denselben gethan; oder leerer, wenn man eines aus demselben weggenommen: daß er reicher geworden, sich mehr satt essen könne, auf längere Zeit Vorrath habe, wenn man ihm ein Präsent von einem solchen Stäubchen gemacht, oder daß er Mangel werde leiden müssen, wenn man ihm eines entwendet. Dies

IV. **Abchnitt.** Ies alles würde man nicht sagen können, wenn man sich ein dergleichen Stäubchen Mehls nur vorstelle, vorstellte. Denn in diesem Fall durch desselben vermindert werden. Ob es eine Größe hat, und man deutlich genug bemerken kann die Größe vor, welches nicht hätten von solchen Dingen. Wie kan jemand sagen, es hat oder wenn man will, es hat keine Größe, oder aber, es mehr oder weniger, mache sage ich, jemand dieses für Dinge hätte, daß ganz un-

§. 14. Wir haben also den Begriff des Puncts alle, und können ohne denselben im gemeinen Leben nicht seyn, und was soll uns demnach hindern, daß wir ihn nicht in die Wissenschaften mit einbringen. Die Anwendung desselben und dergleichen Begriffe, wird am besten weisen, daß es damit gar keine Schwierigkeit hat. Doch sollte es jemanden schwer scheinen, sich etwas ganz und gar ohne Größe und Theile vorzustellen, so mag er sich an die Stelle eines Puncts etwas so Kleines vorstellen, daß es in Vergleichung mit einem andern vor nichts zu halten ist. Er mag es annehmen als ein Stäubchen Mehls, und sagen, daß dasselbe zwar eine Länge, Breite und Tiefe habe, aber eine solche, welche nicht in Betrachtung gezogen zu werden verdienet. Thut man dieses, so wird man in der That nicht so vollkommen richtig denken, als ein erfahrener Geometra, doch wird dieser Begriff einen auch in keinen Hauptfehler verleiten, und nach und nach wird man sich angewöhnen, von diesem auf den wahren Begriff eines Puncts über zu gehen, wenn man nemlich denselben zum öftern anwendet.

§. 15. Ein Punct ist nicht nothwendig in der Stelle, in welche es gesetzt worden. Es kan dasselbe auch in einer jeden andern Stelle seyn; es kan sich demnach auch aus einem Ort in den andern bewegen, oder aus einem Ort in den andern fortfließen. Diese Bewegung geschieht allezeit nach einer gewissen Strecke, und indem dieselbe

selbe geschieht, entsteht eine Linie. Der Begriff des fließenden Puncts erläutert am besten, wie eine Linie erzeugt wird. IV. Abschnitt.

§. 16. Man stelle sich einen Tropfen Wassers vor, welcher auf einer Oberfläche liegt, und mache durch die Veränderung der Lage dieser Fläche, daß der Tropfen fortzufließen anfangt. Er wird einige Masse zurück lassen, welche den Ort bemerken wird, wo er erst gewesen, und durch eben dergleichen Masse wird er nach und nach alle übrige Derter bezeichnen, in welche er gekommen, bis auf denjenigen, welchen er zuletzt eingenommen, und in welchem er stehen geblieben. So ist es mit der Dinte, welche in der Feder hängt, deren Spitze wir auf dem Papiere von einem Orte zu einem andern fortführen; und eben so lassen Kreide, Wasserbley und andere solche Körper einige Theile hinter sich an der Fläche kleben, auf welcher man sie angerieben hat, welche den Weg bezeichnen, den diese Körper auf derselben Fläche genommen. Auf eben die Art muß man sich ein Punct in seiner Bewegung vorstellen. Es muß, indem es sich bewegt, alle Derter bezeichnen, in welche es nach und nach gekommen ist. Dadurch entsteht eine Länge, ohne Breite und Tiefe, mit einem Wort, eine Linie. IV, 8.

§. 17. Eine solche Bewegung kan nicht anders geschehen, als daß das Punct nach einer gewissen Richtung oder Strecke, das ist, da oder dorthin, nach dieser oder jener Seite, gehe. Die Strecke, welche das Punct in einem Augenblick seiner Bewegung gehalten, kan es in den nachfolgenden entweder ebenfalls folgen, oder dieselbe mit einer andern verwechseln. Es ist eben so mit den Bewegungen aller andern Körper. Wir gehen entweder von einem Ort zu dem andern gerade zu, oder wir verändern unsern Weg nach Belieben, und dieses können wir alle Augenblick thun, wie diejenigen, welche beym Spazieren gehen zuweilen ihren eigenen Schatten folgen, welcher alle Augenblick nach verschiedenen Strecken fällt.

§. 18. Verändert das fließende Punct, indem es so fortfließet, seine Strecke nicht, sondern folgt derjenigen, die es Anfangs gehalten, beständig, so lange die Bewegung dauret, so beschreibt es eine gerade Linie. Dergleichen ist diejenige, deren Anfang und Ende wir mit A, B bezeichnen. Oder vielmehr haben wir eine gerade Linie zwischen A, B nur unvollkommen vorgestellt, denn es ist eben so wenig möglich eine vollkommen gerade Linie zu ziehen, als wenig man

Fig. 26.

IV. dieselbe, wie sie doch seyn sollte, ohne alle Breite machen kan. Doch ist daran nicht viel gelegen. Die Figuren dienen entweder nur die Begriffe, welche mit Worten beygebracht werden, desto deutlicher und lebhafter zu machen, oder sie dienen zur Erfindung dieser oder jenen neuen Grösse aus einigen gegebenen, fast wie in der Rechenkunst aus einigen gegebenen Zahlen andere gefunden werden. In beyden Fällen sind körperliche Linien, welche man nemlich auf Papier, Holz oder Metall gezeichnet hat, hinlänglich. Denn man kan diese so zart und so gerade machen, daß niemand weder einige Dicke, noch einige Krümme bey denselben bemerken kan. Dadurch müssen auch die Fehler, welche aus ihrer wirklichen Dicke oder Krümme herrühren, in der Anwendung unmerklich werden: um unmerkliche Fehler aber hat man sich nicht zu bekümmern, denn wenn sie nicht zu merken sind, so kan man sie auch nicht verbessern: und gar kein Fehler und ein unmerklicher Fehler ist in der Ausübung einerley, weil man doch dasjenige, so gar nicht fehlet, von dem, so nur um etwas unmerkliches fehlet, nicht unterscheiden kan. Ja es können die körperliche gerade Linien, welche wir ziehen, öfters eine ziemliche Breite und Krümmung haben, ohne daß daraus Fehler entstünden, nach welchen wir sonderlich zu fragen hätten, denn es wird nicht allezeit erfordert, daß man so gar genau verfahre, und man kan sich öfters mit etwas solchen, so dem wahren nur ziemlich nahe kommt, begnügen lassen.

§. 19. Indessen ist es selbst bey den Betrachtungen der Figuren und übrigen Eigenschaften der Grössen nöthig, daß man eine gerade Linie ziehen könne, welche richtig genug sey. Dieses weiß jederman, und es darf nicht gezeigt werden. Ja es kan nicht einmal in der Geometrie gelehret werden. Denn es kommt alles auf Handgriffe an. Man muß ein gutes Linial haben, und an demselben einen Stift oder eine Reißfeder hinführen; So lange man bey der puren Betrachtung stehen bleibt, schicket sich Wasserbley am besten dazu, in der Ausübung bedienet man sich anderer Vortheile, welche hieher nicht gehören. Dieses und dergleichen ist alles, so wir hier sagen können. Man siehet, daß dieses nichts Geometrisches sey, so nemlich zur Betrachtung der Grössen eigentlich gehörete, sondern daß diese Handgriffe von den übrigen, welche die Künstler und Handwerker im Anfang ihrer Lehrjahre sich bekannt zu machen haben, nicht unterscheiden seyn.

§. 20. Eine gerade Linie kan zwischen jeden zwey Puneten, wo man

man diese auch annehmen will, gezogen werden. Will man dieselbe edrperlich machen, so kan man nur einen starken ausgedehnten Faden, an die gegebene Puncte anhalten. Die Länge dieses Fadens ohne seine Dicke betrachtet, ist die gerade Linie, welche zwischen denselben zweyen Puncten gezogen werden kan, im Geometrischen Verstande, und der angegebene Handgrif zeigt uns also die Möglichkeit einer geraden Linie zwischen jeden gegebenen zweyen Puncten augenscheinlich.

IV.
Abwieser.

S. 21. Es ist aber die gerade Linie die kürzeste unter allen Linien, welche zwischen denselben zweyen Puncten können gezogen werden. Dieser Satz ist wie der vorige an sich klar, ohne daß wir etwas anbringen könnten, so uns von der Wahrheit desselben mehr überzeugen könnte, als wir es gegenwärtig sind. Zum deutlicheren Verstand desselben können wir dieses sagen. Man zeichne die Puncte A und B, lege so dann einen Faden durch A und B, und lasse ihn im übrigen nach einer beliebigen Krümmung durch C oder D gehen. So bald man ihn verkürzt, wird man finden, daß einige Theile desselben sich der geraden Linie AB, die zwischen den gedachten zweyen Puncten gezogen ist, nähert, und machet man den Faden so kurz als man kan, so wird sich derselbe in gerader Linie von A nach B erstrecken.

F. 27.

S. 22. Man siehet hieraus auch deutlich, daß zwischen zweyen Puncten nicht mehr als eine gerade Linie könne gezogen werden. Es ist nur ein Weg der kürzeste von A nach B, die Umwege sind mannigfaltig. Diesen kürzesten Weg hält die gerade Linie. Will man es sichtlich machen, so zeichne man erstlich eine gerade Linie durch A, B, und lege so dann die Schärfe eines Linials oder eines ausgespannten Fadens an dieselbe. Diese Schärfe oder dieser Faden wird mit der geraden Linie AB zusammen fallen. Wenn aber zwey gerade Linien zusammen fallen, so giebt es nur eine Linie; doch was halten wir uns bey diesen leichten Sachen länger auf.

S. 23. Eine gerade Linie kan nach Belieben verlängert werden: es ist nichts, welches uns zwingen könnte, ein Punct, welches wir in der Bewegung zu seyn uns vorstellen, uns als ruhend vorzustellen. Wir können, wie lang und wie weit sich auch ein solches Punct bewegt haben mag, noch immer eine fernere Bewegung bey demselben begreifen, dadurch verlängert es die Linie, welche es zu beschreiben angefangen, wenn es nur nicht in eben dem Weg zurücke kehret. Denn sonst wird dieser Weg eigentlich nicht verlängert, wie die Pferde, welche auf der Schule im Kreiß getrieben werden, indem sie sich dergestalt

IV. abmatten, eben keine weite Reise thun. Dieses ist aber bey einer geraden Linie nicht. Ein Punct, welches einerley Strecke in seiner Bewegung hält, entfernt sich beständig von einem jeden Ort, in welchem es gewesen ist, und nähert sich andern Orten, in welchen es noch nicht gewesen, und kan also niemals wieder an einen solchen Ort kommen, welchen es einmal verlassen hat. Es hat also eine gerade Linie kein anderes Ende, als dasjenige, so man ihr mit Willen giebt. Es ist wahr, ich muß irgend wo aufhören, wenn ich eine gerade Linie ziehe, aber ich bin nicht notwendig verbunden, hier oder da aufzuhören. Einige äußerliche Umstände können mich bey körperlichen Linien dazu zwingen, als die Größe des Papiers, oder etwas dergleichen, aber niemals zwingt mich die Natur, oder die Beschaffenheit der Linie selbst dazu.

S. 24. Die Theile einer geraden Linie liegen alle nach einerley Strecke, und wie kan dieses anders seyn, da ein jeder derselben Theile durch die Bewegung des Puncts nach einerley Strecke beschrieben worden ist? F. 28. AB mag eine gerade Linie bedeuten, die wir nach Belieben bey C, D, und E getheilet haben. Weil nun, indem ein Punct den Theil der Linie AC beschrieben, es sich nach eben der Strecke bewegt hat, nach welcher es fortgegangen ist, indem es durch eine fernere Bewegung den Theil CD erzeugt, und weil es nach eben der Strecke durch D, E, und so ferner bis B fortgegangen, so ist klar genug, daß diese Theile der Linie AB nicht nach verschiedenen Strecken liegen können, wie zum Exempel die Theile FG, GH, HI, IK, nach gar verschiedenen Strecken liegen, die zusammen die gebrochene Linie FK ausmachen. Wenn man demnach die Strecke eines einzigen Theils CD einer geraden Linie AB weiß, wie klein dieser auch seyn mag, so weiß man die Strecken aller übrigen Theile derselben AC, CD, DE, EB, und die Strecke der ganzen Linie AB, wie weit dieselbe auch fortgezogen seyn mag.

S. 25. Und man kan demnach eine gerade Linie nur auf einerley Art verlängern. F. 29. Dieses ist so zu verstehen. Wenn AB eine gerade Linie ist, und ich will sie verlängern, so ist es mir nicht frey das Punct, welches AB verlängern soll, entweder nach C oder nach einem andern Punct D fortzuführen, und nach Belieben entweder BC oder BD zu beschreiben. Ist eines von diesen zwey Etücken BC die wahre Verlängerung der geraden Linie AB, so ist es das andere BD gewiß nicht, man mag dasselbe gezogen haben wie man will. Liegt BC mit AB nach

nach einerley Strecke, so liegen AB und BD nach verschiedenen Strecken, und kan also ABD ohnmöglich eine gerade Linie seyn.

IV.
Abschnitt.

§. 26. Aus diesem allen ist klar, daß durch jede zwey Punkte A, B, die Lage einer geraden Linie bestimmt und fest gestellt werde. Denn wenn man durch diese zwey gegebene Punkte die gerade Linie AB zie-

alle gerade Linien,
AC fallen, und
etc gehen, welche
te, so außer dieser
en andern geraden
as man dadurch
einer geraden Li-

verschiedene gera-
e Punkte, welche

F. 30.

Diese gerade Linien beschreiben, je mehr und mehr von einander. Denn sie entfernen sich von einander, indem sie von A ausgehen, und eines derselben nimt seinen Weg, zum Exempel, aufwärts und beschreibt AB, das andere gehet mehr unterwärts nach AC. Derowegen entfernen sich auch die geraden Linien AB, AC je mehr und mehr von einander, je weiter sie von A nach der Seite B, C fortgezogen werden, und können also von dieser Seite niemals wieder zusam-

IV. 24. Im Gegentheil, wenn man sich vorstellt, da B und C beyde von ihren Orten in gerader Linie nach nähern sie sich einander beständig, und eines derselben Exempel nach der linken und unterwärts, das andere (der linken aufwärts. Dieser Bewegung folgen sie, n A zusammen kommen ferner, und es kommt dadurch das was von C ausgeflößen über dasjenige, so in B war, und gehet in dieser Strecke beständig schief aufwärts nach D zu, indem das andere Punet seinen Weg schief unterwärts nach E verfolgt. Demnach kommen die Punkte und die geraden Linien AD, AE auch auf dieser Seite nicht wieder zusammen: Und es können also zwey gerade Linien EB, DC einander in einem Punct A schneiden, aber es ist ohnmöglich, daß sie einander in mehr als einem Punct schneiden, oder daß sie mehr als ein Punct gemeinschaftlich haben sollten. Wenn zwey gerade Linien zwey Punkte gemeinschaftlich hätten, so gingen sie alle bey-

IV. de durch die besagte zwei Punkte, also fielen sie zwischen denselben
Abchnitt. Punkten in eine gerade Linie zusammen, und gingen in einem fort, wenn man sie von beyden Seiten verlängerte, und demnach wären sie nicht zwei, sondern eine gerade Linie.

§. 28. Dieses sind die Haupteigenschaften der geraden Linien, welche alle bekannt genug sind, oder doch leicht eingesehen werden, wenn man nur auf den Begriff Acht hat, welchen wir von den geraden Linien haben. Denn wenn man die Wahrheit gestehen will, so ist es nicht möglich, jemanden einen Begriff von einer geraden Linie, durch eine Erklärung beizubringen, so künstlich man auch dieselbe verfassen mag: und alle Erklärungen der geraden Linie setzen wirklich zum Grunde, daß man bereits wisse, was eine gerade Linie sey. Was ist die Strecke anders als eine gerade Linie, welche von einem Punkte so oder so gezogen ist? Saget man also, eine gerade Linie entstehe, indem ein Punkt sich immer nach einerley Strecke bewege, so saget man in der That nichts anders, als eine gerade Linie entstehe, indem ein Punkt sich nach einer geraden Linie bewege. Es sind also die Anmerkungen, welche wir von den geraden Linien beygebracht, nicht anders als bloße Erläuterungen eines an sich bekannten und gemeinen Begriffes anzusehen. Wir wenden uns nunmehr zu den krummen Linien.

F. 28. §. 29. Man muß nicht sagen, daß alle die Linien krumm seyen, welche nicht gerade sind: denn man kan sich Linien vorstellen, welche weder gerade noch krumm sind. Wenn ein Punkt von F nach G gehet, daselbst die Strecke ändert, nach welcher es sich bewege, hatte, und von G nach H fließet, von dannen nach I, und endlich aus I zu K: so beschreibt es keine gerade Linie, aber auch keine krumme. Sein Weg ist aus verschiedenen geraden Linien zusammen gesetzt. Eine krumme Linie aber läßt sich aus geraden Linien nicht zusammen setzen; sie ist von denselben ganz und gar verschieden, so daß in einer krummen Linie, kein Theil angegeben werden kan, welcher eine gerade Linie wäre.

F. 31. §. 30. Es wird nemlich eine krumme Linie dergestalt erzeugt. Ein Punkt fließet, aber es ändert in jedem Augenblick die Strecke nach welcher es fließet, oder es gehet nicht in zweyen der kleinsten Theilchen der Zeit nach einerley Strecke fort. Indem zum Exempel die Spitze der Feder die krumme Linie ABCD beschrieben hat, ist sie im Anfang

fang nach der Strecke AE geführt worden, und würde die gerade Li-
nie AE beschrieben haben, wenn sie dieser Strecke gefolget wäre, al-
lein kaum hat sie angefangen sich nach AE zu bewegen, so hat sie schon
aufgehört diese Strecke zu verfolgen, und angefangen nach einer an-
dern zu gehen, welche sie wieder so gleich mit einer neuen verwechselt,
so daß in B sie nunmehr nach einer gar merklich andern Strecke BF
gegangen. Von dannen bis in C sind wieder dergleichen beständige
Veränderungen der Strecken in jedem Augenblick der Bewegung vor-
gegangen, bis daß die Spitze der Feder in C angelanget, allwo sie sich
nach CG zu bewegen angefangen; aber auch nach dieser Strecke hat
sie sich nicht länger als einen undenklich kleinen Augenblick bewegt,
und auf die Art ist sie endlich mit beständig veränderter Bewegung in
D gekommen.

IV.
Wissnia.

§. 31. Auf die Art werden alle krumme Linien beschrieben, und
das Exempel eines Menschen, welcher bey dem Spaziergehen seinem
eigenen Schatten folget, welches wir oben angebracht, machet dieses
gar deutlich. Man siehet hieraus, daß unendlich viele Arten von
unendlich vielen dergleichen Linien erdacht werden können, denn die
verschiedene Gesehe, nach welchen ein Punet bey seiner Bewegung die
Strecken nach welchen es gehet, verändern kan, sind ohnmöglich alle
zu erzehlen, und es bleibt noch immer eine unbeschreibliche Menge der-
selben übrig, wenn man auch noch so viele angegeben, und noch so
viele Arten von krummen Linien beschrieben hat.

§. 32. Sie gehören alle in die Geometrie, und müssen in dieser
Wissenschaft betrachtet werden, aber sie gehören nicht alle in die An-
fangsgründe derselben. Man hat sich einen gewissen Plan der Be-
trachtungen gemacht, welche man in diesen Anfangsgründen vorzu-
tragen nöthig erachtet, und man hat gefunden, daß die Abhandlung
aller krummen Linien zu dem Zweck, welchen man sich dabey vorge-
setzt, ohnnöthig sey, bis auf eine einzige, deren Eigenschaften man in
den Anfangsgründen in Erwägung zu ziehen hat; weil sie bey der
Auflösung der allerersten Aufgaben unentbehrlich ist. Diese ist der
Umkreis eines Circuls. Wir werden sagen was man davon eigent-
lich vor einen Begriff haben müsse, wenn wir vorher einige andere
Begriffe werden beygebracht haben, ohne welche jener nicht vollständig
werden kan.

Ober:

IV.
Abschnitt.

Oberflächen.

F. 32.

S. 33. Man kan sich vorstellen, daß die Oberflächen erzeugt werden, indem eine Linie, sie mag nun gerade oder krumm seyn, fortfließet; nur muß diese Linie, wenn sie gerade ist, nicht nach ihrer eigenen Strecke fortgehen, weil sie sonst nichts anders als eine gerade Linie, von welcher sie selbst einen Theil abgibt, beschreiben würde: sondern sie muß sich seitwärts bewegen. Die gerade Linie AB zum Exempel thut nichts anderes, als daß sie sich selbst verlängert, wenn sie nach ihrer eigenen Strecke BC fortgeht, sie beschreibet aber eine Oberfläche, wenn das Punct B einen andern Weg als BC nimmt, und sich, zum Beispiele, in der Linie BD bewaget, es mag nun BD eine gerade oder eine krumme Linie seyn, und die übrigen Theile der Linie mögen sich bewegen wie sie wollen. Wie bereits erinnert worden, so kan eine krumme Linie ebenfalls durch ihre Bewegung eine Oberfläche erzeugen; nur muß sie sich so bewegen, daß beständig einige Theile derselben außer die Oerter kommen, in welchen vorher andere Theile derselben krummen Linie gelegen. Was von der geraden Linie und deren Bewegung gesagt worden, kan die Sache zwar an sich klar machen: sollte aber doch noch einiger Zweifel übrig bleiben, so wird die Anwendung denselben gewiß heben, und er kan nicht einmal einen großen Einfluß in das folgende haben.

S. 34. Eine Oberfläche kan entweder eben oder uneben seyn. Je ne nennen wir auch schlechterdings eine Ebene, oder eine Fläche. Man kan den Begriff von beyden auf diese Art feste setzen: Eine Ebene läßt sich durch gerade Linien in so viele gleiche Theile theilen als man will, und wie man will. Bey einer unebenen Fläche mag man wohl zuweilen eine solche Theilung auf eine oder die andere Art angehen, aber man kan sie doch nicht vollkommen nach Belieben und beständig fort verrichten.

F. 33.

S. 35. Man stelle sich bey ABC ein glatt abgehobeltes Brett vor. Wenn man an die zwen Puncte desselben A und B einen ausgespannten Faden anhält, so fällt derselbe ganz in die Oberfläche des Bretts, und bezeichnet auf derselben die gerade Linie AB, welche die Oberfläche in zwen Theile theilet. Man hätte aber dergleichen Puncte als A und B auch anderswo in dieser Oberfläche annehmen können; und eine gerade Linie, oder unser Faden, welchen man von einem derselben bis zu dem andern gezogen, würde die Fläche nach wie vor getheilet haben.

Und

Und eben dergleichen läßt sich bey allen Theilen thun, in welche die IV. Oberfläche zerschnitten werden kan. Dieses ist das Merkmal, daß das ~~Werkmal~~ ^{Werkmal} Brett eben sey, und wenn man sich vorstellt, daß dasjenige was bey einem Brette mit dem Faden gethan werden kan, bey einer Oberfläche recht vollkommen genau eintrifft, und daß sich dieselbe durch eine vollkommene gerade Linie so theilen lasse, wie unser Brett mit dem Faden getheilet worden, so ist dieselbe eine wahrhafte Ebene. Die Oberfläche eines gemeinen gläsernen Spiegels kommet einer wahrhaften Ebene ziemlich nahe.

S. 36. Auf der andern Seite stelle man sich eine Oberfläche von der Art vor, dergleichen ohngefehr ein zusammen gerolletes Papier hat. Es ist wahr, man kan in einer solchen Oberfläche zwey Puncte A und B nehmen, und dieselbe mit einer geraden Linie zusammen hängen, welche ganz und gar in die Oberfläche fällt, und dieselbe in zwey Theile theilet. Und zwar können in der Oberfläche gar viele Puncte seyn, bey welchen dieses zutrifft; wie man dann wirklich überall, nach der Länge einer solchen Rolle, in deren Oberfläche, eine gerade Linie ziehen kan: Aber auf eine andere Art gehet dieses nicht an. Man nehme die zwey Puncte C und D, und verknüpfe sie mit einer geraden Linie CD, welche man sich als einen von C nach D straf gezogenen Faden vorstellen kan, so fällt diese gerade Linie CD nicht in die Oberfläche. Oder wil man in der Oberfläche, welche wir betrachten, von C nach D eine Linie CED ziehen, so kan dieselbe ohnmöglich gerade werden. Durch die gerade Linie CD aber wird die Oberfläche keinesweges getheilet. Denn eine Linie, welche nicht in einer Oberfläche, sondern außer derselben gezogen wird, kan in der Oberfläche keine Gränzcheidung machen. Eine dergleichen Oberfläche ist nicht eben, sondern uneben oder gekrümmt.

F. 34.

S. 37. Es ist zu bemerken, daß wir unter die Merkmale einer ebenen Fläche nicht mitgesetzt, daß sie bloß durch gerade Linien umschlossen seyn müsse. Es kan dieses seyn, und in diesem Falle wird die Figur dieser Ebene Geradelinicht genennet: aber die Gränzen einer Ebene können auch krumme Linien seyn. Man kan in einer jeden Ebene tausend Arten von krummen Linien verzeichnen, und in eine oder etliche derselben einen Theil der Ebene einschließen, da man denn die Figur dieser Ebene krummlinicht nennet. Dadurch wird das Wesen der Ebene nicht geändert, oder uneben gemacht was eben war: gleich wie ein Spiegel eben bleibt, man mag ihn in einen runden oder eckichten Rahmen fassen. Im Gegentheile kan, auch nicht geschlossen wer-

Ec

den,

IV. **Wapnit.** den, daß eine Oberfläche eben sey, wenn ihre Gränzen gerade Linien sind, denn dergleichen Gränzen können auch krumme Oberflächen haben. Man verzeichne auf einer Oberfläche ein Viereck, und setze auf dasselbe einen kleinen Berg von Wachs. Die Oberfläche dieses Berges kan, wie man wil, krum seyn, und doch wird sie von den vier geraden Linien, welche man in der Ebene gezogen hat, umschlossen.

§. 38. Wir werden als die unebenen oder krummen Linien, sie mögen gerade seyn oder betrachten werden voraus setzen, daß sie in der Betrachtung der Lage der That können wir nicht anders als auf die Ebene man könnte sich doch unter diesen vorstellen, welche nicht in der Fläche des Papiers liegen. Und dieses werden wir wirklich thun müssen, wenn wir von den Körpern handeln werden, deren Theile alle ohnmöglich in einer gegebenen Oberfläche liegen können. Allein zur Zeit ist dieses nicht nöthig. Die in einer Ebene gezeichnete Figuren solcher Dinge, deren Theile ebenfalls alle in einer Ebene liegen, stellen den Augen alle dasjenige deutlich vor, so man von denselben gedenken muß, und das bloße Ansehen derselben ist öfters hinlänglich, einige Eigenschaften derselben heraus zu bringen, welches ohnstreitig bey dem Nachdenken eine besondere Erleichterung giebt.

Von den Winkeln, vor sich betrachtet.

F. II. §. 39. Zwo gerade Linien, welche in einer ebenen Fläche liegen, können in einem Punkte zusammen stoßen. Es sey A ein dergleichen Punkt, von welchem die geraden Linien AB und AC nach verschiedenen Strecken gezogen sind. Es müssen diese gerade Linien sich gegen einander auf gewisse Art neigen. Man hätte nemlich, nachdem AB in der ebenen Fläche gezogen worden ist, die AC in eben der Fläche auch anders ziehen, oder an derselben Stelle AD nehmen können, wodurch die Linien AB, AC, oder AB, AD einander sich entweder mehr genähert oder weiter von einander entfernt hätten. Oder wenn man sich die beyden Linien AB, AC als die Längen zweier Stäbe vorstellt, welche bey A vermittelst eines Gewindes dergestalt an einander befestigt

ger sind, daß sie sich, wie die Füsse eines Circulinstruments, öfnen oder zusammen drücken lassen, so haben diese Linien AB und AC, oder AB und AD, wie man sie auch gezogen haben mag, eine gewisse Neigung gegen einander, und diese Neigung wird so gleich verändert, so bald man eine dieser Linien AC um das Punct A gegen die andere AB beweget, oder von dieser AB nach AD, oder noch weiter, absethet.

S. 40. Diese Neigung der geraden Linien gegen einander hat mit der Größe derselben nichts zu thun, und hänget von dieser nicht im geringsten ab. Die gerade Linie AC neiget sich gegen die gerade Linie AB eben so wie der Theil derselben AE sich gegen die AB neiget, wo man auch das Punct E hinsetzen wil. Es wird aber die Neigung zweier geraden Linien AB und AC, oder AB und AD gegen einander ein Winkel genennet, und wird also durch dieses Wort bloß die Lage zweier geraden Linien AB und AC, oder AB und AD gegen einander angezeigt, die Größe dieser Linien aber keinesweges bestimmt. Man verkürze die Linie AC und mache AE aus derselben, oder man verlängere AE wie man wil in C, so wird die Lage dieser Linie nicht verändert. Sie gehet noch immer durch die zwey Puncte A und E, durch welche sie Anfangs gegangen, und wir haben IV, 26. gesehen, daß dadurch die Lage einer geraden Linie bestimmt wird. Bleibt aber die Lage der AC nach dieser Verlängerung oder Verkürzung an sich einerley, so kan auch ihre Lage gegen AB dadurch nicht verändert werden, weil man diese Linie AB unverrückt liegen lassen.

S. 41. Wenn verschiedene Winkel in einer Figur vorkommen, auf deren einen oder den andern sich gewisse Worte des Textes beziehen, so würde man sich entweder sehr weitläufiger und verdrießlicher Umschweife bedienen müssen, oder es würde sehr oft geschehen, daß man einen ganz andern Winkel der Figur den Augen und dem Verstande vorstellte, als man solte, wenn man nicht diese Winkel mit gewissen Zeichen bezeichnete, und diese sind gemeinlich die Buchstaben des Alphabets, welcher man sich auch sonst zu dergleichen Endzweck bedienet. Und zwar kan man sich zurweilen an einem einigen Buchstaben begnügen lassen, welchen man an die Spitze des Winkels setzet, das ist, an das Punct, in welchem die zwey gerade Linien, welche ihn einschließen, zusammen laufen. Zurweilen aber, wenn mehr als ein Winkel an einem dergleichen Punct vorkommen, würde dieses

IV. **Wissniss.** Bestimmung machen, welche man vermeiden kan, indem man dem erstgesagten Buchstaben, als hier A noch zwey andere beyleget, die man auch an die Seiten des Winkels, oder an die gerade Linien, welche ihn einschliessen, gesetzt, zwischen welchen letztern zwey Buchstaben der erstgedachte, welchen man in der Figur bey der Spitze geschrieben, in der Mitte stehen muß. Man wird also den Winkel, welchen die Linien CA und AB einschliessen, BAC, oder BAE, oder auch CAB, oder EAB nennen, nicht aber CBA, oder etwas dergleichen, welches deswegen zu vermeiden ist, weil bey B auch ein Winkel stehen könnte, dessen eine Seite AB, und die andere die gerade Linie wäre, die man zwischen C, B ziehen kan, welchen man mit dem Winkel bey A verwechseln könnte, wenn man C, B, A ohne Unterscheid nehmen wolte.

S. 42. Das gewisste und natürlichste Zeichen das zwey gerade Linien einander gleich sind, ist, wenn sie auf einander können gepaßt werden, das ist, wenn man sie so zusammen bringen kan, daß ihre äussersten Puncte beyderseits zusammen fallen, wie hier bey den geraden Linien zwischen A und B geschehen würde, wenn man sie einander nur noch etwas näherte: und alle Welt schliesst ohne einiger Anweisung aus dieser so genannten Congruenz die Gleichheit zweyer Längen, und hierauf gründen sich alle Messungen derselben, vermittelt der Ellen, oder einer andern beliebigen Masse.

F. 37. S. 43. Aber aus eben dem Grunde muß man auch sagen, daß zwey Winkel einander gleich sind, welche man dergestalt auf einander bringen kan, daß ihre Spitzen in einem Puncte zusammen fallen, und zugleich die Seiten auf einander zu liegen kommen, oder nach einerley Strecke fortgehen. Bey A sind die Spitzen von zwey Winkeln, deren einen man nur etwas wenig fortchieben darf, um zu machen, daß die Spitzen derselben in ein Punct zusammen kommen, und daß die Seiten ebenfalls auf einander fallen, und jede zwey derselben nur eine gerade Linie ausmachen. Man siehet leicht, daß dieses geschehen kan, ob zwar die geraden Linien, welche die Winkel einschliessen, ungleich sind, denn man verlangt nicht, daß auch die äussersten Puncte dieser Seiten auf einander fallen sollen, und dieses deswegen, weil wie IV. 40 gesagt worden, die Grösse der Seiten zu der Grösse der Winkel nichts beyträgt.

§. 44. Und hieraus ist leicht zu erachten, woraus man schliesse, daß ein Winkel grösser oder kleiner sey als ein anderer. Es ist hier wieder wie bey den geraden Linien. Gesezt, es passe die gerade Linie zwischen AB auf das Stück der Linie AC, welches zwischen eben den Buchstaben AB lieget, so ist eben dieses das Kennzeichen, aus welchem man schliesset, daß die erstere AB kleiner, und diese letztere AC grösser sey. Und eben so ist es mit den Winkeln. Wenn man einen Winkel CAB innerhalb eines andern DAB dergestalt gesezt hat, daß so wohl ihre Spitzen zusammen fallen, als auch eine Seite des einen Winkels CAB, nemlich AB mit einer Seite des andern Winkels DAB, nemlich mit eben der AB, nach einer Strecke zugehet, es fällt aber die zweyte Seite AD des einen Winkels DAB über die zweyte Seite AC des andern CAB hinaus; so schliesset man, daß der erstere Winkel DAB grösser sey als der zweyte CAB.

IV.
Abschnitt.

F. 38.

F. 35.

§. 45. Man siehet auch leicht, daß diese Sätze sich umkehren lassen. Wenn nemlich zwey gerade Linien gleich sind, so müssen sie dergestalt auf einander passen, daß ihre äusserste Punkte so wohl, als die übrigen alle, zusammen fallen, und daß aus den zweyen Linien nur eine, von eben der Länge, wird. Und wenn zwey Winkel gleich seyn, so muß man den einen derselben dergestalt auf den andern bringen können, daß so wohl ihre Spitzen als ihre Seiten zusammen fallen; denn wenn sie nicht dergestalt auf einander passeten, sondern nach der Art, welche wir von ungleichen geraden Linien und Winkeln angemerkt haben, und aus welchen ihre Ungleichheit geschlossen wird, so müssen sie ungleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so erst gesezt worden. Doch dieses sind Dinge, welche auch ein mittelmässiger Verstand einsehen kan, und wir erklären sie aus keiner andern Ursache, als daß man nicht was anders darunter verstehen möge als die allgemeinste Grundsätze aller Messungen.

§. 46. Ueberhaupt also kan man daraus, daß zweyen Winkel nicht auf einander passen, schliessen, daß sie ungleich seyn. Dieses aber, daß zweyen Winkel nicht auf einander passen können, siehet man nicht nur, wenn man die Spitzen derselben auf einander gebracht, und eine Seite des einen Winkels auf eine Seite des andern gelegt; wovon bereits Erwähnung geschehen: sondern es erhellet dasselbe auch sehr deutlich, wenn man einen derselben ABC auf den andern DEC dergestalt sehen kan, daß die Seite BC auf die Seite EC zu liegen

F. 39.

Ec 3

kommt,

IV. **Beschreib.** kommt, die andere Seite AB aber des einen Winkels ABC, die andere Seite DE des andern, irgendwo in einem einzigen Punct A berührt, oder schneidet. Ist dieses, so siehet man leicht, daß der Winkel ABC niemals auf den Winkel DEC genau passen werde, man mag ihn auf der EC verschieben wie man wil. Es kan, wenn BC immer in EC fällt, ohnmöglich die andere Seite BA ganz auf ED zu liegen kommen, welches erfordert wird, wenn ABC in DEC passen sol.

§. 47. Und hieraus folget, daß wenn man von einem Puncte A ausserhalb einer geraden Linie EC zwei gerade Linien AE, AB an die gedachte EC zieht, ohnmöglich die zween Winkel AEC und ABC gleich seyn können, welche die geraden Linien AE, AB mit der EC einschließen, und welche beide mit ihren Oefnungen nach einer Seite zu stehen. Weil eben daraus, wenn die Winkel ABC, AEC so stehen, wie wir sie eben beschrieben, geschlossen wird, daß sie ungleich seyn.

F. 40. §. 48. Und wenn demnach an einer geraden Linie EC zwei gerade Linien ED, BA dergestalt liegen, daß sie mit der EC die gleiche Winkel DEC, und ABC, deren Oefnungen nach einer Seite zu gehen, einschließen, so können diese Linien ED und BA nicht zusammen lauffen, man mag sie von E gegen D und von B gegen A verlängern wie man wil. Denn, wenn die Linien ED, BA irgendwo zusammen lauffen, wie die Linien ED, BA der vorigen 39 Figur in A zusammen kommen, so müssen die Winkel DEC und ABC ungleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so von denselben angenommen worden. Wir reden von dem Fall, wenn die Winkel DEC, ABC gleich sind, und gleiche Winkel können ohnmöglich ungleich seyn. Wir werden hernach sehen, daß die Linien AB, DE auch nicht auf der andern Seite der EC zusammen lauffen können, wenn man sie an derselben verlängert; allein wir können dieses noch nicht beweisen, und wenn man in der Geometrie nicht beweisen kan, höret man billig auf zu reden.

§. 49. Die Winkel werden in dreyerley Arten eingetheilet. Man hat rechte oder gerade, spizige und stumpfe Winkel, ihre Verschiedenheit von einander bestehet nur in ihrer Größe. Die spizigen Winkel sind die kleinsten, die rechten sind etwas grösser und die stumpfen die allergrösten. Doch dieses sehet die Begriffe nicht vollkommen fest, wir werden uns netter erklären müssen.

§. 50. Man stelle sich demnach eine gerade Linie auf einer beug-
 samen Fläche, zum Exempel auf einem Blatt Papier gezogen vor. Diese sey AB. Man falte das Papier zusammen, aber so, daß das
 eine Ende der geraden Linie B wieder in eben diese gerade Linie zu lie-
 gen komme. Wenn man nun das Papier bricht, und machet, daß
 seine zwey Theile dichte auf einander liegen, so muß auch der eine Theil
 der Linie AB ganz und gar auf dem andern zu liegen kommen. Die
 Wegnung hievon ist diese. Gesezt das Papier sey nun wieder aufge-
 than, die Biegung aber oder der Bruch, welcher in demselben durch
 das Zusammenhalten gemacht worden, sey CD, so will man sagen, daß,
 als das Papier noch dergestalt zusammen lage, daß das Punct B in
 AD fiel, auch die ganze DB auf der geraden Linie AB gelegen. Wer
 hiebey ansehen sollte, bedenke nur, daß bey dem dergestalt zusammen
 gefallenen Papier alle beide Theile der Linie AB, nemlich AD und DB
 so wohl durch das Punct D, als auch durch dasjenige Punct des
 Theils AD gehen, auf welches das Punct B geleget worden ist. Zwo
 gerade Linien aber, welche durch zwey gegebene Puncte gehen, fallen
 allerdings zusammen, und machen nur eine gerade Linie aus.

IV.
 Abschnitz.
 F. 41.

§. 51. Es ist leicht einzusehen, daß indem die Linie DB dergestalt auf
 die AD gelegt worden, auch der Winkel CDB auf den Winkel CDA
 gepasset habe, weil man dieser Winkel ihre Spitzen und Seiten auf
 einander gebracht. Hieraus folget, daß der Winkel ADC dem
 Winkel CDB gleich seyn müsse. Man kan demnach auf eine jede gera-
 de Linie A B eine andere gerade Linie so setzen, wie wir hier den Bruch des
 Papiers CD gesezt zu seyn uns vorstellen, daß nemlich diese letztere
 Linie CD mit der erstern zweyen Winkel machet, welche einander gleich
 sind, nemlich CDA gleich dem Winkel CDB. Und die angegebene
 Art dieses zu verrichten kan uns indessen hinlänglich seyn, bis wir eine
 bessere und bequemere finden.

§. 52. Wenn aber eine gerade Linie CD auf einer andern AB so
 stehet, daß sie mit derselben zwey gleiche Winkel machet, ADC, CDB,
 welche beide an einander, und nach einer Seite der letztern Linie AB
 liegen, und nicht etwa übereck; so sagt man die erstere Linie CD sey
 auf die letztere perpendicular, und wir werden hernach sehen, daß in die-
 sem Fall auch die Linie AB oder ein Stück derselben AD, oder DB auf
 CD perpendicular sey. Im gegentheil, wenn eine Linie auf eine ander-
 e dergestalt fällt, daß die zweyen neben einander stehende Winkel un-
 gleich

IV. gleich werben; so saget man, daß sie auf dieser schief stehe. Auf eben
 schnitt. der geraden Linie AB stehet DE dergestalt, daß sie mit derselben zwey
 ungleiche Winkel ADE , EDB machet. Dieses ist dasjenige, was
 man damit ausdrücken wil, wenn man saget die DE stehe schief auf der AB .

S. 53. Man kan auf eine jede gerade Linie AB eine andere CD
 perpendicular setzen. Dieses ist eben dasjenige, so ohnlängst mit an-
 dern Worten gesagt worden. Man kan machen, daß diese perpendi-
 cular-Linie durch ein jedes Punct gehe, es mag dasselbe liegen wo es
 wil, wenn es nur nicht ausser der Fläche lieget, in welcher die Linie
 AB gezogen ist. Man darf zu dem Ende nur das Papier nach der
 angegebenen Art falzen, daß der Bruch durch das gegebene Punct C
 oder D gehe. Dieses fließet aus dem Begriff der perpendicular-Linie,
 welchen wir IV, 50. gegeben, eben so deutlich, als ob wir dergleichen Linien
 bereits auf eine bequemere und der Geometrie gemäße Art zu ziehen
 wüßten, welche erst künftig wird können gezeigt werden. Denn die-
 jenige Anweisung, welche wir gegeben, ist bloß darzu, daß der Begriff
 derselben desto deutlicher werde, und von derjenigen Art, nach welcher
 die Geometrie etwas verfertigen oder heraus bringen lehret, gar weit
 entfernet.

S. 54. Der Winkel, welchen eine gerade Linie CD mit einer an-
 dern AB einschließet, auf welcher sie perpendicular steht, das ist der
 Winkel ADC , oder der Winkel CDB wird ein gerader oder rechter
 Winkel genennet. Alle übrige Winkel die keine gerade sind, heißen
 schiefe Winkel. Es sind nicht allein die beiden Winkel ADC und
 CDB , einander gleich, sondern auch alle übrige gerade Winkel welche
 man nur machen oder sich vorstellen kan, sind ebenfalls einem dieser
 beiden geraden Winkeln ADC , CDB , und einander selbst, gleich.
 Denn woher sollte die Ungleichheit bey denselben herkommen? Sie
 entstehen alle vollkommen auf einerley Art, indem man nemlich auf ge-
 rade Linien, welche nicht anders als nach der Größe von einander un-
 terschieden seyn können, andere gerade Linien dergestalt setzet, daß diese
 mit jenen zu beyden Seiten gleiche Winkel machen. Die verschiede-
 ne Größe der Seiten verändert in der Größe der Winkel nichts, IV, 40.
 dieses aber ist das einzige, welches bey so gestalten Sachen bey geraden
 Winkeln verschieden werden kan.

S. 55. Wenn nemlich auf einer geraden Linie AB eine andere
 CD perpendicular steht: so kan keine neue Linie gezogen werden, wel-
 che

Die auf eben der Linie AB perpendicular stehe, und durch eben das Punct D der Linie AB lauffe, durch welches CD gezogen worden. IV. Abschnitt.
Sollte man hiebey Schwierigkeiten finden, so werden sich dieselben bald verlieren, wenn man betrachtet, daß die Perpendicular-Linie CD die Gleichheit der Winkel ADC , CDB erfordere, welche ohnmöglich kan erhalten werden, wenn man CD im geringsten auf diese oder die andere Seite neiget. Ist CD auf AB perpendicular, und man ziehet noch eine andere Linie DE durch das Punct D ; so ist der Winkel EDB ohnstreitig kleiner als CDB , und der neben stehende EDA ist grösser als CDA , und folgendes auch grösser als CDB . Wie können denn also die Winkel EDA und EDB einander gleich seyn? Diese Gleichheit der Winkel EDA und EDB aber muß man annehmen, wenn man behauptet, es sey ED auf AB perpendicular.

§. 56. Es kan aber auch durch das Punct C ausser der AB , durch welches bereits CD auf AB perpendicular gezogen worden ist, keine andere Linie gehen, welche ebenfalls auf AB perpendicular siele. F. 42. Denn wenn man sich ausser der Perpendicular-Linie CD eine andere Linie CF vorstellt, welche durch C an AB gehet, so siehet man leicht, daß, der Winkel CFB dem Winkel CDB ohnmöglich gleich seyn könne: Weil die Linien FC , DC in den Punct C zusammen kommen, welches ein gewisses Zeichen der Ungleichheit zweier Winkel ist IV, 46. Ist aber der Winkel CFB dem Winkel CDB nicht gleich, so ist er kein gerader Winkel, IV, 54. denn CDB ist ein gerader Winkel, folgendes ist auch CF auf AB nicht perpendicular.

§. 57. Da man einen geraden Winkel leicht machen, und denselben sich nach seiner vollkommenen Grösse vorstellen kan, so pflegt man einen geraden Winkel zu dem Masse aller übrigen anzunehmen, nicht allein, wenn sie einzeln betrachtet werden, sondern auch dann, wann man die Summa von zweyen, dreyen oder mehrern Winkeln anzeigen wil. Man begreift aber die Summe zweyer, dreyer, oder mehrerer Winkel gar leicht. Dieselbige zu erhalten, muß man die Winkel, deren Summe man verlangt, bey ihren Spitzen zusammen setzen, dergestalt, daß diese zusammen fallen, und eine Seite des einen auf einer Seite des andern, die Winkel aber selbst ausser einander liegen, wie in der 35. Figur mit den beiden Winkeln BAC , CAD geschehen: so ist der Winkel DAB , welcher von den beiden äussersten Seiten eingeschlossen wird, die Summe so-gesucht worden.

IV. S. 58. Wenn man auf die Art zwey gerade Winkel zusammen
 Abschnitt. F. 40. setzt, so machen allezeit ihre duffersten Seiten mit einander eine gerade Linie aus. Denn man stelle sich die gerade Linie AB als bereits gezogen vor, und setze an dieselbige den geraden Winkel CDB : so wird CD auf AB perpendicular, und CDA ebenfalls ein gerader Winkel seyn. Und wenn man demnach an diese CD einen andern geraden Winkel dergestalt setzt, daß seine Spitze in D falle, und seine Oefnung nach A gekehret sey, so kan die andere Seite desselben nicht ausser AD fallen, weil sonst zwey gerade Winkel einander nicht decken würden, und folgendes einer derselben grösser wäre als der andere. IV, 54. Man kan sich demnach eine jede gerade Linie AB vorstellen, als ob sie aus zweyen Theilen, AD und DB zusammen gesetzt wäre, welche mit einander einen Winkel ADB einschliessen, der zween rechten Winkeln gleich ist.

S. 59. Aus der erwehnten Ursache, weil man einen geraden Winkel so leicht haben kan, wird er auch dazzu angenommen, daß man die besondern Arten der übrigen Winkel bestimme. Die Winkel können nichts anders als nach ihrer Grösse von einander verschieden seyn. Hätte man kein gewisses Maaß, an welchem man ihre Grösse beurtheilen könnte so wäre ohnmdglich diese verschiedene Grösse genau und verständlich anzugeben, und die besondern Arten der Winkel fest zu setzen. Da wir aber die geraden Winkel haben, können wir bey dieser Eintheilung nachfolgender massen verfahren.

F. 41.

S. 60. Wenn ADC und CDB gerade Winkel sind, und man hat durch D eine andere gerade Linie DE gezogen, welche auf der AB nicht perpendicular sondern schief stehen wird, so ist der Winkel EDB , wie wir bereits gesehen haben, kleiner, und EDA grösser als ein gerader Winkel CDB , oder CDA . Ein jeder Winkel der wie EDB kleiner ist als ein gerader Winkel, heisset ein spiziger Winkel, und ein jeder Winkel, der grösser ist als ein gerader Winkel, als EDA , wird ein stumpfer Winkel genennet. Die rechten Winkel, die spizigen, und die stumpfen sind die drey Arten der Winkel, welche man von einander insonderheit zu unterscheiden hat. So wohl die spizigen als die stumpfen werden schiefe Winkel genennet. IV, 54.

S. 61. Zieheth man, wie eben geschehen, von der Spitze eines geraden Winkels CDB , eine gerade Linie DE innerhalb desselben, so bekommt man zwey Winkel BDE , und EDC , welche zusammen einen

nen geraden Winkel ausmachen. Einer derselben, welchen man nehmen will, heisset die Ergänzung des andern zu einem rechten Winkel, oder auch schlecht weg, seine Ergänzung. Denn da man einen rechten Winkel als eine ganze Einheit ansiehet, nach welcher man die übrigen Winkel misst IV, 57. so hat man allerdings einen spitzigen Winkel EDB nicht anders, als einen Theil, welcher durch den Zusatz eines andern Theils CDE, ein Ganzes wird, zu betrachten.

§. 62. Hat man wiederum auf eine gerade Linie AB eine andere CD perpendicular gestellt, und demnach zwey rechte Winkel ADC und CDB neben einander gesetzt, und man ziehet so dann von D eine andere Linie DE, nach welcher Seite man will, so machen die zwey Winkel CDE + EDB zusammen einen rechten Winkel CDB aus. Da nun ADC auch ein rechter Winkel ist: so müssen die drey Winkel ADC + CDE + EDB zween rechten Winkeln gleich seyn. Setzet man die zween erstern Winkel zusammen, und machet aus ADC + CDE den einzigen Winkel ADE, so ist dieser Winkel ADE mit dem Winkel EDB zusammen ebenfalls zween rechten Winkeln gleich. Und so ist es mit jeden zween Winkeln, welche eine gerade Linie ED machet, indem sie schief auf eine andere gerade Linie AB fällt. Sie sind allezeit zusammen zween rechten Winkeln gleich. Denn wenn die Perpendicular-Linie CD noch nicht gezogen ist, so kan man doch allezeit eine ziehen, oder sich eine als gezogen vorstellen, und so dann eben den Beweis führen, welchen wir eben geführt. Und es ist deswegen überhaupt richtig, daß wenn eine gerade Linie auf eine andere fällt, sie mit dieser entweder wirklich zween rechte Winkel mache, oder doch zween solche, die zween rechten Winkeln gleich sind. Auf die gerade Linie AB fallen CD und ED die erste machet mit derselben zween rechte Winkel; die andere zween schiefe, die aber zusammen zween rechten Winkel sind.

§. 63. Man kan diesen Beweis etwas kürzer verfassen. Die Summe der Winkel ADE + EDB gibt den Winkel ADB. Nun ist ADB eine gerade Linie, und folgendes der Winkel ADB, welchen die Theile derselben AD und DB mit einander machen, zween rechten Winkeln gleich IV, 58. Demnach beträgt auch die Summe der Winkel ADE und EDB zwey rechte Winkel.

§. 64. Ein Winkel wie EDB, welcher mit einem andern EDA eine Summe giebt, die zween geraden Winkeln gleich ist, heisset des
D d 2 erstern

IV. erstern seine Ergänzung zu zweyen geraden Winkeln. Den Grund dieses Abschnitts. ser Benennung haben wir IV, 59. berührt.

F. 43. §. 65. Wenn man aus dem Punct D noch mehrere gerade Linien zieht, welche die Winkel ADE und EDB noch weiter theilen, als DF und DG so kan die Summe der Winkel, die auf die Art kommen, ADF, FDE, EDG und GDB nicht mehr und nicht weniger betragen, als die Summe der zweyen vorigen ADE und EDB. Da nun also die beyden Winkel ADE und EDB zweyen rechten Winkeln gleich sind, so müssen auch alle die besagten Winkel, deren Spitzen in dem Punct D zusammen fallen, zusammen gesetzt zweyen rechten Winkeln gleich seyn. Und wenn man überhaupt einen Punct, als hier D, in einer geraden Linie AB annimmt, und von demselben so viele gerade Linien zieht als man wil DF, DE, DG, alle an einer Seite in Ansehung der angenommenen geraden Linie AB, so werden die Winkel die auf die Art heraus kommen, zusammen genommen, allezeit zweyen geraden Winkeln gleich,

§. 66. Und das Kennzeichen, daß verschiedene Winkel zusammen genommen zweyen gerade Winkel ausmachen, ist, wenn sie sich neben einander auf eine gerade Linie setzen lassen, oder wenn, indem man sie zusammen setzt, ihre Summe zu finden, wie die Winkel BDG, GDE, EDF, FDA, neben einander stehen, die beiden äußersten Seiten DA, DB keinen eigentlichen Winkel einschließen, oder sich nicht gegen einander neigen, sondern mit einander eine gerade Linie ADB ausmachen. Geschiehet dieses nicht, und machen die beiden äußersten Seiten der dergestalt zusammen gesetzten Winkel nicht eine gerade Linie, so beträgt die Summe der Winkel, welche man zusammen gesetzt hat, entweder weniger oder mehr als zweyen rechten Winkel. Nämlich in der 43 Figur beträgt die Summe der Winkel BDG + GDE + EDF, deren äußerste Seiten DB und DF den Winkel FDB einschließen, weniger als zweyen rechten Winkel, und in der 44 Figur macht die Summe der Winkel BDG + GDE + EDF mehr als zweyen rechten Winkel aus, und es ist leicht zu sehen, in welchem Fall das erstere oder das letztere statt habe: wenn man sich nur daran hält, so man annehmen kan, daß die Theile AD, DB der geraden Linie AB mit einander einen Winkel machen, der zweyen rechten gleich ist.

§. 67.

S. 67. Und wenn demnach die Summe verschiedener Winkel zween rechten Winkeln gleich ist, und man setzt sie, wie eben gesagt worden, zusammen, so müssen die äussersten Seiten DB, DA mit einander eine gerade Linie ausmachen. Wäre dieses nicht, so betrügen die zusammengefügten Winkel weniger oder mehr als zween gerade, und könnte demnach ihre Summe nicht zween geraden Winkeln gleich seyn, welches demjenigen widerspricht, so man angenommen.

S. 68. In der letzten Figur machet DF mit der DB wieder einen Winkel BDF, welchen, wenn man ihn zu den vorigen BDG, GDE, EDF hinzu setzt, die Summe aller dieser Winkel BDG + GDE + EDF + FDB leicht anzugeben ist. Sie beträgt genau vier gerade Winkel. Denn wenn man überhaupt in einer geraden Linie AB ein Punct D annimmt, und ziehet nicht allein nach der einen Seite dieser geraden Linie verschiedene andere, DG, DE, sondern man thut dieses auch auf der andern Seiten, indem man DF, und wenn man will, noch andere gerade Linien ziehet, so beträgt die Summe aller Winkel, welche disseite der geraden Linie AB stehen, BDF + FDA, so wohl zween gerade Winkel, als die Summe aller Winkel jenseits BDG + GDE + EDA zween gerade Winkel beträgt. Und demnach macht die Summe aller Winkel disseite, wenn man sie zu der Summe aller Winkel jenseits hinzu setzt, zwey mal zween, oder vier gerade Winkel aus. Das ist, die Summe aller Winkel, die rings herum um das Punct D stehen, beträgt vier gerade Winkel. Löschet man eine oder die andere von besagten geraden Linien weg, oder ziehet eine neue von dem Punct D nach welcher Seite man will, so wird die Summe der Winkel weder vermehret noch verringert, und bleibt demnach ebenfalls noch vier rechten Winkeln gleich. Und ist demnach die angegebene Grösse der Summe von allen Winkeln, die um einen Punct stehen, richtig, ob zwar keine derselben Linien, wie in unserer Zeichnung ADB, in einem gerade durchgehet. Denn man kan sich allezeit vorstellen, daß der Theil AB der Linie, welche gerade durchgegangen, nur weggeschlachtet sey, wodurch in der Summe aller Winkel nichts geändert wird. Und es beträgt demnach allerdings die Summe aller Winkel BDG + GDE + EDF + FDB vier rechte Winkel.

F. 44.

S. 69: Dieser Satz brauchet noch eine kleine Erläuterung; denn es hat bey demselben ein Zweifel statt. Wenn man so viele der aus dem Puncte D gezogenen Linien weglöschen kan als man will, ohne daß dadurch in der Summe aller Winkel, die um das Punct D

IV.
Abschnitt.

stehen, eine Veränderung vorgehe: so müssen auch jede zwei Linien, welche bey D zusammen stossen, als ED, DB um dieses Punct Winkel machen, deren Summe vier geraden Winkeln gleich ist. Nun scheint es, daß die Linien ED, DB keinen andern als den Winkel EDB mit einander einschließen, und dieser ist in unserer Zeichnung nicht einmal so groß als zween rechte Winkel. Die Antwort auf diesen Einwurf ist: die Linien ED, DB machen wirklich zween Winkel mit einander. Der erste ist derjenige, so aus den zween Winkeln EDG, GDB zusammen gesetzt ist, und dieser ist wirklich in der gegenwärtigen Zeichnung kleiner als zween rechte Winkel. Der zweyte aber bestehet in dieser Zeichnung aus den dreyen Winkeln EDA, ADF, FDB, und ist größer als zween gerade Winkel. Man ist nicht nur in diesem Satz gezwungen, dergleichen Winkel anzunehmen, die größer sind als zween gerade, sondern auch in verschiedenen andern: Und wenn man sie nicht annehmen wolte, würden verschiedene Sätze, wie man sie gemeiniglich ausdrucket, falsch und unrichtig seyn.

F. 30.

S. 70. Dieses sind Sätze, welche wir so gleich einsehen könnten, so bald wir begriffen, was eigentlich ein Winkel sey, und wornach man seine Größe bestimme, welche wir demnach hier nicht vorbeys gehen konnten, weil sie sich so natürlich von selbst angaben. Noch etwas ist bey dieser Sache übrig, welches sich nicht viel schwerer, ja fast einiger Massen noch leichter einsehen läßt. Wenn zwei gerade Linien einander schneiden, und mit einander vier Winkel machen, so sind diejenige, welche einander entgegen gesetzt sind, und von welchen bloß die Spitzen einander berühren, die Seiten aber von einander abgesondert sind, einander beständig gleich. Die 30. Zeichnung erkläret die Sache deutlich. Um das Punct A stehen vier Winkel, welche entstanden sind, indem die geraden Linien EB, DC einander geschnitten. Zween dieser Winkel DAE, BAC liegen nirgends an einander, als an ihren Spitzen; eben so ist es mit den DAB und EAC. Und von diesen wird gesagt, daß sie einander gleich sind, nemlich $DAE = BAC$, und $DAB = EAC$, nicht aber $DAE = DAB$, oder $BAC = CAE$, denn diese haben die angezeigte Lage nicht, und es ist auch bloß aus der Zeichnung sichtlich, daß sie ungleich seyn können.

S. 71. Wir sagen, dieses sey noch einiger Massen leichter einzusehen als das vorige, denn der bloße natürliche Verstand giebt es. Man

Man stelle sich vor, daß man die gerade Linien EB, DC nach Ver-
liehen gezogen; denn sonst wird zu dieser Zeichnung nichts erfordert;
und frage sich selbst, auf welcher Seite der grössere Winkel liege? ob
BAC grösser sey als DAE, oder ob umgekehrt DAE der grössere
und BAC der kleinere Winkel sey? Man wird nichts finden so einen
vermögen könnte, das eine vielmehr als das andere zu sagen; denn es
ist wirklich nichts, wodurch diese Winkel verschieden werden könnten.

§. 72. Dergleichen Beweise sind gar gut, aber in der Geome-
trie erfordert man ein mehreres. Man ist in dieser Wissenschaft nicht
mit jeden Beweisen zu frieden, sondern erfordert solche, welche die
vollkommenste Ueberzeugung geben, ohne den geringsten Zweifel übrig
zu lassen. Man wird aber finden, daß der gegebene Beweis von
der Art nicht sey. Man kan noch allezeit die Furcht hegen, daß viel-
leicht dennoch bey dem Winkel BAC etwas seyn möchte, so bey dem
DAE nicht anzutreffen, welches man aber wegen Mangel genugsa-
mer Einsicht in diese Dinge, nicht bemerken können. Zu dem ist es
in dieser Wissenschaft um einen beständigen Zusammenhang zu thun.
Man suchet beständig Satz mit Satz, das nachfolgende mit dem vor-
hergehenden zu verknüpfen. Diesem Zweck gemäß aber müssen wir,
was wir eben gesagt, auf eine ganz andere Art beweisen. Wobey
und ins künftige beständig R, allezeit einen rechten Winkel bedeuten
soll, und folgendes 2 R, zwey rechte Winkel, 3 R, drey rechte Win-
kel, und so fort.

§. 73. Auf der geraden Linie EB stehet die gerade Linie AD,
und ist aus einem Punct der EB nemlich aus A fortgezogen. Dem-
nach muß die Summe der beyden Winkel DAE und DAB zween
rechten Winkeln gleich seyn, oder kurz, $DAE + DAB = 2R$. IV, 62.
Eben so stehet auf der geraden Linie DC die Linie AB, und ist dem-
nach hier wie vorher $DAB + BAC = 2R$. Das ist, $DAE + DAB$
 $= 2R$, und $DAB + BAC = 2R$. Ein gerader Winkel ist so groß
als ein anderer, und zween gerade Winkel sind ebenfalls von einer be-
stimmten Grösse, welche beständig einerley ist: demnach sind die vor-
gesetzten zwe Summen der Winkel $DAE + DAB$, und $DAB + BAC$
deren jede zween rechten Winkeln gleich ist, einerley dritten Grösse
gleich, nemlich eben den besagten 2 R, also müssen sie auch einander
gleich seyn, $EAD + DAB = DAB + BAC$. Wenn man aber auf
diese Summen Acht hat, so findet man, daß so wohl in der einen
derselben als in der andern der Winkel DAB vorkommt, und daß
der-

IV. derselbe in der einen durch den Zusatz des Winkels EAD so groß geworden, als in der andern durch den Zusatz des Winkels BAC. Diese zween Winkel demnach DAE und BAC, welche zu einerley Winkel DAB hinzugesetzt, gleiche Summen heraus bringen können, ohnmöglich ungleich seyn.

§. 74. Oder will man etwas anders verfahren, so nehme man von der einen der erst gesetzten Summen $EAD + DAB = DAB + BAC$ so wohl als von der andern den Winkel DAB hinweg. Da die Summen gleich sind, kan es nicht anders seyn, es muß nach diesem Abzug wieder beyderseits gleiches übrig bleiben. Nimt man aber von der ersten Summe $EAD + DAB$ den Winkel DAB hinweg, so bleibt der Winkel DAE allein übrig, und bey der letztern Summe $DAB + BAC$ bleibt nach ebenmäßigem Abzug der Winkel BAC. Es muß also nothwendig der Winkel DAE dem Winkel BAC gleich seyn.

§. 75. Schneiden demnach, wie in der Zeichnung, die wir eben betrachtet, zwe gerade Linien einander, und es ist einer der vier Winkel, welche sie machen, gegeben oder bekannt, so sind die übrigen drey auch bekannt. Denn gesetzt, es wäre uns der Winkel DAE bekannt oder gegeben, wir wüßten seine Größe, und könten sie anzeigen, oder nach Belieben einen Winkel machen der so groß ist, als DAE, so wäre uns eben dadurch der Winkel BAC auch bekannt, denn er ist jenem gleich. Der Winkel DAB aber ist die Ergänzung des erstern DAE zu zween geraden Winkeln, weil diese Winkel EAD und DAB neben einander auf der geraden Linie EAB stehen: und demnach ist DAB leicht zu haben, und kan vor bekannt angenommen werden; und so auch EAC, welcher dem DAB gleich ist. Auch sieht man leicht, daß wenn einer dieser vier Winkel gerade ist, die übrigen dreye ebenfalls gerade seyn müssen.

§. 76. Und diese sind die Eigenschaften derer Winkel, wenn man sie vor sich betrachtet, und wir haben die erste Verknüpfung gerader Linien gemacht, welche zu machen war, da wir sie nemlich so an einander gesetzt, daß sie in einem Punct zusammen kamen und einen Winkel machten, von dessen Seiten wir entweder nur eine oder alle beyde weiter fortgezogen: wir müssen nunmehr zu den übrigen Lagen, welche zwe gerade Linien haben können, welche nicht zusammen stoßen, oder einander nicht berühren, übergehen.

Baral

Parallellinien.

IV.
Abschnitt.
F. 45.

§. 77. Wir haben IV, 48. gesehen, daß zwei gerade Linien AB und DE, welche beyde mit einer dritten EC, gleiche Winkel ABC und DEC machen, nicht zusammen laufen können, wenn man sie nach der Seite ED und BA, verlängert. Man verlängere sie aber nach der andern Seite, AB in F, und DE in G, und ziehe auch EC in H fort, so ist der Winkel ABC dem Winkel HBF gleich, und der Winkel DEC = HEG. IV, 70. Da nun die Winkel ABC und DEC einander gleich sind, so können die andern zween, HBF und HEG unmöglich ungleich seyn. Es ist also $HEG = HBF$, und auf der geraden Linie HC stehen zwei gerade Linien EG und BF, welche mit derselben zween gleiche Winkel HEG, HBF einschließen, so beyde nach einer Seite gerichtet sind. Also laufen die geraden Linien BF und EG auch nicht zusammen, wenn man sie beyde nach EG, BF verlängert. IV, 48. Folgendes liegen diese geraden Linien AF, DG so, daß sie gar nicht zusammen kommen können, man mag sie auf dieser oder jener Seite der HC fortziehen, und alle gerade Linien, welche mit einer dritten gleiche Winkel einschließen, die nach einer Seite gekehrt sind, haben diese Eigenschaft.

§. 78. Diejenige geraden Linien aber welche nicht zusammen laufen, man mag sie auch verlängern wie man will, heißen Parallellinien, oder, man pflegt die Lage einer derselben in Ansehung der andern dadurch anzuzeigen; daß man sagt, sie sey dieser parallel. So ist DG der AF parallel, und AF der DG. Wir haben schon gesagt, daß wir hier alle Linien, welche wir betrachten, in einerley Ebene annehmen, und dieses ist bey den Parallellinien am wenigsten zu vergessen. Denn liegen zwei Linien nicht in einer Ebene, so sind sie deswegen nicht parallel, ob sie zwar niemals zusammen laufen, und ist auf dieselbe dasjenige, so von den Parallellinien zu sagen ist, keinesweges anzuwenden. Zwei gerade Linien, deren eine auf dem Tisch, die andern aber auf dem Boden des Zimmers nach verschiedenen Strecken gezogen sind, eine ohngefehr von Mittag nach Mitternacht, und die andern von Morgen gegen Abend, geben ein Exempel von solchen Linien, welche einander niemals antreffen, und doch keine Parallellinien sind. Sie sind nemlich nicht in einer einzigen Fläche gezogen, oder man kan sich keine ebene Fläche vorstellen, in welcher diese Linien beyde befindlich wären.

E

§. 79. Man

IV. Abschnitt. §. 79. Man siehet leicht, daß eben diese Lage der geraden Linien AF und DG auch daraus könne geschlossen werden, wenn der Winkel DEB, dem Winkel EBF gleich ist; und daß jede zwei gerade Linien AF, DG parallel sind, welche von einer dritten HC dergestalt geschnitten werden können, daß die eben genannten Winkel DEB, EBF einander gleich sind, welche beyde zwischen den zwei Linien DG und AF, und an verschiedenen Seiten der Linie HC liegen, der eine zum Exempel wie hier DEB über dieser Linie, und der andern EBF unter derselben. Denn der Winkel EBF ist dem Winkel ABC nothwendig gleich, weil diese beyde Winkel entstanden sind, indem die geraden Linien AF und HC einander in B geschnitten, und weil sie einander entgegen stehen. IV, 70. Ist nun also der Winkel EBF dem Winkel DEB gleich, so muß nothwendig auch ABC (= EBF) eben dem Winkel DEB gleich seyn. Ist aber ABC = DEB, oder DEC, so sind die geraden Linien DG und AF parallel. IV, 77. Demnach sind sie auch parallel, wenn die Winkel DEB und EBF gleich sind.

§. 80. Auch hier kan man sich einer gar natürlichen Art zu schließen bedienen, um dasjenige zu erweisen, so wir eben gezeigt haben. Die geraden Linien AF und DG werden von einer dritten geraden Linie EB beyde geschnitten, und es sind die Winkel DEB und EBF einander gleich. Dieses ist angenommen worden, und man siehet leicht ein, daß auch die übrigen Winkel ABE, BEG, als jener ihre Ergänzungen zu zweyen geraden Winkeln, gleich seyn müssen. Ist aber dieses, so ist alles zu beyden Seiten der Linie EB einerley. Die Theile der geraden Linien AB, DE, welche zur rechten an EB fallen, machen eben solche Winkel mit derselben, als diejenigen Theile, die zur linken liegen EG und BF. Sind nun die Linien AB und DG nicht parallel, so müssen sie, wenn man sie verlängert, zusammen lauffen, entweder auf einer Seite der Linie EB, oder auf der andern, denn wenn sie weder da noch dort zusammen kommen, so sind sie parallel. Aber warum sollen sie mehr auf dieser als auf jener Seite zusammen kommen? warum zur rechten und nicht zur linken? denn zu beyden Seiten können sie einander nicht erreichen, weil es nicht möglich ist, daß zwei gerade Linien mehr als ein gemeinschaftliches Punct haben. IV, 27.

§. 81. Es kan eben dieses, daß nemlich AF und DG einander parallel seyen, auch daraus geschlossen werden, wenn man findet, daß

daß die Winkel ABC und HEG, welche beyde außerhalb den besagten Linien AF und DG liegen, und deren Oefnungen nach verschiedenen Seiten gekehret sind, einander gleich sind. Denn weil ABC dem Winkel EBF gleich ist, und HEG dem Winkel DEB, IV. 70. so müssen nothwendig auch die Winkel EBF und DEB gleich werden, so bald ABC und HEG einerley Grösse bekommen. Also sind wir wieder auf den Gründen, aus welchen wir eben IV. 79. geschlossen haben, daß AF und DG parallel seyn.

IV.
Abchnitt

S. 82. Ferner können wir noch eben dieses schließen, wenn wir finden, daß die beyden Winkel DEB und EBA, welche zwischen den zwey gegebenen, und von der HC geschnittenen, Linien AF und DG enthalten sind, und nach einerley Seite gerichtet stehen, zusammen gesetzt zween geraden Winkeln gleich sind. Denn wenn dieses angenommen wird, so kan man daraus die Gleichheit der Winkel ABC und DEC folgendergestalt schließen. Die Winkel DEB und EBA sind zween rechten Winkeln gleich. Dieses wird angenommen. Nun sind auch die Winkel EBA und ABC zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf der geraden Linie HC stehen, auf welche AB gefallen. IV. 62. Derowegen ist die Summe der Winkel DEB + EBA ($= 2R$) der Summe der Winkel EBA + ABC gleich, und wenn man von diesen Summen gleiches wegnimmt, so muß gleiches übrig bleiben. Man nehme beyderseits den Winkel EBA weg, denn der ist nothwendig sich selber gleich, so bleibt auf einer Seite DEB, und auf der andern ABC übrig. Diese Winkel sind demnach gleich. Aus der Gleichheit dieser Winkel DEB, ABC aber, haben wir die parallellage der geraden Linien DG und AF gleich Anfangs IV. 77. schließen können.

Von dem Umkreis der Figuren überhaupt.

S. 83. Zwo gerade Linien können einer ebenen Fläche, in welcher sie gezogen sind, keine Figur geben. Darzu wird erfordert, daß die Gränzen der Ebene von allen Seiten fest gesetzt und bestimmt werden. Denn aus den Gränzen allein bekommt man den Begriff einer Figur, wie gleich Anfangs IV. 2. ist gesagt worden. Daß aber zwo gerade Linien eine Ebene von allen Seiten einschränken sollen, ist gar nicht zu gedenken. Sie können in nicht mehrere als in einem Punkte zusammen stoßen, sie können aber auch so liegen, daß sie gar nicht zusammen kommen. In dem ersten Falle, da sie nemlich einen

IV. Winkel machen, lassen sie die Fläche von einer Seite offen und unbeschränkt, in dem andern Falle aber von beyden Seiten. Man muß demnach einer Ebene eine Figur zu geben, wenigstens drey gerade Linien nehmen, und dieselbe so zusammen setzen; daß immer eine mit der nächsten in einem Punkte zusammen laufe. Eine solche Figur nennt man ein Dreyeck: dergleichen ist ABC.

F. 46.

F. 47.

F. 48.

F. 49.

S. 84. Man kan aber einer Figur mehr als drey Seiten geben, und die Zahl der Seiten ohne einziges Ende vermehren wie man will. Bekommt die Figur vier Seiten, so heisset sie ein Viereck als ABD, und eine fünffseitige Figur heisset ein Fünfeck ABE. Eine Figur die sechs Seiten hat ein Sechseck ABF, und so fort. Es ist nemlich sichtlich, daß eine jede Figur so viele Winkel hat, als viele ihrer Seiten sind, und daß man also die Zahl der Seiten angiebt, wodem man die Zahl der Winkel nennet. Denn es wird eine jede von den geraden Linien, welche eine Figur einschliessen, eine Seite derselben Figur genennet.

S. 85. Man siehet leicht ein, daß bey einer jeden geradenlinichten Figur eine jede Seite, was man vor eine annehmen will, kleiner sey als die Summe aller übrigen, weil jene eine gerade Linie ist, so von der Spitze eines der Winkel der Figur an eine andere gehet, und der übrige Theil des Umkreises der Figur, indem er sich ebenfalls von einem dieser Punkte nach dem andern erstrecket, sich von dieser geraden Linie entfernt. IV, 21. Die gerade Linie AB ist in allen Figuren, welche wir eben angezeigtet, die kleinste unter allen, die von A nach B kan gezogen werden, und folgendes kleiner als der übrige Umkreis ACB bey dem Dreyeck, ADB bey dem Viereck, AEB bey dem Fünfeck, und AFB bey dem Sechseck. Denn man kan diese Theile des Umkreises sich als gebrochene Linien vorstellen, welche von A nach B gezogen sind.

S. 86. Wir fallen demnach eben dadurch, indem wir in der Zusammenfügung der geraden Linien fortfahren, in die Betrachtung des Umkreises der Figuren, unter welchen auch krumme Linien sind, und insbesondere diejenige, von welcher gesagt worden, daß sie von der leichtesten Betrachtung nicht ausgeschlossen werden könne. IV, 32. Es heisset eine jede Figur, deren Umkreis ganz oder zum Theil eine krumme Linie ist, eine krummlinichte Figur. Diejenige krummlinichte Figur aber, um deren Umkreis es uns hier zu thun ist, ist nachfolgende.

S. 87. Es

S. 87. Es liegt auf einer Ebene ein Punct A, und um dasselbe herum gehet eine krumme Linie BCD dergestalt, daß alle die geraden Linien, welche man von dem Punct A bis an dieselbige zieht, einander gleich sind. Diese krumme Linie BCD ist diejenige, von welcher wir reden, und welche auch bey Betrachtung der geradelinichten Figuren, und bey den Auflösungen der Aufgaben, so bey denselben vorkommen, überall gebraucht wird.

IV.
Abh. F. 50.

S. 88. Man sieht leicht ein, wie dieselbe entstehe, und wie sie zu zeichnen sey. Man nimmet eine beständige Länge AB nach Belieben, und trägt dieselbe Länge von A in der Ebene nach allen Seiten, oder damit dieses geschehen könne, läßt man das eine Ende der gedachten Länge oder Linie AB in A ruhen, die ganze Länge aber sich im Kreise herum bewegen; so beschreibt das äußerste Punct derselben B, indem es dergestalt herum fließet, die verlangte krumme Linie BCD.

S. 89. Hieraus folgert man ohne Schwierigkeit, daß sich die Linie BCD endlich schließen werde, und daß, so bald das fließende Punct wieder in B gekommen, allwo es seine Bewegung angefangen, dasselbe, wenn man die Linie AB noch weiter herum drehet, wieder in seinen vorigen Weg fortgehen werde. Ist dieses geschehen, daß man die Linie ABC an ihren Anfang angeschlossen, so heisset sie der **Umkreis** eines **Cirkels**, oder auch nur schlechterdings ein **Umkreis**. Denn die krummlinichte Figur BCD selbst wird ein **Cirkel** oder eine **Scheibe** genennet. Ist aber die Linie BC nur bis auf einige Weite fortgeführt, und noch nicht völlig geschlossen, oder nimmet man von einem ganzen **Umkreis** ein **Stück** von beliebiger Größe, als BC, so wird dasselbe ein **Bogen** genennet. Das Punct A aber von welchem der **Umkreis** überall gleich weit entfernt ist, heisset der **Mittelpunct** des **Cirkels**; und die gerade Linie, welche von diesem **Mittelpunct** bis an den **Umkreis** gezogen ist, AB, oder eine jede andere dergleichen, wird der **Radius**, oder **Halbmesser** genennet.

S. 90. Einerley **Radius** kan nicht verschiedene **Umkreise** beschreiben: und wenn demnach das **Mittelpunct** einerley bleibt, und man wolte mit eben dem **Halbmesser** verschiedene **Umkreise** beschreiben, würden sie zusammen fallen; nimmet man aber verschiedene **Mittelpuncte**, so werden doch die **Cirkel** selbst so wohl, als ihre **Umkreise** von einerley Größe, die **Halbmesser** aber alle, die man in dergleichen **Cirkeln** ziehen kan, haben einerley Länge, wie man sie auch mit einander ver-

IV. gleichen mag. Daß man um einen jeden gegebenen Mittelpunct in einer Ebene einen Cirkelkreis beschreiben könne, ist bereits IV, 88. mit andern Worten gesagt, und wie dieses vermittelst des bekannten Werkzeuges zu verrichten ist, ist niemanden unbekannt: aufs höchste ist dasselbe ein Handgrif, welcher hier nicht darf gezeigt werden.

F. 51. S. 91. Man kan vermittelst eines Cirkelkreises, welchen man beschrieben eine gerade Linie von einer gegebenen Länge nach einer jeden beliebigen Strecke, an ein gegebenes Punct legen. Denn gesetzt, es sey die gerade Linie AB gegeben, welche man aus dem Punct C auf die gerade Linie DE legen sol, so nehme man die Linie AB vor den Halbmesser, oder man fasse sie mit dem Cirkelinstrument, und beschreibe um den Mittelpunct C einen Kreis, welcher von DE das Stück CF oder CG abschneiden wird, welches der gegebenen geraden Linie AB gleich ist. Oder man beschreibe zuerst mit dem Radius AB einen Umkreis an das Punct C, an welches eine gerade Linie von der Größe AB gelegt werden sol, so kan man von C eine gerade Linie nach beliebiger Strecke bis an den Umkreis dieses Cirkels ziehen, welche allzeit der gegebenen AB gleich seyn wird.

S. 92. Weil CF so groß ist als AB, so ist die Linie DF die Summe der beyden Linien DC und AB, und FE ist der Unterschied der beyden Linien CE und AB, und es beruhet die Addition zweier geraden Linien, oder die Subtraction der Kleinern derselben von der größern, bloß auf demjenigen so eben gewiesen worden, wie man auf eine gerade Linie eine andere von gegebener Länge legen müsse. Man siehet aber auch hieraus, daß wenn man von dem Mittelpunct eines Cirkels an, nach den Umkreis desselben eine gerade Linie zieht, nach welcher Strecke man wil, welche kleiner ist als der Radius, das äußerste Punct dieser geraden Linie innerhalb des Cirkels fallen müsse, und außerhalb desselben, wenn man die also gezogene gerade Linie größer machet als der Radius ist.

S. 93. Und diese Bestimmung der Längen solcher geraden Linien, welche von einem gegebenen Punct anfangen, ist das einzige, worzu der Umkreis des Cirkels im Anfang wird gebraucht werden, daß also hier nicht nöthig ist seine übrigen Eigenschaften zu betrachten. Doch können wir noch etwas anmerken, welches derselbe mit dem Umkreis einer jeden andern Figur gemeinschaftlich hat, daß nemlich, wenn wir eine gerade Linie durch irgend ein Punct innerhalb des Cirkels ziehen, und

und dieselbe nach Belieben verlängern, sie den Umkreis desselben nothwendig in zweyen Puncten schneiden müsse, denn weil sie in einem fortgehet, muß sie endlich nothwendig den Umkreis des Circels, wenn sie fortgezogen wird, erreichen, und denselben schneiden, und dieses zwar so wohl auf der einen als auf der andern Seite, wie dieses auch bey einer jeden andern Figur, aus eben der Ursache erfolgt.

IV.
Abschnitt.

S. 94. Wir sehen, daß die gerade Linie den Umkreis nothwendig zwey mal schneiden müsse, und bekümmern uns hier nicht, ob sie denselben auch noch öfter schneide oder nicht, dieses kan bey verschiedenen Figuren geschehen, und die 52 Zeichnung stellt eine Figur vor, deren Umkreis die gerade Linie A B viermal schneidet. Der Augenschein giebt es, daß dieses bey dem Circel nicht angehe, aber uns ist hier daran nichts gelegen: wir gebrauchen zur Zeit nichts mehr, als was wir eben gesagt, und sind um die übrigen Eigenschaften der Circelkreise, bis wir sie insbesondere zu betrachten anfangen, unbekümmert.

F. 52.

S. 95. Was aber die geradelinichten Figuren anlangt, so folget hieraus, daß eine gerade Linie, welche wie A B durch ein Punct innerhalb derselben gehet, wenigstens zwey Seiten derselben schneiden müsse. Denn sie muß den Umkreis zwey mal schneiden: diese Schnitte aber können nicht beyde in eine Seite fallen, weil sonst zwey gerade Linien einander zwey mal schneiden müssen: sie fallen also wenigstens in zwey Seiten.

S. 96. Zween Circelkreise schneiden einander nicht nothwendig. Sie haben alle beyde ihre bestimmte Gränzen, über welche sie nicht kommen können. Sie können alle beyde aus einander fallen, es kan aber auch der eine ganz innerhalb des andern enthalten seyn. Aber so bald der Umkreis eines Circels zum Theil außer den Umkreis eines andern fällt, zum Theil aber innerhalb desselben, oder so bald der Umkreis eines Circels durch zweyen Puncte gehet, deren einer innerhalb eines andern Circels befindlich ist, der andere aber außershalb desselben, so kan es nicht anders seyn, diese Umkreise müssen einander in mehr als einem Punct schneiden. Der Circelkreis dessen Mittelpunkt A ist, gehet durch die zweyen Puncte B und C, deren einer B innerhalb des andern Circels liegt, welcher um den Mittelpunkt D beschrieben worden, der andere C aber außershalb desselben. Wenn man den kleinern Kreis von B anfängt, und nach C fortziehet, so muß er den größern nothwendig

F. 53.

IV. wendig schneiden, weil er von innen nach aussen gehet; fähret man
 Abschnitt. weiter fort ihn zu beschreiben, so gehet er wieder von dem Punct C
 nach B inwendig zu, damit er aber hinein kommen könne, ist es noth-
 wendig, daß er die Gränzen des größern Circels oder seinen Umkreis
 noch einmal durchkreuze. Es ist nichts leichter als dieses, auf die Um-
 Kreise aller Figuren anzuwenden: wovon wir aber keinen Nu-
 tzen sehen.

S. 97. Uebrigens ist bey dieser Anmerkung eben das zu sagen, so
 wir unlängst angeführt. Wir haben uns nicht darum zu bekümmern,
 ob dergleichen Umkreise einander in mehr als zween Puncten schneiden
 können, wie dieses bey andern Figuren geschehen kan. Denn die
 F. 54. Umkreise der beyden Dreyecke ABC und DEF schneiden einander in
 sechs Puncten. Genug daß wir deutlich sehen, daß in den angezeigten
 Umständen wenigstens zween Schnitte notwendig erfolgen müssen.
 Die übrigen alle, wenn auch die Umkreise zweer Circel einander in
 mehr als zween Puncten schneiden könnten, können uns zu unserm ge-
 genwärtigen Vorhaben nichts nützen.

Wie der Umkreis eines Dreyecks durch zwey Seiten be-
 stimmt wird, die einen Winkel umschließen.

S. 98. Nunmehr können wir uns ohne von etwas aufgehalten
 zu werden zur genauen Betrachtung des Umkreises der geradelinichten
 Figuren, und insbesondere der Dreiecke wenden, und die Aufgaben,
 welche bey denselben vorkommen nach und nach auflösen. Das na-
 türlichste ist, daß wir da wieder anfangen, wo wir bey der Betrach-
 tung der geraden Linien stehen geblieben. Die zwey geraden Linien
 F. 55. AB und BC machen einen Winkel ABC. Man ziehe mit einer neuen
 geraden Linie AC, die äußersten Puncte dieser Linien zusammen, so be-
 kommt man ein dreyeck ABC. Und, ist uns ein Winkel vorgeleget,
 zusamt zween Seiten, welche denselben Winkel in einem Dreyeck ein-
 F. 56. schließen sollen, so ist nichts leichter, als ein dergleichen Dreyeck aus-
 zumachen. Es sey dieser gegebene Winkel ABC, und die Seiten D
 und E. Man setze eine der gegebenen Seiten auf die Linie BA von der
 Spitze B nach A. Wir haben dieses mit der Linie D gethan, deren
 äußerstes Punct in F gefallen. Eben dieses thue man mit der zweyten
 Linie E, welche man ebenfalls von B aus auf BC bringet, da denn
 ihr äußerstes Punct in G fällt, und man hat die Linie BC verlängern
 müssen,

müssen, um die E. auf selbe zu bringen. Ist dieses geschehen, so hat man nunmehr nur noch die Puncte F und G mittelst einer geraden Linie FG zusammen zu hängen, so ist das Dreyeck FBG an dem gegebenen Winkel ABC, und aus den Seiten DE fertiggestellt. IV. Abschn.

§. 99. Man siehet leicht, daß man mit dem gegebenen Winkel und Seiten nicht anders verfahren können, um aus denselben ein Dreyeck zu machen, als wir gethan. Die einzige Veränderung, welche zu machen wäre, ist, daß man die erstere Linie D nicht auf BA sondern auf BC, und hingegen die andere E auf BA gebracht hätte. Es ist aber sichtlich, daß dadurch kein anderes Dreyeck heraus gebracht worden wäre, als, welches wir eben gemacht, nur wäre das selbe verkehrt zu liegen kommen. Sonst aber kan man nichts verändern, IV, 22. und es werden also die Dreyecke die man nach dieser Art fertigsetzt, alle einerley, nur können sie verkehrt zu liegen kommen, das ist, die gerade Linie FG wird beständig so groß als in unserer Figur, und es behalten auch die Winkel bey F und G ihre Größe, so lang der Winkel bey B, und die Seiten BF, BG einerley bleiben, ob zwar, wenn man BG der D, und BF der E gleich genommen hätte, der Winkel F unten an statt G, und G an statt F oben gefallen wäre. Hievon werden wir uns nach diesem noch deutlicher überzeugen.

§. 100. Der Winkel bey B kan so groß oder so klein seyn als er will, und die Seiten D und E können ebenfalls von nur beliebiger Länge gegeben werden, ohne daß zu befürchten wäre, daß man hernach aus demselben Winkel und Seiten das Dreyeck nicht ausmachen können sollte. Denn es wird, so bald als die Linien BF, BG richtig gesetzet worden, hernach zur gänzlichen Fertigstellung des Dreyeckes nichts anders erfordert, als daß man die gerade Linie FG ziehe. Eine gerade Linie aber kan zwischen jeden zwey Puncten gezogen werden, wie sie auch liegen mögen.

§. 101. Ist es aber erlaubt den Winkel bey B anzunehmen von was vor Größe man will, so kan man ihn gerade, spitzig und stumpf nehmen. Thut man das erste, und nimt vor B einen geraden Winkel an, so bekommt man ein Dreyeck, in welchem ein gerader Winkel enthalten ist, dergleichen FBG in der 57 Figur ist. Nimmet man aber vor B einen stumpfen Winkel, so erhält man ein Dreyeck in welchem ein stumpfer Winkel vorkommt, als FBG in der 58 Figur.

§ f

§. 102.

F. 57.

F. 58.

IV. **Schnitt.** §. 102. Die erste Art der Dreyecke, in welchen nemlich ein gerader Winkel vorkommt, die übrigen Winkel mögen beschaffen seyn wie sie wollen, heißen rechtewinkliche Dreyecke, und die andere Art, in welchen ein stumpfer Winkel befindlich ist, werden stumpfwinkliche genennet, ohne daß man sich auch hier um die Größe der übrigen Winkel zu bekümmern nöthig habe.

§. 103. Wenn man aber vor den Winkel bey B einen spitzigen Winkel nimt, so wird das Dreyeck, welches da heraus kommt, deswegen nicht spitzwinkliche müssen genennet werden; denn man pflegt nicht alle Dreyecke so zu nennen, welche einen spitzigen Winkel haben, sondern es müssen alle Winkel eines Dreyecks spitzig seyn, wenn es diesen Namen eines spitzwinklichen Dreyecks bekommen sol, oder es muß in einem spitzwinklichen Dreyeck weder ein gerader noch ein stumpfer Winkel vorkommen, weil man es sonst mit dem erst angezeigten Namen eines geradewinklichen oder stumpfwinklichen Dreyecks belegen würde. Nimmet man aber gleich den Winkel bey B spitzig, so folget daraus nicht nothwendig, daß die Winkel bey F und G auch spitzig fallen müssen. Und also kan es seyn, daß ein Dreyeck, dessen Winkel bey B spitzig genommen worden, bey F oder G einen geraden oder stumpfen Winkel bekommt, nachdem nemlich die Seiten BF und BG angenommen werden. Denn von der Größe dieser Seiten hängt die Größe derer Winkel bey F und G, in dem vorhabenden Fall, lediglich ab.

§. 104. Da aber auch die Seiten BF, BG in allen Arten der Dreyecke nach Belieben angenommen, und verlängeret werden können: so siehet man erstlich, daß man sie so weit verlängern könne, daß hernach die dritte Seite FG ein jedes Punct einschliesse, so innerhalb des Winkels ABC gegeben seyn mag, wo man wil. Es sey das **F. 56.** Punct H, innerhalb des Winkels ABC aber außershalb des Dreyecks FBG gegeben. Man verlängere die Seiten BF, BG in Gedanken, und entferne mit den Puncten F und G auch die Seite FG immer weiter von der Spitze B. Da nun das Punct H seine Lage behält, FG aber immer weiter auswärts gebracht wird: so muß endlich diese Seite sich so weit von B entfernen, daß sie außershalb H vorbehey gehet, **F. 57.** und also dieses Punct, wie in der 57, 58, 59 Zeichnung, in das Dreyeck **58. 59.** einschliesset.

§. 105. Ist dieses geschehen, und man ziehet durch das dergestalt ein-

eingeschlossene Punct H eine gerade Linie wie man wil; so muß diese selbst nothwendig zwei Seiten des Dreiecks FBG schneiden. IV. 92. Diese geschnittene Seiten können seyn FB und BG oder FB und FG, oder BG und FG; und also ist unter denselben allezeit wenigstens eine der zwei Seiten FB, BG, die den Winkel B einschließen, in welchen man das Punct H gesetzt hatte. Eine gerade Linie also, welche man durch ein Punct H innerhalb eines Winkels FBG zieht, nach welcher Seite man wil, schneidet allezeit wenigstens eine der Seiten dieses Winkels FB oder BG, wenn man nemlich beides, so wol diese Seiten als auch die durch H gezogene gerade Linie, so weit als nöthig ist, verlängert.

IV.

Abchnitt.

§. 106. Zweitens kan man auch die nach Belieben anzunehmende Seiten BF, BG einander gleich machen. In diesem Fall entsteht ein Dreieck, welches gleichschenklige genennet wird, dergleichen ist FBG in der 59 Figur, in welchem $FB = BG$. Der Winkel B kan hier ebenfalls angenommen werden, wie man wil, und also spitzig, gerad oder stumpf, und kan also ein gleichschenkliches Dreieck zugleich geradwinklicht oder stumpfwinklicht seyn. F. 59.

§. 107. Was aber die Größe der Seite FG in einem gleichschenkligen Dreiecke anlangt, so wird diese Seite länger oder kürzer, nachdem man den Winkel B mehr oder weniger öfnet, welche Seite demnach von gar verschiedener Größe seyn kan. Ist nemlich der Winkel B in einem gleichschenkligen Dreieck erstlich sehr spitzig und ungemein klein, so ist die Seite FG fast von gar keiner Länge: öfnet sich der Winkel je mehr und mehr, so wird auch die Seite FG je größer und größer, bis, wenn der Winkel B so groß geworden, als er nur werden können, die Seite FG fast doppelt so groß ist, als einer von den Schenkeln BG oder BF. Größer kan die Seite FG nicht werden. Man siehet leicht, da auf diese Art durch beständige Definung des Winkels B, die Seite FG fast von nichts, bis fast zu der Größe erwachsen kan, daß sie zwey mal so groß wird, als BF oder BG, daß darunter auch eine Größe des Winkels B seyn müsse, bey welcher FG der Seite $BF = BG$ eben gleich ist. Die 61 Figur stellet ein dergleichen Dreieck vor: und weil in demselben FG so groß ist als BF, diese BF aber gleich Anfangs so groß angenommen worden als BG, so sind in demselben alle Seiten einander gleich. Ein dergleichen Dreieck aber in welchem alle Seiten einander gleich sind, heißet ein gleichseitiges Dreieck. F. 60. F. 61.

§f 2

§. 108.

IV.
Abchnitt.
F. 62.

§. 108. Um aber wieder auf die Dreyecke zu kommen, in welchen die zwei Seiten BF und BG ungleich gemacht worden sind; so wird in einem solchen Dreyeck, wenn man den Winkel bey B so klein annimmt als er nur seyn kan, die Seite FG fast der Unterschied der zwei Seiten BF und BG, oder FG ist gar nicht viel von dem Ueberschuß der größern, der zuerst angenommenen Seite BG über die kleinern BF, unterschieden. Denn BFG ist in diesem Fall fast eine gerade Linie, welche auf die BG fällt. Wäre aber dieses, und fiel BFG auf BG, so wäre FG der wahrhafte Ueberschuß der größern Linie BG über die kleinern BF. Macht man so dann den Winkel B immer mehr und mehr auf, so wird auch FG größer und größer, bis endlich, nachdem man B so groß gemacht, als nur möglich ist, die Seite FG fast den beyden Seiten BF und BG zusammen gleich geworden, und wächst also durch diese Oefnung des Winkels B die ihm entgegen gesetzte Seite FG, von dem Unterscheide der beyden Seiten BF, BG, bis fast auf die Summe derselben.

§. 109. Dieses kan man sehr deutlich einsehen, wenn man sich vorstellt, daß an die gerade Linie BG die Linie BF = von beliebiger Länge dergestalt gesetzt sey, daß sie sich um das Punct B drehen läßt, wodurch der Winkel B nach und nach geöffnet oder vergrößert werden kan, und daß um G eine andere gerade Linie GH von genugsamer Länge auf eben die Art bewegt werden könne. Man bringe BF erst fast ganz auf BG, und lege GH durch das Punct F derselben: So dann öfne man den Winkel B nach und nach, neige aber dabey die Linie GH dergestalt, daß sie beständig durch das Punct F der vorigen BF gehe, und mit derselben das Dreyeck FBG einschliesse.

§. 110. Es kan nicht anders seyn, es müssen unter diesen Oefnungen des Winkels B sehr viele, ja die allermeisten seyn, bey welchen FG weder der BF noch der BG gleich ist; und ist dieses, so sind in einem solchen Dreyeck alle Seiten ungleich, weil wir die beyden Seiten BF, BG gleich Anfangs ungleich angenommen haben. Ein dergleichen Dreyeck, welches keine einzige Seite hat, die einer andern Seite eben desselben Dreyecks gleich wäre, heisset ein ungleichseitiges Dreyeck.

F. 63. §. 111. Wir haben bereits IV, 99. gesehen, daß wenn man zwey Dreyecke ABC, und abc nach der Art, die wir betrachten, aus einemley Winkel und Seiten zusammen setzt, dieselbe Dreyecke in keinem

nem Stück verschieden seyn können; und dieses dahet erwiesen, weil man in dieser Art Dreyecke zusammen zu setzen nichts verändern kan. Wir haben aber auch einen deutlichern Beweis davon versprochen, welchen wir nunmehr geben, und zu dem Ende unsern Satz etwas umständlicher ausdrücken wollen.

S. 112. Jede zwey Dreyecke ABC und abc , bey deren ersteren wir einen Winkel B antreffen, welcher einem Winkel des andern Dreyecks b gleich ist, und zwey Seiten BA ; BC , welche den Winkel B einschließen, die den Seiten ba , bc des Winkels b in dem zweyten Dreyecke gleich sind, AB nemlich $= ab$, und $BC = bc$, Jede zwey dergleichen Dreyecke, sage ich, sind von einander gar nicht unterschieden, weder in der Größe der übrigen Seiten AC , ac noch in der Größe der übrigen Winkel A , a und C , c wenn man nur in Acht nimmt, keine andere Winkel mit einander zu vergleichen, als, die zwischen gleichen Seiten liegen; noch sind die Dreyecke selbst von verschiedener Größe, sondern es ist $AC = ac$, $A = a$, $C = c$ und das Dreyeck ABC gleich dem Dreyecke abc .

S. 113. Der Grund, woraus wir dieses nunmehr schließen wollen, ist die so gar gemeine und vollkommen überzeugende Art, ausgedehnte Dinge mit einander zu vergleichen, indem man sie auf einander passet, welcher IV, 42. bey geraden Linien und Winkeln bereits gebrauchet worden, und welcher sich nicht weniger auch auf die ebenen Flächen schließt. Denn wer wil zweifeln, daß diejenige ebene Figuren gleich seyn, welche dergestalt auf einander gelegt werden können, daß ihre Gränzen zusammen fallen. Sie fallen in diesen Umständen ganz und gar auf einander, und machen eine einzige Figur aus, eben wie zwey gleiche gerade Linien zusammen fallen, wenn man eine derselben zwischen die äußerste Punkte der andern legt. Um nun diesen Grundsatz anzuwenden, müssen wir unsere Dreyecke ABC und abc vergleichen und zeigen, daß wenn man eines derselben aus dem Papier ausschneidet, und wirklich auf das andere brächte, allerdings seine Gränzen oder sein Umkreis in allen Stücken, mit dem Umkreis des andern überein kommen würde. Denn man hat eben nicht nöthig wirklich ein dergleichen Dreyeck auszuschneiden und auf das andere zu legen, wiewohl es eben nicht schaden könnte, wenn es jemand; alles desto deutlicher einzusehen, thun wollte.

IV. S. 114. Man stelle sich also vor, daß man das Dreieck abc von seiner Stelle. wegnehmen und auf das andere ABC bringen wolle, aber man verfähre darinnen ordentlich. Erstlich lege man die Spitze des Winkels b , von welchem man zum Grund geſetzt, daß er dem Winkel B gleich ſey, auf die Spitze dieſes Winkels B . Hernach ſchiebe man das Dreieck bca ſo lang herum, bis daß die Linie bc auf die Linie BC zu liegen komme. So bald man dieſes erhalten, wird ſich auch c auf C , und ba auf BA befinden. Denn die Linie bc iſt der Linie BC gleich. Wenn aber gerade Linien, die gleich ſeyn, auf einander geſetzt werden, und beide von einem Punct anfangen, ſo fallen dieſelbe ganz zuſammen, und endigen ſich in einem Punct.

Ferner iſt der Winkel b dem Winkel B gleich. Wenn gleiche Winkel mit ihren Spitzen zuſammen fallen, und eine Seite des einen kommt mit einer Seite des andern überein. So fallen auch die übrigen Seiten zuſammen. Das erſte iſt geſchehen. Die Spitze c iſt auf C , bc auf BC gebracht worden, alſo iſt auch ba auf BA gefallen, das iſt, daß Punct a iſt nicht auſſer der Linie BA . Weil aber auch ba der BA gleich iſt, und jene auf dieſe ſo geſetzt worden, daß ſie beide von dem Punct B anfangen, ſo endigen ſie ſich wieder in einem Puncte, und fällt alſo a auf A . Demnach fallen die Grenzen des Dreiecks abc von dem Punct c an durch b bis nach a , auf die Grenzen des Dreiecks ABC , die mit eben den Buchſtaben bezeichnet ſind, und bleibt nichts übrig als die gerade Linie ac , welche noch nicht betrachtet worden. Allein mit dieſer hat es nunmehr wenige Schwierigkeit. Sie liegt zwiſchen den Puncten a und c , welche auf die Puncte A und C fallen, es kan alſo nicht anders ſeyn, ſie muß nunmehr zwiſchen den Puncten A und C liegen, und alſo mit der geraden Linie AC zuſammen fallen. Alſo ſind die geraden Linien ac und AC einander gleich, denn ihre äußerſte Puncte fallen zuſammen. Alſo iſt der Winkel A dem Winkel a gleich, denn die Seiten, welche dieſen Winkel einſchließen, liegen ebenfalls auf einander, und eben ſo iſt es mit den Winkeln C, c beſchaffen. Und der ganze Umfang des Dreiecks abc , mit dem Umfang des Dreiecks ABC , zuſammen gefallen, ſo müſſen auch die Flächen der Dreiecke ſelbſt gleich ſeyn.

S. 115. Dieſer und einige folgende dergleichen Sätze, welche von der Gleichheit der Seiten und Winkel in verſchiedenen Dreiecken handeln, ſind von ungemeinem Nutzen. Faſt alles, ſo in der Geometrie

zu zeigen ist, gründet sich darauf, ja wenn man die Wahrheit sagen sol, der rechte Verstand von diesen Kleinigkeiten und die Fertigkeit dieselbe überall geschickt anzuwenden, machen einen grossen Theil von demjenigen aus, welches ein Geometra einsehen muß, wenn er diesen Titel mit Recht verdienen wil. Wir müssen uns noch etwas bey diesem Satz aufhalten, und ihn auf eine besondere Art von Dreyecken anwenden.

§. 116. Gesezt es seyen zwey Dreyecke, wie wir sie eben betrachtet, gleichschenkllicht, nemlich AB sey der Seite BC, und ab der bc gleich, das übrige aber bleibe, wie wir es eben gesezt. Es sey nemlich der Winkel B dem Winkel b gleich, und BA der ba, denn mehr haben wir nicht nöthig zu sezen, weil aus diesem vor sich folget, daß auch BC der bc gleich sey. So müssen erstlich wie vorher die Winkel A und a, C und c, die Seiten AC und ac, und die Dreyecke selbst gleich seyn. Aber es folget hier auch etwas mehrerts. Weil $BA = ba$, und $ba = bc$, das ist, weil jede der zwey Seiten BA und bc der Seite ba gleich ist, so ist auch BA der Seite bc gleich, und aus eben dem Grund ist auch $BC = ba$. Demnach da jederzeit in den Dreyecken unter den Umständen, welche wir gegenwärtig betrachten, die Winkel gleich sind, welche zwischen gleichen Seiten liegen, so muß auch der Winkel C dem Winkel a gleich seyn. Da nun also beständig $A = a$, hier aber auch $C = a$, so sind hier die Winkel A und C beide einem dritten gleich, und es müssen demnach diese Winkel A und C mit einander verglichen, ebenfalls gleich seyn, nemlich $A = C$.

§. 117. Dieses ist ein neuer Satz. Ein jedes geradschenkllichtes Dreyeck kan man, wie hier mit zweyen geschehen, mit sich selber vergleichen: oder wenn man ja wil, so kan man sich vorstellen, daß abc ein Abdruck von dem Dreyeck ABC sey, und einen dergleichen Abdruck kan man in Gedanken von einem jeden Dreyecke machen. Die eben gebrauchte Schlüsse können demnach bey einem jeden gleichschenkllichten Dreyeck angebracht werden, und es folget überall, daß die zweyen Winkel A und C, welche an den gleichen Seiten BA und BC (nicht zwischen denselben) liegen, einander gleich seyn. Oder da man die dritte Linie des Dreyecks AC, welche ausser den zwey gleichen Seiten BA und BC in demselben befindlich sind, insgemein die Grundlinie des gleichschenkllichten Dreyecks zu nennen pflegt; so kan man diesen allgemeinen Satz kurz also verfassen: In einem jeden gleichschenkllichten Dreyeck sind die Winkel an den gleichen Seiten einander gleich.

F. 64.

IV.

Abchnitt.

IV. Schenklichten Dreyeck sind die Winkel an der Grund-Linie einander gleich.

S. 118. Aber auch hier kan uns die natürliche Einsicht in einem Blick dazu führen, worzu wir durch gekünstelte Vernunft-Schlüsse langsam gelanget. In einem gleichschenkligten Dreyeck ist alles auf einer Seite wie auf der andern. Die Seite AB ist der Seite BC eben so wohl gleich als BC der AB gleich ist, und AC liegt zwischen AB und CB auf einerley Art. Warum sollte also der eine der beiden Winkel A und C grösser seyn als der andere. Man versuche es den einen grösser zu setzen, und wehle unter beiden zu welchem man glaubt Recht zu haben. Die Ohnmöglichkeit, welche man finden wird sich zu etwas zu entschliessen, wird den Satz gnugsam beweisen.

F. 61.

S. 119. Ist demnach ein Dreyeck gleichseitig, oder sind in einem Dreyeck alle drey Seiten einander gleich, so müssen auch alle drey Winkel desselben gleich seyn. BGF sey ein dergleichen Dreyeck. Aus der Gleichheit der Seiten BF und FG, folget das $B = G$. Weil aber ferner auch die Seite BF der Seite BG gleich ist, so muß auch der Winkel F dem Winkel G gleich seyn. Und eben so ist, wegen der Gleichheit der Seiten BG und FG, auch $B = F$: das ist jede zweyen Winkel, wie man sie auch mit einander vergleichen wil, sind einander gleich. Und warum sollte auch der erste grösser seyn, als der zweite, oder der dritte, da die den Winkeln entgegen gesetzte Seiten, einander gleich sind. Man frage sich wieder, wenn man zweifelt, ob die Winkel gleich seyn, welcher wohl von allen der größte sey? Die Ohnmöglichkeit der Antwort wird an statt eines Beweises seyn. Denn ist nichts, welches uns dahin bringen kan, daß wir einen oder den andern der Winkel vor den größten halten, so ist auch nichts, welches verursachen könnte, daß einer wirklich grösser als der andere wäre.

Der Umkreis eines Dreiecks wird durch zweyen Winkel und der einen Seite bestimmt.

F. 65.

S. 120. Es läßt sich der Satz, welchen wir bisher betrachtet, und aus welchen wir verschiedene Eigenschaften der Dreyecke hergeleitet haben, umkehren. Wir haben gesetzt, daß in den Dreyecken ABC und abc, die Winkel B und b, wie auch die Seiten AB und a, BC und bc einander gleich seyn, und daraus geschlossen, daß auch die

Sei

Seite AC der $a c$, der Winkel BAC den Winkel a , und der Winkel C dem Winkel c gleich seyn müsse. Es ist aber auch umgekehrt richtig, daß, wenn die Seite AC der Seite $a c$ gleich ist, und der Winkel BAC dem Winkel a , wie auch C dem c , auch die übrigen Winkel B und b einander gleich seyn werden, wie auch $AB = ab$, und $BC = bc$. Das ist, wenn in zwey Dreyecken ABC und abc zweyen Winkel gleich sind, A dem a , und C dem c , und es sind auch die Seiten AC und $a c$ gleich, die zwischen diesen Winkeln liegen, so sind auch die übrigen Winkel B und b gleich, und die Seiten die zwischen gleichen Winkeln liegen, woraus, wie vorher die Gleichheit der Dreyecke selbst erhellet.

IV.

Abſchnitt

§. 121. Der Beweis hiervon läßt sich gar leicht geben. Es wird gesetzt, daß der Winkel c dem Winkel C gleich sey. Man bringe in Gedanken den Winkel c auf C, so nemlich, daß die Spitzen dieser Winkel in C zusammen fallen, und daß die Seiten ca auf CA und cb auf CB fallen, welches bey gleichen Winkeln allezeit geschehen kan: weil nun ca der CA gleich angenommen worden, so wird dadurch auch das Punct a auf A gebracht. Nun ist entweder cb der CB gleich oder nicht. Ist das erstere, wie es in dem Satz als richtig angegeben worden, so ist kein Zweifel übrig, daß das Dreyeck ABC dem Dreyeck abc in allen Stücken gleich sey. Denn in diesem Fall werden in diesen Dreyecken gleiche Winkel c und C von gleichen Seiten $AC = ac$, und $BC = bc$ eingeschlossen. Alleine weil eben dieses zu beweisen ist, daß $BC = bc$, so kan man es so schlechterdings nicht annehmen. Wir wollen also setzen, bc sey nicht so groß als BC, sondern grösser oder kleiner, und sehen, ob dieses bestehen könne, und ob es nichts widersprechendes in sich hält. Denn ist dieses, so kan bc der BC ohnmöglich ungleich seyn.

§. 122. Ist aber bc der BC ungleich, so kan das Punct b , nachdem man den Winkel $a c b$ auf den Winkel ACB gebracht, ohnmöglich in B fallen, sondern muß irgendwo außer B, in D, zum Exempel, zu liegen kommen. Man nehme dieses an, und ziehe AD. Weil nun in den Dreyecken ABC und abc , $c = C$, $AC = ac$, und über dieses gesetzt wird $CD = bc$, so muß man schließen, daß auch der Winkel DAC dem Winkel bac gleich sey IV, 12. Es war aber auch $BAC = bac$, derowegen sind die Winkel DAC und BAC beide einem dritten Winkel bac gleich, und also ist $DAC = BAC$. Dieses ist wider-

Es

fin

IV. ~~Wissent.~~ sinnlich. Wenn D in der Linie BC ausser B fällt, so ist der Winkel DAC nothwendig entweder grösser oder kleiner als der Winkel BAC, und können also diese Winkel ohnmöglich gleich seyn. Also ist dasjenige falsch, woraus geschlossen worden, daß D ausser B falle, das ist, es ist falsch, daß bc der BC ungleich sey. Also sind diese Linien gleich, woraus, wie wir schon gesehen, die gänzlich Gleichheit der Dreiecke abc und ABC , bey welchen $C = c$ und $BC = bc$, wie auch $AC = ac$, nach dem Satz folget, welchen wir jezo verkehrt haben.

§. 123. Es ist in dem Beweis hoffentlich keine Schwierigkeit, und der Satz selbst desto leichter zugeben, weil er auch daraus erhellet, daß in einem Dreiecke sich keine Seite verändern lasse, wenn man nicht auch die ihm entgegen gesetzte Winkel ändert, welches wir oben IV, 108. angemerkt. Sind nun also in dem Dreiecke BAC, die Seite AC und der Winkel C von bestimmter Grösse, wie wir dieses angenommen haben, indem wir gesetzt $AC = ac$, und $C = c$, so kan man zwar an statt der Seite AB, sich eine andere Seite AD vorstellen, welche machet, daß CD länger oder kürzer sey als CB; aber es wird damit auch der Winkel BAC verändert, und man bekommt an statt desselben DAC. Soll der Winkel BAC unverändert bleiben, so muß auch die Seite BC bleiben wie sie ist. Kan aber bey unveränderter Seite AC und bey unveränderten Winkeln C und BAC die Seite CB nicht grösser oder kleiner werden, so kan auch in dem Dreiecke abc bey den oft wiederholten Bedingungen cb nicht grösser oder kleiner seyn als CB.

§. 124. Auf eben die Art können wir auch schliessen, wenn zum Grunde gesetzt wird, daß in den Dreiecken ABC und abc die Seiten AC und ac , und die Winkel c und C einander gleich sind, wie auch der Winkel ABC, dem Winkel b , daß auch die übrigen Seiten AB und ab , wie auch BC und bc und die Winkel BAC und a gleich seyn werden. Es ist dieser Satz von dem letzten darinnen unterschieden, daß wir hier nicht annehmen, daß die Seiten AC, ac von welchen als bekannt angenommen wird, daß sie gleich seyn, zwischen den beyden Winkeln liegen, deren Gleichheit in den beyden Dreiecken voraus gesetzt wird. Sondern es ist hier die Rede von solchen Winkeln b und c , oder C und ABC, deren einer der Seite ac oder AC entgegen steht.

§. 125. Da der Beweis dieses Satzes von dem Beweis des vorigen

eigen wenig unterschieden ist, so kan er desto kürzer gefasset werden. IV. Man bringe den Winkel c auf den Winkel C , welcher ihm gleich ist, und ac auf AC , so wird a in A fallen, und weil cb auf CB gebracht worden, so fällt b entweder in B , oder ausser dieses Puncts in D . Man nehme das letztere an, und ziehe AD . Weil nun in den Dreyecken ACD und acb die Winkel C , c gleich sind, und die Seiten die diese Winkel einschliessen $AC = ac$, und $DC = bc$, so müssen auch die Winkel ADC und b gleich seyn. IV, 112. Nun ist $b = ABC$, also auch $ADC = ABC$. Wir wissen aber, daß dieses falsch sey. Denn sind die Winkel ADC und ABC einander gleich, so sind die Linien DA und BA parallel, und laufen nicht zusammen: IV, 48. und es ist ohnmdglich, daß von einer geraden Linie BC zwei andere gerade Linien DA und BA nach einem Punct A folten können gezogen werden, welche mit der BC zween gleiche Winkel ABC und ADC machten, die beyde nach einer Seite gerichtet sind. IV, 47. Also ist es falsch, daß das Punct b ausser B in D fallen könne. Folgendes fällt es in B , und es ist demnach die Seite cb der Seite CB gleich, weil jene auf diese passet. Und da also $c = C$, und $AC = ac$, aber auch $cb = CB$, so sind die Dreyecke ABC und abc wiederum in allen Stücken gleich. Der Winkel BAC nemlich dem Winkel a , und die Seite AB der Seite ab , wie auch $BC = bc$, und der Raum, welchen die Seiten AB , BC , AC beschliessen, dem Raum, welcher von ab , bc , ca , beschloffen wird.

§. 126. Man kan diese zween Sätze in einen bringen, und überhaupt sagen, daß, wenn man zwey Dreyecke hat, ABC und abc , und es ist eine Seite des einen AC einer Seite des andern ac gleich, und von zween Winkeln, welche in dem ersten Dreyeck ABC in Ansehung der AC auf gewisse Art liegen, so ist ein jeder einem Winkel des Dreyecks abc gleich, welcher in Ansehung der Seite ac eben so lieget; so sind die Dreyecke selbst in allen Stücken, welche wir eben erzehlet haben, gleich. Man verstehet aber darunter, wenn man sagt; daß die Winkel in Ansehung der AC auf gewisse Art liegen sollen, nichts anders, als daß sie entweder der AC entgegen gesetzt seyn, wie ABC , oder an derselben dergestalt liegen sollen, daß diese AC eine Seite derselben abgiebt. ABC lieget in Ansehung der AC wie b in Ansehung der ac lieget, und dieses ist auch von den Winkeln BAC , und a , wie auch von C und c richtig.

§. 127. Sehen wir auch hier besondere Arten von Dreyecken an,
 § 2 wie

IV. wie dieses bey dem Satze geschehen, da wir die Dreyecke, in welchen
 Abschnitt. gleiche Winkel von gleichen Seiten beschloffen werden, verglichen, so können wir auf eben die Weise als daselbst IV, 116. geschehen, einige Eigenschaften dieser Dreyecke heraus bringen. Wir stellen uns zuerst zwey Dreyecke vor ABC und abc , in welchen nicht nur die Seiten AC und ac einander gleich sind, wie auch die Winkel $A = a$, und $C = c$, wie wir dieses bis anhero angenommen haben, sondern wir setzen auch, daß die Winkel A und C , wie auch a und c einander gleich sind. Dadurch werden die vier Winkel, A , C , a , c einander alle gleich gesetzt, und man kan auch sagen, es sey $A = c$, und $C = a$. Aus dem erstern nun, nemlich $AC = ac$, und $A = a$, wie auch $C = c$, folget, daß $B = b$, $AB = ab$, und daß die Seite BC der Seite bc gleich sey, weil diese Seiten zwischen den gleichen Winkeln liegen. Aus dem letztern aber $AC = ac$, und $A = c$, $C = a$ folget ausser besagter Gleichheit der Winkel B und b , auch, daß $AB = bc$, und $BC = ab$, weil nunmehr dieses die Seiten sind, welche zwischen den gleichen Winkeln enthalten sind. Es sind demnach jede zwey der vier Seiten AB , BC , ab , bc , einander gleich, wie man sie auch mit einander vergleichen will, und demnach ist auch $AB = BC$. Oder etwas deutlicher, es ist $AB = ab$, als welches zuerst gewiesen worden, aber auch $BC = ab$, folgendes sind die zwey Seiten AB , BC einer dritten Seite ab gleich, welches nicht seyn könnte, wenn nicht AB der BC gleich wäre.

§. 128. Es folget demnach die Gleichheit der Seiten AB und BC in einem jeden Dreyecke, aus der Gleichheit der Winkel, welche an denselben Seiten liegen: denn man kan ein jedes dergleichen Dreyeck eben so mit sich selbst vergleichen, wie wir ABC mit abc verglichen haben, oder man kan sich vorstellen, daß abc ein Abdruck des Dreyecks ABC sey, welcher geblieben, nachdem erstlich ABC auf abc gelegen, und hernach von dannen hinweg in seinen vorigen Ort gebracht worden. Und in der That, da in dem Dreyeck ABC die Winkel A und C gleich zu seyn gesetzt werden, von der Größe aber dieser Winkel die Größe der gegen übergelegenen Seiten AB , und BC lediglich abhänget, nachdem einmal die Seite BC von bestimmter Größe angenommen worden: wie ist es möglich, daß eine dieser Seiten AB , BC größer oder kleiner seyn sollte, als die andere? welche ist die größere und welche ist die kleinere?

§. 129. Es sind demnach alle Dreyecke welche zweyen gleiche
 Win

Winkel haben, gleichschenklige Dreiecke, und die Linie AC, welche zwischen den zwey gleichen Winkeln A und C lieget, ist ihre Grundlinie. Sind aber in einem Dreieck alle drey Winkel einander gleich, so muß dasselbe auch aus lauter gleichen Seiten bestehen, oder es muß gleichseitig seyn. Denn gesetzt, es sey in dem Dreieck FBG der Winkel $F = B$, und $B = G$, woraus denn folget, daß auch F dem G gleich sey, so kan man aus dem erstern $F = B$ schließen, es sey $FG = BG$, aus dem zweyten $B = G$ folget, daß $FB = FG$ und aus dem dritten $F = G$, es sey auch $BG = FB$, welches zwar auch aus dem vorigen erhellet. Denn ist $BG = FG$ und $FG = FB$, so ist auch nothwendig $BG = FB$.

IV.
Wskntz.

F. 61.

Ein Dreieck aus drey gegebenen Seiten zusammen zu setzen.

S. 130. Und also hätten wir die Dreiecke auf einer Seite angesehen, wie sie nemlich aus einem Winkel und zwey Seiten, die den Winkel einschließen, erzeugt werden. Wir gehen weiter und sehen, wie ein Dreieck aus drey gegebenen geraden Linien A, B und C, so seine Seiten abgeben sollen, zusammen zu setzen sey.

F. 66.

S. 131. Aus demjenigen, so bereits gesagt worden, IV, 85. 108. siehet man so gleich, daß dieses nicht mit jeden gegebenen drey Linien angehe. Es müssen jede zwey der gegebenen Seiten größer seyn als die dritte. Das ist, $A + B$ größer als C; $A + C$ größer als B, und $B + C$ größer als A. Oder eine jede Seite, welche man nehmen will, muß kleiner seyn, als die Summe der beyden übrigen, und größer als ihr Unterschied. Diese letztere Einschränkung scheint uns bequemer als die erstere, und wir wollen uns also an dieselbe halten, ob man sich zwar gemeiniglich der erstern bedienet. Sie fließet aus denselben, wie man leicht sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will etwas nachzudenken.

S. 132. Fehlen die drey gegebenen Seiten wieder diese Bedingung nicht, und ist wirklich eine derselben größer als der Unterschied der beyden übrigen, und kleiner als ihre Summe; so kan aus denselben allezeit ein Dreieck zusammen gesetzt werden; und man darf nur auf die nachfolgende Anweisung Acht haben, wenn man sich davon überführen will. Wodrey noch zu erinnern ist, daß die Dreiecke, von welchen die Rede seyn wird, zwar aus den Seiten A, B, C zusammen

IV. *Abchnitt.* sammen gesetzt sind, aber die Ordnung dieser Seiten auf alle mögliche Arten verändert worden, so daß wir bald A, bald B, bald C die erste Seite nennen, und so die zweite und die dritte. Welches in der Anwendung selbst keine Schwierigkeit machen kan.

F. 67.
68.69.
70.

§. 133. Man mache die gerade Linie AB der ersten der gegebenen Seiten gleich, und beschreibe um das Punct A einen Eirkelkreis, dessen Radius der zweiten der gegebenen Seiten gleich sey. Wenn man nun die AB, so oft dieses nöthig ist, zu beyden Seiten bis an diesen Umkreis in C und D verlängert, so ist allezeit $BD = DA + AB$ die Summe der ersten und zweiten Seite; und $CB = AB - AC$ oder $AC - AB$ ist der Unterschied derselben. IV, 92. Man beschreibe um B ebenfalls einen Eirkelkreis, dessen Radius die dritte der gegebenen Seiten sey. Weil nun diese dritte Seite kleiner ist als die Summe der beyden ersteren, das ist kleiner als DB, so schneidet dieser Umkreis die gerade Linie DB bey E innerhalb dem Puncte D, und also fällt ein Theil des um B beschriebenen Umkreises innerhalb den vorigen, welcher um A beschrieben worden. Und weil eben diese dritte Seite, mit welcher der Eirkelkreis um B beschrieben worden, größer ist als der Unterschied der beyden erstern Seiten $AB - AC$, oder $AC - AB$ mit einem Worte BC, so siehet man, daß in allen Fällen ein Punct dieses Umkreises, nemlich F, in welchem derselbe die verlängerte AB nochmals schneidet, ausser den um A beschriebenen Umkreis fallen müsse. Demnach schneiden die beyden Umkreise einander irgendwo, als in G. Man bemerke dieses Punct, und ziehe von demselben die geraden Linien GA, GB nach A und B. Diese werden mit der zuerst angenommenen AB ein Drepeck GAB machen, welches aus den drey gegebenen Seiten A, B, C zusammen gesetzt ist.

§. 134. Die Sache ist leicht einzusehen. Die Seite AB ist selbst die gegebene erste Seite. Die Seite AG aber ist ein Radius des um das Punct A beschriebenen Eirkelkreises, und folgender so groß als AC, welches ein Radius eben dieses Kreises ist. AC aber ist so groß als die zweite der gegebenen Seiten, und demnach auch AG so groß als diese zweite Seite. Und eben so ist es mit der BG welche ein Radius des andern Eirkels ist, welchen man um das Punct B mit dem Radius BE beschrieben, daß also nothwendig BG der dritten der gegebenen Seiten gleich ist, und man hat also wirklich das Drepeck ABG aus den drey Seiten gemacht, welche zu dessen Verrfertigung gegeben worden.

§. 135. Wie

S. 135. Wir haben zu diesem Satz vier Figuren gezeichnet, um die verschiedenen Fälle deutlich vor Augen zu legen, welche bey der Zusammensetzung eines Dreyecks aus seinen Seiten vorkommen können, und welche aus der Grösse der gegebenen Seiten fließen, und aus der Ordnung, in welcher man dieselbe zusammen setzt. Denn AB ist bald die grössste der Seiten, bald eine von den kleinern, und so ist es auch mit den übrigen. Es fällt demnach das Punct E entweder zwischen A und B, oder zwischen A und D. Denn über D kan es niemals hinaus fallen, wie wir gesehen haben, und C fällt wieder entweder zwischen A und B, oder zwischen B und F, und kan niemals weiter als F nach dieser Seite liegen: weil eben dasjenige auf der einen Seite von dem Puncte C richtig seyn muß, was auf der andern von dem Puncte E statt hat. Diese verschiedene Lagen stellen die vier Zeichnungen vor, die zu diesem Satz gehören.

S. 136. Man siehet übrigens leicht, daß wenn einem nur um die Verfertigung des Dreyecks zu thun ist, man eben nicht nöthig habe die Umkreise der Eirkel, welche zu beschreiben angewiesen worden sind, ganz auszumachen. Man siehet das Punct, wo diese Kreise einander schneiden werden, leicht ohngefehr zum voraus, und man darf also nur an statt der ganzen Umkreise, mit eben den Desnungen, mit welchen diese zu beschreiben waren, Bogen machen ohngefehr an die Stelle, wo man glaubet, daß das Punct G hinfallen werde.

S. 137. Auf diese Art nun werden aus jeden drey Seiten Dreyecke beschrieben, und die gleichseitigen oder auch die gleichschenkligten Dreyecke sind davon nicht ausgenommen. Nur braucht man zu einem gleichseitigen Dreyeck nur eine einzige Linie anzugeben, weil, wenn man eine Seite bey einem gleichseitigen Dreyeck hat, dadurch die übrigen alle bekannt werden. IV, 107. Bey einem gleichschenkligten Dreyeck aber darf nur die Grundlinie und einer von den Schenkeln angegeben werden, denn der andere Schenkel ist nothwendig dem gegebenen gleich IV, 106. und wird also mit jenem zugleich bekannt. Es muß aber der gegebene Schenkel grösser seyn als die Helfte der Grundlinie, weil er sonst mit dem andern Schenkel zusammen gesetzt, das ist, zwey mal genommen, eine Summe brächte die kleiner wäre als die Grundlinie, so ohnmöglich statt haben kan. Bloß die Einsicht der Figuren kan im übrigen weisen, wie dergleichen Dreyecke aus ihren Seiten zusammen gesetzt werden, und man thut wohl, wenn man sich in der Zusammensetzung allerhand Dreyecke aus ihren Seiten et-

was

P. 71.

72. 73.

IV. was übet. Denn auffer dem, daß wir hierinnen Fertigkeit haben müssen, so tröget diese Uebung zu dem Verstand desjenigen, was gesagt worden, und noch hiebey zu sagen ist, sehr vieles bey.

F. 67.
68. 69.
70. §. 138. Da nun also aus jeden drey gegebenen Linien, welche die gehörige und zu wiederholten malen angezeigte Größe haben, ein Dreyeck beschrieben wird, und man doch in Zusammensetzung dieser Dreyecke aus ihren gegebenen Seiten auf so verschiedene Art verfahren, und bald diese bald jene der drey gegebenen Linien vor AB, und wieder eine jede von den zwei übrigen vor AG setzen kan, auch die Einzel, durch deren Durchschnitt man das Punct G findet, sich auffer G noch einmal schneiden, IV, 96. so fällt nunmehr die Frage vor, ob die auf diese Art beschriebene Dreyecke alle von einerley Größe sind, oder ob ihre Größen verschieden werden können? wie auch, ob ihre Winkel immer von einerley Größe fallen, oder nicht?

F. 63. §. 139. Die Antwort auf diese Fragen ist: es können zwar die Dreyecke, wenn sie aus einerley Seiten nach der gegebenen Anweisung zusammen gesetzt worden, der Lage nach gar verschieden werden. Eine jede Seite derselben kan auf DE zu liegen kommen, eine jede der übrigen Seiten, kan entweder nach der rechten oder nach der linken sehen, und sie können beyde über oder unter der Linie DE liegen. Dieses alles kan seyn, und diese Verschiedenheit fließet aus demjenigen, welches bey dieser Zusammensetzung willkürlich ist, und so oder anders gemacht werden kan. Aber es ist nicht möglich, daß dergleichen Dreyecke verschiedene Größen haben, noch daß zwischen zwei gleichen Seiten derselben ungleiche Winkel enthalten seyn sollten. Alle Dreyecke als ABC und abc, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzt sind, so nemlich, daß eine Seite des einen AB einer Seite des andern ab gleich ist, und so ferner BC der bc und AC der ac; sind auch ihren Flächen nach einander gleich, und es sind über dieses alle Winkel, welche zwischen gleichen Seiten liegen, von einerley Größe, und demnach ist der Winkel A dem Winkel a gleich, der Winkel B dem Winkel b, und C dem c.

F. 74. §. 140. Wer bloß dem natürlichen Verstande folgen will, ohne dasjenige, so nunmehr von den Linien, Winkeln und Dreyecken bekannt seyn muß, zum Grund zu legen, kan dieses auf nachfolgende Weise einsehen. Man stelle sich vor, daß die geraden Linien AB und DC dergestalt an die dritte gerade Linie BC befestiget sind, daß sie sich um die Puncte B, C, drehen lassen, wodurch die Winkel bey B und

und C grösser oder kleiner werden können, wie wir eben dieses bereits IV. oben IV, 108. fast in eben der Absicht vorgestellt haben. Diese Linien AB und CD müssen die Länge haben, welche erfordert wird, daß aus denselben ein Dreypck zusammen gesetzt werden könne, weiter ist nichts nöthig. Nun stelle man sich vor, daß die zwo Linien AB und CD so gesetzt seyn, wie die Figur weiset, daß nemlich das Ende der einen AB die andere CD berühre, so hat man ein Dreypck ABC. Man kan, indem man den Winkel bey B nach und nach vergrößert, das äußerste Punct A der Linie BA in der Linie CD fortführen, und auf die Art das Dreypck ABC verändern, aber es wird der Winkel B, mit der ihm entgegen gesetzten Seite AC, zugleich verändert, und weder der Winkel B kan vergrößert oder vermindert werden, wenn man die Seite AC behalten will, wie sie ist, noch kan die Seite AC grösser oder kleiner werden, wenn man nicht zugleich den Winkel bey B ändert. Behält man demnach die Seite AC von der Grösse, welche sie hat, und lästet auch die übrigen Seiten BC und AB unverändert, so muß auch der Winkel B bleiben wie er ist, und können demnach aus den drey Seiten BC, AB und AC, nicht andere und andere Dreypcke, mit verschiedenen Winkeln, gemacht werden, denn was hier von einer Seite gesagt worden ist, lästet sich von den übrigen allen sagen.

S. 141. Um aber die Sache in ein vollkommenes Licht zu sehen, and überhaupt zu zeigen, daß jede Dreypcke als ABC, abc, welche von gleichen Seiten beschloffen werden, einander gleich sind, und daß ihre Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen, ohnmöglich von verschiedener Grösse seyn können, so bringe man in Gedanken die Seite bc dergestalt an die Seite BC, daß die äußersten Puncte b und c dieser letzten Linie mit den äußersten Puncten der ersten B und C zusammen fallen, welches geschehen kan, weil diese Seiten bc und BC einander gleich sind. Man mache aber, daß auch die beyden gleichen Linien BA und ba von eben dem Punct B anfangen: und daß demnach auch CA und ca in dem Puncte C zusammen stoßen. Uebrigens wende man das Dreypck abc dergestalt, daß die Spitze desselben a unter die Seite BC zu liegen komme, wenn A über derselben lieget. Mit einem Wort, man füge die beyden Dreypcke dergestalt an einander wie in der 75 und 76 Figur die Dreypcke ABC und BCD an einander gefüget sind, bey welchen man sich vorzustellen hat, daß das Dreypck BCD das Dreypck bca sey, welches

F. 63.

F. 75.
76.

D h

des

IV. - *Setzt man dergestalt an ABC gefüget, daß $BD = ba = BA$, und CD Abschnitt. $= ca = CA$, und ziehe von A nach D die gerade Linie AD.*

§. 142. Man bekommt dadurch zwey gleichschenkligte Dreyecke; deren Grundlinien an einander gesetzt sind, nemlich ABD und ACD. Denn wir haben gesetzt, daß die geraden Linien BA, BD, wie auch CA, CD einander gleich seyn. Es ist aber sichtlich, daß die erstern zwey, die Seiten des Dreyecks ABD, und die zwey letztern die Seiten des Dreyecks ACB abgeben. Diese Dreyecke sind demnach gleichschenkligt. Und es sind in einem jeden dieser gleichschenkligten Dreyecke die Winkel, so an der Grundlinie desselben liegen, einander gleich. Das ist, in dem Dreyecke ABD ist der Winkel BAD dem Winkel BDA, und in dem Dreyeck ACD; der Winkel DAC, dem Winkel ADC gleich. IV, 113. Setzt man nun beyderseits diese gleiche Winkel in der 75 Figur zusammen, oder ziehet in der 76 Figur die Kleinern von dem größern ab, so müssen auch die Summen oder die Unterschiede derselben gleich seyn. Man siehet leicht, daß in der 75 Figur die Winkel BAC, BDC diese Summen, und in der 76, die Winkel BAC, BDC diese Unterschiede sind. Und es sind also diese Winkel einander gleich. Ist aber dieses, so sind auch die Dreyecke BAC und BDC einander gleich, und ihre übrigen Winkel bey B und C. Denn es sind ausser diesen Winkeln BAC und BDC auch die Seiten gleich, die sie einschlessen, BA nemlich der BD, und AC der DC, und es ist IV, 112. gezeigt worden, daß alle Dreyecke, in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich sind, und daß ihre übrigen Winkel, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden, ebenfalls keine verschiedene Grösse haben. Es ist demnach der Winkel ABC gleich dem Winkel DBC, der Winkel ACB dem Winkel DCB, und weil wir vorher gesehen, daß auch der Winkel BAC dem Winkel BDC, und das Dreyeck BAC, dem Dreyeck BDC gleich sey: so ist ohnstreitig von den zwey Dreyecken deren Seiten einander, auf die Art, die zum öftern deutlich bestimmt worden, gleich sind, dasjenige richtig, welches wir von ihnen angegeben und erweisen sollten.

§. 143. Wolte man das Dreyeck BDC umwenden, daß es ebenfalls oben auf die Linie BC zu stehen käme, so würde es ganz und gar auf das Dreyeck BAC fallen. Denn weil der Winkel DBC dem Winkel CBA gleich ist, so kan BD nicht anders als auf BA fallen, weil wenn BD nicht auf BA fiel, diese Winkel nicht gleich seyn würden.

den. Aus eben dem Grunde erhellet, daß durch dieses Umwenden des Dreyecks BCD auch die Seite CD auf die Seite CA gebracht werde: denn es sind die Winkel BCD, BCA einander ebenfalls gleich. Und es folgt demnach, daß es nicht möglich sey, auf eine gerade Linie BC zwey verschiedene Dreyecke ABC und aBC dergestalt zu setzen, daß $Ba = BA$, und $AC = aC$, weil dergleichen Dreyecke in eins zusammen fallen, und nicht verschieden seyn würden. Und so viel von dieser Zusammensetzung der Dreyecke, aus ihren drey Seiten.

IV.
Abschnitt.

F. 77.

Verschiedene Aufgaben von gleichen Linien und Winkeln.

§. 144. Der Nutzen dieser Betrachtungen erstrecket sich sehr weit. Wir haben nunmehr verschiedene gewisse Kennzeichen, aus welchen wir von der Gleichheit der Winkel urtheilen können, und sichere Gründe einen Winkel einem andern gleich zu machen. Wir wollen von diesen letztern anfangen. Es sey ein Winkel ABC, und es sey eine andere gerade Linie gegeben DE, an welche man einen Winkel setzen sol, so groß als ABC, so zwar, daß die Spitze desselben an das Punct F falle, welches in der geraden Linie DE gegeben seyn mag, wo man wil. So verfertige man nach der IV, 98. gegebenen Anweisung, aus ABC ein Dreyeck, indem man die Seiten BA und BC nach Belieben annimmt. Wil man, so kan man AB der BC gleich machen, aber es ist dieses nicht nothwendig. Man darf nur zwey nach Belieben in BA und BC angenommene Puncte A und C zusammen ziehen, so ist geschehen, was zur Vorbereitung erfordert worden. Nachdem man also den Winkel bey B, welchen man abtragen sol, in ein Dreyeck ABC gebracht, so mache man auf FE ein anders Dreyeck aus den drey Seiten des Dreyecks ABC, welche vor Augen liegen, und dahin gesetzt werden können wo man wil. Es ist IV, 133. angewiesen worden, wie dieses zu verrichten, und wir haben uns dabey nicht aufzuhalten. Zur Erläuterung ist genug, daß wir sagen, es sey FE der BC, FG der BA, und EG der CA gleich zu machen. Ist dieses geschehen, so stehet bey F der Winkel GFE, welcher dem Winkel ABC gleich ist, wie erfordert worden.

F. 78.

§. 145. Nichts ist leichter als dieses einzusehen. Man hat die Seiten des Dreyecks GFE den Seiten des Dreyecks ABC gleich gemacht. Wir wissen, daß bey allen Dreyecken die aus gleichen

IV. Seiten zusammen gesetzt sind, auch die Winkel gleich sind, welche zwischen dergleichen Seiten liegen. IV, 129. Eben dieses muß demnach auch bey unsern Dreyecken ABC , GFE eintreffen. Alle Winkel derselben die zwischen gleichen Seiten liegen, müssen einander gleich seyn. Nun ist aus dem, was gemacht worden, klar, daß die Winkel ABC und GFE zwischen gleichen Seiten liegen. Denn es ist FG der AB , und FE der BC gleich gemacht worden. Diese Winkel also ABC und GFE sind einander gleich.

S. 146. Es ist hiebey wenig anzumerken, und dieses sind Kleinigkeiten. In der Ausübung darf die gerade Linie EA nicht einmal ausgezogen werden, sondern es ist genug ihre äußerste Punkte A und C zu bemerken. Man kan sie eben so wohl mit dem Circel fassen und in EG übertragen, wenn nur diese Punkte bezeichnet sind, als wenn sie ganz ausgezogen wäre. So ist es auch mit der Linie EG . Sobald die Linie FG gezogen ist, hat man der Aufgabe ein Genüge gethan, und es ist weiter nichts zu thun übrig, also kan diese Linie EG allzeit ungezogen bleiben. Man kan aber GF ziehen, so bald das Punct G durch den Schnitt zweyer Bogen gefunden worden, wie bekannt ist. Diesen Schnitt zu machen, braucht man $EG = CA$, weiter aber zu gar nichts. Nimmet man aber BA der BC gleich, so hat man diesen Vortheil, daß man mit einer Oefnung des Circels so gleich zwey Seiten, nemlich BA und BC übertragen kan.

S. 147. Es können auch noch andere Aufgaben vorgelegt werden, bey welchen allen es dahinaus kommet, daß ein Winkel dem andern gleich gemacht werden sol, ob zwar verschiedene andere Umstände damit verknüpft sind, und diese alle löset man durch eben die Gründe auf, welche wir bisher gesehen, als welche am leichtesten und geschwindesten zu dem Zweck führen. Dergleichen ist, wenn aufgegeben wird, einen Winkel in zwey gleiche Winkel zu theilen, das ist, zwey Winkel zu machen, die einander gleich sind, und welche zusammen gesetzt einen Winkel von gegebener Größe ausmachen. Wenn man die Figuren, welche ohnlängst betrachtet worden sind, wieder nachsiehet, so wird man unter denselben eine finden, in welcher ein Winkel, so wie hier erfordert wird, getheilet worden, nemlich diejenigen aus deren Betrachtung wir erwiesen, daß zwey Dreyecke, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzt worden, auch im übrigen nicht verschieden seyn. Denn weil in denselben die Winkel ABC und CBD ein-

einander gleich sind, so ist allerdings ein jeder derselben die Hälfte IV. des Winkels ABD , und dieser Winkel wird durch die Linie BC in $Winkeln$ zwey gleiche Winkel geschnitten.

§. 148. Man darf demnach nur eine dergleichen Zeichnung machen, als diejenige ist, welche diese Figuren vorstellet, wenn man einen jeden gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile theilen will, aber anfangen. Es sey der Winkel, welcher zu nehm von seinen Seiten BE , BF , zwey gleich aus B anfängt. Diese sind hier BA und getade Linie vor, zwischen den äußersten $nd D$, oder man sehe, wie hier geschehen, die $).$ Man setze so dann auf diese Linie AD ect , zu welchen man die Schenkel von bes an. Dieses ist ACD . Die gerade Linie $Spitzen$ der zwey gleichschenkelichten Dreys $ogen$ ist, theilt den Winkel ABD oder ile .

F. 79.
80.

njenigen, so übereit gesagt worden, nichts der überführen könnte, daß die Auflösung selbe ein Winkel jederzeit genau in zwey die Seite AB des Dreys ABC ist der BC gleich genommen worden, und AC en Dreysen gemeinschaftlich. Es sind nen Dreys ABC , den drey Seiten des folgenden sind auch die Winkel derselben bey die Hälfte des Winkels ABD oder EBF , nach durch BC in zwey gleiche Theile theilt es ist, was man zum Beweis sagen muß, i vorübergehenden einfließen lassen.

§. 150. Uebrigens ist klar, daß in der Ausübung, wenn der Winkel EBF in zwey gleiche Theile zu theilen bereits erinnert worden, zu ziehen CD . Man braucht nichts als C , d Dreys ADC , damit man die Linien derselben ziehen könne. Diese $Spitzen$ zweyer Bogen gleich im Anfang, vörsten gezogen werden. Und nachd

weder die Linie AD noch auch AC und B gleichschenkelichten gesucht wird, nach n durch den Schnitt $Seiten$ AC und CD hat, ist ganz und gar

IV. gar unnöthig diese Linien erst hernach zu ziehen. Im übrigen ist fast
 Abschnitt nicht nöthig zu erinnern, daß nur eine einzige gerade Linie BC seyn könne,
 welche einen gegebenen Winkel EBF in zwey gleiche Theile
 schneidet.

S. 151. Sonst ist in den bisher gebrauchten Beweisen der Lehrsatz
 enthalten, daß, wenn man auf eine gerade Linie AD zwey gleich-
 schenklichte Dreyecke ABD und ACD setzt, und durch deren Spi-
 zen die gerade Linie BC zieht, welche man nach Belieben in G ver-
 längern kan, diese gerade Linie BC die Winkel an den Spitzen der
 gleichschenklichten Dreyecke ABD und ACD in zwey gleiche Winkel
 theilen werde. Es ist dieser Satz aus dem erwähnten Beweis IV, 149.
 genugsam klar: und solte jemand bey den Winkeln der 80 Figur ACG
 und GCD anstoßen, und nicht gleich einsehen können, daß auch die-
 se gleich sind, so müste er sich erinnern, daß aus der Gleichheit der
 Dreyecke ABC und DBC folge, daß der Winkel ACB dem Wink-
 el DCB gleich sey. Ist aber dieses, so müssen auch die Winkel ACG
 und DCG gleich seyn, weil sie mit den vorigen ACB und DCB glei-
 che Summen, nemlich zwey rechte Winkel ausmachen. IV, 62.

S. 152. Wir können diese Figuren noch nicht verlassen. Eine wei-
 tere Betrachtung derselben zeigt uns, daß die gerade Linie BC, wel-
 che wir gezogen um den Winkel ABD in zwey gleiche Theile zu thei-
 len, auch die Linie AD in zwey gleiche Theile schneide, in dem Punct,
 welches wir mit G bezeichnen, oder daß AG der GD gleich sey, und
 daß BG noch über dieses auf AD perpendicular stehe. Denn dar-
 aus, daß die Seite AB der Seite BD gleich ist, so wir gleich An-
 fangs mit Fleiß angenommen, und daß ferner der Winkel ABG dem
 Winkel GBD gleich ist, welches IV, 149. erwiesen worden, sehen
 wir ein, daß in den Dreyecken ABG und DBG auch die übrigen Sei-
 ten gleich sind, und die übrigen Winkel, welche zwischen den gleichen
 Seiten liegen. Denn die Seite BG ist den beyden Dreyecken ABG
 und GBD gemeinschaftlich, und werden also allerdings in diesen
 Dreyecken gleiche Winkel ABG und DBG von gleichen Seiten ein-
 geschlossen, der erstere Winkel, nemlich von den Seiten AB und BG,
 und der zweyte von den Seiten BD und BG. Es ist demnach die
 Seite AG der Seite GD gleich, und der Winkel AGB dem Wink-
 el DGB. IV, 112. Denn daß auch der Winkel BAG dem Winkel
 BDG gleich sey, dürfen wir nicht jetzt erst schließen, weil bereits
 IV, 117. gezeigt worden, daß in einem gleichschenklichten Dreyeck,
 der

dergleichen ABD ist, die Winkel an der Grundlinie AD, einander gleich sind. Sind aber die Winkel BGA und BGD einander gleich, so fällt die gerade Linie BG auf AD dergestalt, daß sie mit derselben bey G zwey gleiche Winkel einschließet, und ist demnach, dem Begriff gemäß, den wir von einer Perpendicularlinie IV, 52. beygebracht haben, diese BG allerdings auf die AD perpendicular.

§. 153. Es werden demnach jederzeit diese Dinge zugleich verrichtet: die gerade Linie BG auf AD dergestalt, daß sie mit derselben bey G zwey gleiche Winkel einschließet, und ist demnach, dem Begriff gemäß, den wir von einer Perpendicularlinie IV, 52. beygebracht haben, diese BG allerdings auf die AD perpendicular.

Es werden demnach jederzeit diese Dinge zugleich verrichtet: die gerade Linie BG auf AD dergestalt, daß sie mit derselben bey G zwey gleiche Winkel einschließet, und ist demnach, dem Begriff gemäß, den wir von einer Perpendicularlinie IV, 52. beygebracht haben, diese BG allerdings auf die AD perpendicular.

pendicular ziehen; eine Linie durch die Spitze eben des Winkels ABD ziehen, welche die Grundlinie AD in zwey gleiche Theile theilet, ist eine Arbeit, und eben die Linie BG welche das eine thut, thut auch das übrige beydes.

§. 155. Wir wollen dieses noch zu allem Ueberfluß etwas umständlicher zeigen. Wenn man zuerst sehet, daß in dem gleichschenkelichten Dreieck ABD die Linie BG den Winkel ABD, welcher der Grundlinie entgegen steht, in zwey gleiche Theile theilet, so haben wir schon IV, 52. gezeigt, daß aus der Gleichheit der Winkel ABG und GBD, und der geraden Linien, welche sie einschließen $AB = BD$, und

IV. und $BG = BG$, folge, daß $AG = GD$, so wohl die Seiten AG, GD als auch die beiden Winkel bey G gleich seyn, und daß demnach BG auf AD perpendicular stehe.

§. 136. Setzet man aber BG sey dergestalt gezogen, daß sie die AD in zwey gleiche Theile theilet, $AG = GD$, so sind in den Dreyecken BAG und BGD , alle Seiten einander gleich, nemlich $AG = GD$, welches gesetzt wird, $BA = BD$, weil das Dreyeck ABD gleichschentlicht ist, und $BG = BG$. Demnach sind auch die Winkel ABG und GBD gleich, wie auch die beiden bey G , IV, 139. und es theilet demnach eben die BG , welche die Grund-Linie des gleichschentlichten Dreyecks ABD in zwey gleiche Theile theilet, auch den Winkel ABD in zwey solche theile, und stehet auf der Grund-Linie AD perpendicular. Nimmet man an, daß der Winkel BAD dem Winkel BDA gleich sey, wie dieses allezeit richtig ist, wenn $BA = BD$, und setzet ferner $AG = GD$, so kan man eben dieses auch aus einem andern Satze IV, 112. schließen.

§. 137. Und wenn man endlich annimmt, daß die BG auf der AD perpendicular stehe, so ist der Winkel BGA gleich dem Winkel BGD , denn sie sind beyde gerade Winkel; da nun über dieses die Winkel BAG und BDG in dem gleichschentlichten Dreyeck ABD eben so wohl, als die Seiten AB, BD gleich sind, so ist eine Seite des Dreyecks BAG , nemlich die AB gleich einer Seite des Dreyecks BDG , nemlich der BD , und zweyen Winkel des erstern Dreyecks, BAG und AGB sind gleich zweyen Winkeln des zweyten Dreyecks BDG, DGB , und diese Winkel liegen in den beiden Dreyecken in Ansehung der gleichen Seiten BA und BD auf einerley Art. Demnach sind auch IV, 126. die übrigen Winkel dieser Dreyecke einander gleich $ABG = GBD$, und die übrigen Seiten $AG = GD$. Es schneidet also die Linie BG , die aus der Spitze des gleichschentlichten Dreyecks ABD auf die Grund-Linie desselben AD perpendicular fällt, diese AD so wohl als den Winkel ABD in zwey gleiche Theile.

§. 138. Es ist leicht einzusehen, daß eben diese Linie BG auch das Dreyeck ABD in zwey gleiche Dreyecke ABG und GBD theile. Dieses ist ein Schluß, welcher aus allen Vorweisen, die wir eben gegeben, folget; und wenn man demnach in einem gleichschentlichten Dreyeck den Winkel ABD in zwey gleiche Theile theilet, oder aus B auf AD die Linie BG perpendicular, oder durch B auf die Mitte der

der AD eine gerade Linie BG ziehet: so wird jederzeit das gleichschenklige Dreyeck ABD in zwey gleiche Dreyecke zerschnitten.

IV.
Abschnitt.

S. 159. Da wir nun also die gerade Linie zu ziehen wissen, welche einen gegebenen Winkel in zwey gleiche Theile theilet, so wissen wir auch auf eine gerade Linie AD eine Perpendicular-Linie BG durch ein jedes gegebenes Punct zu ziehen, und dieselbe AD in zwey gleiche Theile zu theilen. Alles dieses verrichtet einerley Zeichnung, nur muß man dieselben, nachdem dieses oder jenes bey denselben als bekannt voraus gesetzt wird, anders und anders zu verfertigen anfangen.

S. 160. Es sey erstlich eine gerade Linie AD in zwey gleiche Theile zu theilen. Wir sehen diese als die Grund-Linie eines gleichschenkligen Dreyecks an, und setzen ein dergleichen Dreyeck von beliebigen Schenkeln drauf. Dieses ist ABD. So dann setzen wir auf eben diese AC noch ein anders dergleichen Dreyeck ACD, und ziehen BC, welche, wenn sie verlängert wird, so oft als dieses nöthig ist, die gegebene Linie AC in G in zwey gleiche Theile schneiden wird.

F. 21.

S. 161. Man sieht hier wieder, daß an der eigentlichen Länge der Seiten AB, BC, AC, und CD nichts gelegen sey, und daß die selben nicht das geringste zur Linie BC beitragen. So bald die Spitzen der gleichschenkligen Dreyecke ABD, und ACD gefunden sind, welche die Durchschnitte zweyer Bogen geben, so hat man alles, so erfordert wird, die Linie BC zu ziehen, welche die AD, wie erfordert worden, in zwey gleiche Theile schneidet. Warum wolte man sich also mit der Ziehung unnöthiger Linien vergebliche Mühe machen, wenn man sonst nichts suchet, als eine Linie, wie aufgegeben worden ist, zu schneiden.

S. 162. Das Punct C ist bloß gefunden, damit die Linie BC, welche nothwendig durch B gehet, ihre richtige Lage bekomme. Diese aber hat sie, wenn sie auf die AD perpendicular steht IV, 157. Kan man demnach auf eine andere Art, zum Exempel, in der Ausübung, vermittelst eines Winkelhackens durch B auf AD eine Perpendicular-Linie ziehen, so braucht man das Punct C gar nicht, und man kan die Arbeit, dasselbe zu suchen, ersparen. Denn eben diese Perpendicular-Linie verrichtet, wie bekannt ist, die verlangte Theilung.

S. 163. Es sey zum zweyten auf eine gerade Linie IK eine Perpendicular-Linie zu ziehen, welche durch ein Punct G, so in denselben

F. 22.

3i

nach

IV. nach Belieben gegeben worden, hindurch gehe. Damit wir die Zeichnung hier so anfangen, daß wir wiederum auf unsere Haupt-Figur oder eine andere, so aus derselben geflossen ist, hinaus kommen, so setzen wir von G nach beiden Seiten zwei gerade Linien, GA, GD von beliebiger, aber gleicher Länge, beschreiben so dann auf AD ein gleichschenklisches Dreieck ABD. So bald dieses geschehen, sehen wir, daß wir weiter nichts zu thun haben, als die gerade Linie BG aus der Spitze dieses Dreiecks auf das Punct G der geraden Linie AD zu ziehen. Diese ist auf AD und folgendes auf IK perpendicular, weil sie die Grund-Linie AD des gleichschenklischen Dreiecks ABD in zwei gleiche Theile theilet IV, 156. Aber auch hier können in der Ausübung die geraden Linien AB, BD, welche die Seiten sind des gleichschenklischen Dreiecks ABD, wegb bleiben.

Man man die IG und GK als zwei gerade Linien ansetzen einen Winkel einschließen, der zweien geraden wie denn alle gerade Linien auf dieser Seite angenommen IV, 58, so heißt die Perpendicular-Linie GB zieht als diesen eingebildeten Winkel GK in zwei gleiche und in der That kommt auch gegenwärtige Zeichnung überein, welche oben IV, 148. angegeben worden zwei gleiche Theile zu theilen, wie man am besten man man diese zwei Aufgaben mit einander auflöst, man zusammen hält.

S. 165. Hat man auf diese Art, oder sonst wie man will, eine Perpendicular-Linie auf eine andere vorgegebene Linie gezogen, wie hier BG auf IK perpendicular steht, und man nimmt in dieser Perpendicular-Linie ein Punct als B an, wo man will, und in der geraden Linie IK zwei andere Puncte A und D, welche von G gleich weit entfernt sind, und zieht so dann die geraden Linien BA, BD, so müssen diese nothwendig gleich seyn. Dieses ist selbst aus dem einzusehen was oben IV, 164. gesagt worden: oder auch daraus, weil, indem alles zu beiden Seiten auf einerley Art angenommen worden, nichts vorhanden ist, welches machen könnte, daß eine der beiden geraden Linien BA, BD größer wäre als die andern. Am deutlichsten aber wird alles wenn wir so schließen. In den beiden Dreiecken BGA, BGD, sind die Winkel BGA, BGD gleich, weil BG auf der IK perpendicular steht, und die Winkel, welche Perpendicular-Linien einschließen, alle gleich

gleich sind. Diese gleiche Winkel werden beiderseits von gleichen IV. Seiten eingeschlossen, weil AG der GD gleich angenommen worden, ~~Wischmuth~~ BG aber sich selbst nothwendig gleich ist. Demnach müssen auch IV, 112. die dritten Seiten BA , BD einander gleich seyn.

§. 166. Will man dieses etwas anders ausdrücken, so kan man auch sagen, daß wenn man in der geraden Linie IK zwey Punkte, A und D nimmt, welche von G gleich weit entfernt sind, so ist auch ein jedes Punkt B der Perpendicular-Linie auf IK , die durch G gehet, wo man dasselbe Punkt auch annehmen wil, von den Punkten A und D gleich weit entfernt. Denn die Entfernungen des Punkts B von A und D sind die geraden Linien BA und BD , von welchen eben erwiesen worden ist, daß sie gleich sind.

§. 167. Nun kommen wir auf die dritte Anwendung unserer Figur, indem wir zeigen wollen, andere perpendicular zu ziehen der ersten geraden Linie lieget. Punkt außer derselben B , das welche auf der IK perpendicular

F. 83. 84.

anfa
nie A
Pun
hier I
Kreis.
ses C
men,
Kreis
schnt
D, ur
Mess
ABE

1, daß i
1 müssen
figur ab
geraden
durch I
gerade E
denn n
n müssen
n Punct
zen. W
welche g
nd, so t

§. 169. Man kan sich an diesem begnügen lassen, wenn man AD mit Versekung des Cirkels in zwey gleiche Theile schneiden wil, indem man nemlich so lange probiret, bis man die Helfte richtig gefunden. Denn wenn G die Linie AD in zwey gleiche Theile theilet, so ist wie IV, 156. bekannt, BG nothwendig auf AD oder IK perpendicular; man

IV. Man aber diese BG durch das gegebene Punct B und durch das also ge-
 fundene G ziehen. Eben so wäre es wenn man, auf was Art es auch
 seyn möchte, den Winkel ABD theilte; die gerade Linie BG, welche
 ABG dem GBD gleich machet, ist ebenfalls die Perpendicular-Linie,
 die durch B auf AD kan gezogen werden, IV, 155.

§. 170. Wil man aber keines von beiden annehmen, so muß
 man nothwendig auf die AD noch ein gleichschenklighes Dreieck
 ADC setzen, dessen Spitze C, wie sonst jederzeit bey dieser Zeichnung
 beobachtet worden, ausser B fällt: Ist dieses geschehen, so kan durch
 die beiden Spitzen B und C die Perpendicular-Linie BGC oder BCG
 gezogen werden. Aber auch hier sind die geraden Linien AB, BD,
 ferner AC, und CD in der Ausübung unnütze, wie nunmehr ohne
 vieles Erinnern bekannt seyn muß.

§. 171. Diese letztere Zusammensetzung der Linien ist diejenige,
 welche man annehmen muß, um geometrisch zu verfahren. Es sind
 zu dem Ende keine Versuche erlaubt, da man nemlich erstlich dem bloß-
 en Augenmas folget, und dadurch dasjenige obngefehr bestimmt, so
 man sucht, so dann nachmisst, ob man es richtig getroffen, und
 wenn dieses nicht geschehen ist, die begangenen Fehler auf eben die Art
 verbessert. Auch darf man sich zu dem Ende keiner Instrumente aus-
 ser dem Cirkel und Linial, bey irgend einer Zeichnung, bedienen. Man
 kan zum Exempel eine gegebene gerade Linie dem Augenmas nach in
 zwey gleiche Theile theilen, und wenn dieses geschehen, nachmessen, ob
 diese Theile gleich sind, wodurch man zugleich siehet, ob man viel oder
 wenig gefehlet, wenn sich, wie meistens geschieht, Fehler ereignet
 haben. Man hat auch Instrumente, vermittelst welcher leicht die
 Helfte einer jeden geraden Linie zu schaffen ist, und man könnte dersel-
 ben ohne Mühe mehrere von verschiedenen Arten ausdenken. Wer
 wil demjenigen, welcher bloß einiges Ruhens wegen, eine Linie in zwey
 gleiche Helften theilen wil, wehren, daß er sich derjenigen Weise bedie-
 ne zu seinem Zweck zu gelangen, welche ihm am allerbequemsten schei-
 net; aber in der Geometrie ist es nicht eines, ob man es so oder so
 mache. Der Zweck dieser Wissenschaft ist, daß wir einsehen, wie
 die Größen, welche wir in derselben betrachten, von einander abhän-
 gen, um so bald eine oder die andere bekannt ist, auf die übrigen alle
 schließen zu können, welche mit derselben verknüpft sind. Darzu kön-
 nen uns dergleichen Versuche nicht helfen. Ich werde niemals ein-
 sehen,

sehen, daß eben die gerade Linie, welche von der Spitze eines gleichseitigen Dreiecks auf seine Grundlinie perpendicular fällt, und die den Winkel, welcher der Grundlinie entgegen gesetzt ist, in zwey gleiche Theile theilt, auch die Grundlinie in zwey gleiche Theile theilt, und daß diese drey Dinge beständig verknüpft sind, und vermittelst einer einzigen geraden Linie geschehen, wenn ich mich um keine andere Theilung der geraden Linie, als die dreystrummente geschieht, bekümmert habe. D

Grund von allen Instrumenten, so zu einer brennend erfunden werden, und setzt uns im Grund und sie mit Verstand zu gebrauchen. Diese nicht erhalten, wenn sie gleich Anfangs diese und zum Grund unserer Erkenntniß in diesen

IV.

Abbild.

S. 173. Es sey also die Linie AB gegeben, mit welcher man durch das ebenfalls angegebene Punct C, eine andere gerade Linie parallel ziehen soll: so ziehe man durch C nach Belieben eine Linie auf AB, welche mit derselben einen Winkel bey D machet, der so groß oder so klein seyn kan, als man will, setze so dann an die Linie CD, und an das Punct derselben C einen Winkel, welcher dem bey D gleich und demselben entgegen gesetzt sey. Dieses ist so zu verstehen. Da der Winkel CDB nach B sieht, so setze man an C einen Winkel $\angle ECD = \angle CDB$, welcher seine Oefnung nach A richtet. Die Linie EC, welche man nach Belieben bis in F verlängern kan, wird der gegebenen Linie AB parallel seyn.

F. 85.

IV. §. 174. Man mag übrigens den Winkel ECD dem Winkel CDB gleich machen, nach welcher Anweisung man will, es ist nichts ist. Man kan sich zu dem Ende vorgeschrieben worden ist; man id sich auf andere Sätze gründen, oder hernach werden angebracht wie vorher die Linie CD nach B in zwei gleiche Theile schneiden, Linie nach Belieben legen, welche Linie AB endiget. Hat man die Theil dieser Linie GI , dem Theil der die zwei Punkte I und C eine AB parallel seyn wird. Denn id die Winkel DGH , IGC nothwendig, indem die zwei geraden Linien IV , 70. Es sind aber auch die in den beyden Dreyecken einschließend, und GI der GH , denn man macht, also müssen auch die Winkel IV , 112. welche man gleich machen die verlangte Parallellinie würde.

F. 87. §. 175. Man kan sich aber auch, dieser Aufgabe ein Genüge zu thun, und durch ein gegebenes Punct C , einer gegebenen geraden Linie eine andere parallel zu ziehen des äußern Winkels bedienen, welcher mit dem innern nach einer Seite zusehet, und jenen diesem gleich machen. Die gegebene gerade Linie ist wieder AB , das Punct C . Man ziehet durch C eine gerade Linie wie man will, welche die AB erreiche, verlängert sie aber hier über C hinaus. Diese ist GD . Man setzet so dann an C und an die Seite CG einen Winkel, welcher dem Winkel CDB gleich ist, die Linie CF welche denselben von der andern Seite einschließet, ist die gesuchte Parallellinie, und kan in E nach Belieben verlängert werden. Wir haben IV , 77. gezeigt, daß aus der Gleichheit dieser Winkel GCF und GDB , folge, daß die geraden Linien EF und AB parallel seyn. Daß aber EF durch das gegebene Punct C gehe, ist, wenn man der gegebenen Anweisung folget nothwendig, und wir haben also nichts zum Beweis der Richtigkeit dieser Anweisung hinzu zu fügen.

F. 88.

§. 176. Wenn man bey der erstern Art IV , 173. einer Linie AB durch

durch ein gegebenes Punct C eine andere parallel zu ziehen, die schiefe Linie CA aus Ende der gegebenen Linie AB ziehet, und hernach um den Winkel CAB, wie IV, 144. erfordert wird, abzutragen, durch Ziehung der Linie CB das Dreieck CAB schliesset, und auf CA aus den Seiten AB und CB ein Dreieck ADC machet, damit der Winkel DCA dem Winkel CAB gleich werde: so bekommt man

IV.

Abchnitt

parallel ist, nur daß man sich in Acht nehmen muß, daß man alle Seiten von gehöriger Größe mache.

§. 178. Indem das Punct C zusamt der Linie so kan man die Seite CB gleich im Anfange ziehen, die Seiten AB und CB zusamt dem Winkel den sie ei bekannt. Es wird demnach das Parallelogramm wenn zwei Seiten desselben, die einen Winkel einschliessen, gegeben sind, zusamt diesem Winkel. Man machet aus den gegebenen Seiten AB, CB, und dem gegebenen Winkel ABC das Dreieck ABC aus, und setzet auf die Seite CA, welche dem gegebenen Winkel entgegen gesetzt ist, ein Dreieck ACD, aus den zwei Seiten $CD = AB$ und $AD = CB$, so nemlich, daß eine jede Seite dieses neuen Dreiecks ACD, derjenigen Seiten des vorigen ABC gegen über zu stehen komme, welcher sie gleich ist. Man siehet auch leicht ein, insonderheit wenn man ein oder anderes solches Dreieck wirklich selbst verfertigt,

IV. ... tigt, daß es eben nicht nöthig sey, die gerade Linie CA zu ziehen, weil man leicht auf die bloß eingezeichnete Linie CA das Dreieck ACD, wie erfordert wird, sehen kan.

§. 179. Eben so siehet man, daß man aus einem jeden Dreiecke, ziehen könne, von weil die drey Seiten ABC gleich sind, gleich, IV, 139. und 6 ABCD.

der entgegen gesetzte man man sehe, daß Seite AC entweder man wird aus der C, ACD schliessen leich seyn, woraus parallel sind. Und it, daß die Winkel le Seiten AD und jeden Viereck des eben diese Seiten

§. 181. Dieses ist dasjenige, so bey den Parallelogrammen so gleich aus demjenigen geflossen, so wir von den Parallellinien eingefehen, und wir mußten diese Dinge hier betrachten, damit wir allen Nutzen von unserer Figur zögen, welchen sie uns geben konte. An einem andern Ort, würden diese Dinge einen weitläuftigern Beweis erfordert haben.

§. 182. Wir können nun fortfahren, uns die übrige Eigenschaften der Parallellinien vorzustellen. Man siehet leicht, daß dergleichen Linien, beständig in einerley Entfernung von einander bleiben, oder daß sie nicht nur nicht zusammen lauffen, man mag sie verlängern wie man will, sondern daß sie auch einander nicht einmal näher kommen. Der bloße Begriff der geraden Linie kan uns hierauf bringen. Gerade Linien gehen beständig auf einerley Art fort. Nähern sie sich also einander in ihrem Anfang, so nähern sie sich einander auch im Fortgang immer fort. Es ist nicht möglich, daß sie im Anfang sich einander nähern sollten, hernach aber wieder von einander entfer-

men, ehe sie einander erreicht haben, oder daß sie wenigstens aufhö-
ren sollten, sich einander zu nähern. Eben so wie sie sich einander im
Anfang nähern, so nähern sie sich einander im Fortgang. Die gera-
den Linien AB, CD, welche wir von A und C zu ziehen angefangen,
nähern sich einander, indem sie bis B und D fortgehen; sie nähern sich
aber einander noch immer, indem die eine von B bis an E, und die
andere von D bis an F wächst. Wenn sich aber gerade Linien,
indem sie fortgezogen werden, einander beständig auf einerley Art nä-
hern, so müssen sie endlich gar zusammen kommen, es mag dieses ge-
schehen wo es will. Ihre Entfernung von einander, die sie im Anfang
gehabt, vermindert sich im Fortgang beständig; sie vermindert sich
immer auf einerley Art, endlich muß sie nichts werden, und ist dieses
geschehen, so berühren die Linien einander. Demnach kommen gera-
de Linien, welche sich gegen einander neigen, oder welche sich einan-
der nähern, endlich gewiß zusammen. Da nun aber die Parallellinien
niemals zusammen kommen, so können sie sich auch einander niemals
nähern, denn sonst würden sie zusammen kommen. Sie müssen dem-
nach beständig einerley Entfernung von einander behalten, denn sich
nicht nähern, und immer einerley Entfernung behalten, ist einerley
mit verschiedenen Worten gesagt. Doch dieses wird aus dem nach-
folgenden viel deutlicher werden.

IV.
Abschnitt.
F. 89.

S. 183. Wenn die zwei geraden Linien AB, DE einander pa-
rallel liegen, und eine dritte Linie FG schneidet eine derselben DE, so
muß eben die Linie FG, wenn sie verlängert wird, auch die andere
AB schneiden, wenn man nur auch diese Linie gehörig verlängert.
Denn die Linien DE, FG, welche einander schneiden, machen den
Winkel DCG mit einander, und die AB ist durch ein Punct inner-
halb dieses Winkels DCG gezogen, welches Punct man sich in der
AB, so weit sie gezeichnet ist, vorstellen kan wo man will, in A
zum Exempel, oder B. Folgendes muß IV, 105. die Linie AB wenig-
stens eine der Linien DC, CG, oder DE, FG schneiden, und von
derselben hinwiederum geschnitten werden. Es ist aber nicht möglich,
daß die Linien AB, DE einander schneiden, weil sie parallel sind:
Folgendes schneidet AB die FG und wird von derselben geschnitten.

F. 90.

S. 184. Hieraus folget so gleich, daß durch ein gegebenes Punct
C nur eine einzige gerade Linie gezogen werden könne, welche einer
ebenfalls gegebenen geraden Linie AB parallel lauffe. Denn wenn
DE diese Linie ist, welche durch C der AB parallel läuft; und man
R 1 wil

IV. wil durch eben das Punct C noch eine andere gerade Linie FG ziehen, so muß diese FG die vorige DE nothwendig in C schneiden: Sie schneidet also auch die AB, wenn sie so wol als die AB gehörig verlängert wird, und kan also dieser AB nicht parallel seyn. IV, 78.

S. 185. Hieraus aber lassen sich ferner folgende Eigenschaften der Parallelinie begreifen. Wenn zwei gerade Linien AB und CD parallel liegen, und man schneidet sie durch eine beliebige dritte Linie EF, so sind die Wechselwinkel, welche zwischen den Parallelinien nach verschiedenen Seiten liegen CEF und EFB einander gleich. Dieses ist einer von den Sätzen, welche wir gleich Anfangs angegeben, verkehrt gesetzt. Wir haben gesehen, daß wenn die Winkel CEF und EFB gleich sind, die Linien AB und CD nothwendig einander parallel seyn müssen: jetzt wird angegeben, daß, wenn die Linien AB und CD parallel sind, auch die Winkel CEF und EFB gleich seyn; in beiden Fällen ist die Linie EF nach Belieben gezogen worden. Es läßt sich aber auch der gegenwärtige Satz aus dem vorigen gar leicht beweisen, indem man zeigt, daß so bald als man das Gegentheil desselben annehmen wil, man in Dinge verfällt, von welchen man weiß, daß sie ohnmöglich und widersinnig sind. Wir setzen, daß die Winkel EFB und CEF gleich sind. Wer diesem widerspricht, muß sagen daß sie ungleich sind: wir wollen sehen worzu dieser Widerspruch führen kan.

S. 186. Obschon der Winkel CEF, wie gesetzt wird, dem Winkel EFB ungleich ist, so kan doch dieses nicht hindern, daß man nicht an das Punct E der Linie EF einen Winkel setzen könne, welcher dem Winkel EFB gleich ist. Denn dieses können wir überall thun. Wir wollen setzen, daß dieser Winkel GEF sey. Denn weil der Winkel EFB dem Winkel CEF ungleich zu seyn gesetzt wird, so muß daraus nothwendig folgen, daß auch der Winkel CEF dem Winkel GEF, welchen wir dem Winkel EFB gleich angenommen, ungleich sey, und demnach muß die Linie EG außer EC fallen, entweder zwischen die zwei Parallelinien AB, CD, wie wir sie gezeichnet, oder außerhalb derselben. Ist man mit diesem einig, so schließen wir nun, um zu zeigen, daß dieses nicht statt haben könne, und daß es folglich falsch sey, daß der Winkel CEF größer oder kleiner sey, als der Winkel EFB folgender massen. Es wird zum Grund gesetzt, daß die Linie CD der Linie AB parallel sey, da man aber auch setzt daß der Winkel GEF dem Winkel EFB gleich sey: so folget daraus, daß auch

auch GE mit eben der Linie AB parallel lauffe. IV, 79. Es gehen aber die geraden Linien CD und GE beide durch das Punct E, und sind demnach mit der geraden Linie AB ~~zwo~~ andere CD und GE parallel gezogen, welche beide durch ein Punct E gehen. Dieses kan ohnmöglich seyn, denn wir haben IV, 184. deutlich eingesehen, daß nur eine dergleichen Linie möglich sey. Also ist auch der Winkel CEF dem Winkel EFB nicht ungleich. Denn so bald wir dieses angenommen, folgte etwas widersinnisches; folgendes sind diese Winkel, wie wir gesetzt haben, einander gleich.

IV.
Winkel.

§. 187. Hieraus aber ist nun gar leicht ferner einzusehen, daß wenn man die gerade Linie EF nach aussen zu in H und I verlängert hat, auch die Winkel IED und EFB einander gleich seyn müssen. Denn die Winkel IED und CEF sind allzeit nothwendig gleich, wie nunmehr ganz bekannt seyn muß. Nun aber ist eben gezeigt worden, daß die Winkel CEF und EFB einander gleich seyn, also müssen auch die Winkel IED, EFB, die beyde einem dritten Winkel CEF gleich sind, einander gleich seyn.

§. 188. Eben so ist es auch mit den Winkeln IED und AFH. Sie sind gleich, weil die Winkel CEF und EFB gleich sind, und dieser letztere Winkel den erstern nothwendig gleich seyn müssen.

§. 189. Endlich sind auch die Winkel DEF, und EFB, welche zwischen zwo Parallellinien nach einer Seite zu stehen, nachdem diese von einer dritten Linie IH geschnitten worden, zween geraden Winkeln gleich. Denn es ist EFB so groß als FEC; nun aber ersetzt FEC was dem Winkel FED an zween geraden Winkeln abgehet, denn FEC und FED zusammen machen zween gerade Winkel aus: IV, 62. also muß auch der Winkel EFB, wenn man ihn zu dem Winkel DEF hinzu setzet, dieses Winkels DEF Abgang von zween rechten Winkeln ersetzen, und folgendes mit demselben zween rechte Winkel ausmachen.

§. 190. Hat man demnach so viele gerade Linien AB und CD in einer ebene, einer gegebenen Linie EF parallel gezogen, als man wil, und man ziehet auf eine derselben EF, eine Perpendicularlinie GH, und verlängert dieselbe, bis sie auch die übrigen Linien in H und I schneidet: so ist diese IG auch auf alle übrige Linien AB und CD perpendicular. Denn weil die Linien CD und EF parallel, die Winkel aber bey G, wegen des senkrechten Standes der Linie HG auf EF, rechte Winkel sind: so kan es nicht anders seyn, die Winkel bey H,

F. 92.

IV. müssen ebenfalls rechte Winkel seyn, welches man aus den eben angegebenen allgemeinen Sätzen auf mehr als eine Art, und mit gleicher Leichtigkeit einsehen kan. Und eben diese Gründe erweisen, daß auch die Winkel bey I gerade seyn, und daß darnach GH so wohl auf CD , als auf AB , perpendicular stehe.

§. 191. Und eben hieraus siehet man auch, daß die geraden Linien AB und CD , welche beyde einer dritten EF parallel lauffen, und mit derselben in einerley ebenen Fläche liegen, auch mit einander verglichen, parallel seyn, oder daß indem man die zwei Linien AB und CD beide durch verschiedene Puncte mit der EF parallel gezogen, man eben dadurch die Linie AB der Linie CD parallel gemacht. Denn weil, wie gezeiget worden, die Winkel bey H und I gerade Winkel sind, so stehen die Linien AB und CD beyde auf der geraden Linie GI perpendicular, und sind deswegen mit einander parallel, weil die Winkel AIH , IHC , mit einander zween rechte Winkel ausmachen, oder auch, weil AIH und IHD einander gleich sind.

§. 192. So oft man die Entfernung zweer Parallellinien von einander genau anzuzeigen hat, ziehet man eine Perpendicularlinie von einer derselben auf die andere, wie hier IHG gezogen ist, welche dann nothwendig auf alle diese Linien, so viel ihrer auch seyn mögen, perpendicular seyn wird. Das Stück dieser Perpendicularlinie, welches zwischen den Parallellinien enthalten ist, ist die Entfernung derselben von einander. Demnach ist in unserer Zeichnung die Entfernung der geraden Linie AB von der CD , die Länge IH , die Entfernung der AB von der EF ist IG , und CD ist von der EF um die Länge HG entfernt. Es gilt gleich, wo man eine solche Perpendicularlinie ziehet, denn es sind die Entfernungen der Parallellinien, so weit man sie auch verlängern wil, aller Orten einerley, wie wir theils IV, 182. gesehen, theils bald noch deutlicher sehen werden.

F. 93. §. 193. Hat man nun eine beliebige Zahl von Parallellinien gezogen, welche alle gleiche Entfernung von einander haben, als AB , CD , EF , und man ziehet eine schiefe Linie GHI , wie man wil, von einer der äuffersten dieser Parallellinien an die andere, so sind die Theile dieser schiefen Linie GHI , welche zwischen jeden zwei Parallellinien einander am nächsten liegen, enthalten sind, einander gleich. GH nemlich ist $= HI$. Denn wenn, wie in unserer Figur, nur drey Parallellinien sind, und man ziehet durch das Punct H , in welchem die

mittl.

mittlere von der schiefen Linie GHI geschnitten wird, eine Perpendicular-
 larknie auf diese Parallellinien KL , so sind in den Dreyecken GKH und HIL die Winkel bey K und L einander gleich, weil sie gerade
 Winkel sind: und über dieses ist auch der Winkel KHG dem Winkel
 IHL gleich, weil sie durch den Schnitt zweyer geraden Linien KL und
 GI entstanden sind. Da nun aber auch die Seite KH der Seite
 HL gleich ist, weil diese die Entfernungen sind der Parallellinien AB ,
 CD , und CD, EF , welche wir gleich angenommen: so liegen in dies-
 sen Dreyecken GKH und HIL die gleichen Seiten KH und HL zwis-
 schen gleichen Winkeln $K=L$, und $KHG=IHL$, und sind demnach
 in denselben auch die dritten Seiten GH und HI einander gleich.
 IV, 126. Das ist, das Stück GH der schiefen Linie GI , welches
 zwischen der ersten und zweyten Parallellinie lieget, ist dem Stück HI
 eben dieser Linie GI gleich, so zwischen der zwoten und dritten Paral-
 lellinie lieget. Auf eben die Art aber kan man auch zeigen, daß
 wenn der Parallellinien mehrere sind als dreye, und die Entfernung der
 dritten von der vierten ist der Entfernung der zwoten von der dritten
 gleich, und so fort: man kan sage ich unter diesen Bedingungen auf
 eben die Art zeigen, daß der Theil HI der schiefen Linie GI zwischen
 der zwoten und dritten Parallellinie, dem Theil dieser Linie, zwischen
 der dritten und vierten gleich seyn werde, und so weiter.

§. 194. Man siehet leicht daß man diesen Satz auch umkehren und
 also sagen könne: Wenn drey Parallellinien AB, CD, EF eine Linie
 GI , welche zwischen den äußersten derselben AB, EF wie man wil,
 schief gezogen ist, in zwey gleiche Theile schneiden, so nemlich, daß
 $GH=HI$, so sind dieselben Parallellinien gleich weit von einander ent-
 fernt; oder wenn man zwischen denselben auch eine Perpendicular-
 larknie ziehet KHL , so werden auch die Theile dieser Linie KH und HL
 einander gleich. Denn es sind in den Dreyecken KHG und HIL die
 Winkel, welche wir vorher betrachtet, und gleich zu seyn befunden,
 auch bey den gegenwärtigen Bedingungen gleich, nemlich $KHG=IHL$,
 und $K=L$, weil die gegenwärtigen Bedingungen mit den vorigen
 einerley sind, außer daß an statt $HK=HL$ man hier gesetzt, es sey
 $HG=HI$. Es folget aber aus der Gleichheit dieser Winkel und der
 Gleichheit der Seiten HG, HI in den Dreyecken KHG , und IHL ,
 daß auch die Linien KH und HL einander gleich seyn, wie vorher
 IV, 126; und weil diese KH, HL auf die Parallellinien perpendicular
 gezogen sind, und folgend's ihre Entfernung von einander anzeigen, so

IV. muß AB von der CD so weit entfernt seyn, als weit CD von der EF entfernt ist. Man kan nun leicht weiter gehen, und schliessen daß, wenn vier, fünf oder mehr Parallellinien, die in einer Ebene liegen, eine schiefe Linie dergestalt, daß alle Theile der schiefen Linie gleich sind, schneiden können; jede dieser Parallellinien von denjenigen, welche ihr zunächst liegen, gleich weit entfernt seyn werde.

S. 195. Aber auch hier ist der bloße natürliche Verstand hinlänglich die Sache einzusehen, und so gehet es mit den meisten ersten Sätzen der Geometrie. Man nehme eine Linie wie man wil, und bemerke in derselben drey Puncte G, H und I, deren beyde äusserste G und I von dem mittlern H gleich weit entfernt sind, und ziehe so dann durch diese drey Puncte die Parallellinien AB, CD, EF. Ist dieses geschehen, so frage man sich selbst, ob AB der CD näher sey als EF, oder ob diese EF der CD näher sey als die AB, verkehre aber die Figur, ehe man sich etwa mit der Antwort überelset, so daß das unterste das oberste werde. Man wird allerdings finden, daß man eben so wenigen Grund haben kan, AB der CD näher zu setzen, als EF, als wenig man auf der andern Seite antrifft, welches machen könnte, daß EF der CD näher wäre als AB.

F. 94. S. 196. Gesetzt nun daß die Parallellinien der 94 Figur dergestalt liegen, daß sie die Linie AE, welche man von der ersten nach der letzten nach Belieben gezogen, in gleiche Theile theilet, so nemlich daß $AB = BC = CD = DE$: so schließet man so gleich daraus, es müssen alle diese Parallellinien gleich weit von einander entfernt seyn. Ist nun aber zwischen eben diesen Linien noch eine andere Linie a e gezogen, welche von denselben in den Puncten a, b, c, d, e, getheilet wird, so kan man daraus, daß die Parallellinien alle einerley Entfernung von einander haben, wieder schliessen, daß auch die Theile dieser Linie ab, bc, cd, de einander gleich seyn müssen. IV, 193. Und es folget demnach allzeit daraus, daß eine gerade Linie AE von verschiedenen Parallellinien in gleiche Theile geschnitten wird, daß auch eine jede andere gerade Linie ae, welche zwischen eben diesen Parallellinien lieget, von denselben ebenfalls in lauter gleiche Theile geschnitten werde.

S. 197. Wären nun über dieses die Linien AE, ae einander ebenfalls parallel, so wären auch die Theile AB und ab, und alle übrige einander gleich, wie man sie auch mit einander vergleichen wil. Dieses ist besonders zu beweisen. Man siehet aber leicht, daß so bald man

man erwiesen, daß bey diesen neuen Umstand AB der ab gleich sey, IV.
alles übrige von selbst folge. Denn AB ist $= BC$. Ist nun auch $BA = ab$, so ist auch $BC = ab$, und so fort. Diesen Beweis aber
gibt nachfolgender Satz.

F. 28.

§. 198. Wenn AB der DC und zugleich AD der BC parallel liegen, das ist, wenn zwey Paare von Parallellinien ein Viereck ausmachen, so ein Parallelogrammum genennet wird; so sind in einem solchen Vierecke nothwendig so wohl die einander entgegen gesetzte Seiten, als auch die einander entgegen gesetzte Winkel gleich. In diesem Satze haben wir wieder einen der vorigen IV, 180. umgekehrten. Wir haben gesehen, daß wenn wir in einem Vierecke die einander entgegen gesetzte Seiten gleich machen, diese Seiten auch nothwendig einander parallel zu liegen kommen müssen: gegenwärtig schließen wir, daraus, daß zwey Seiten parallel liegen, ihre Gleichheit, und über dieses die Gleichheit der Winkel, welche einander entgegen gesetzt sind, oder die, wie man zu sagen pfleget, übereck liegen: beydes wird zugleich eingesehen. Denn wenn man in dem erwähnten Parallelogrammo ABCD eine gerade Linie AC überecks zieht, so werden die Winkel DCA und CAB, die zwischen den Parallellinien DC und AB nach verschiedenen Seiten liegen, einander nothwendig IV, 185. gleich. Weil aber auch AD der BC parallel lauft, so hat es mit dem Winkeln DAC und ABC eben diese Bewandnis. Sie liegen zwischen den Parallellinien AD und CB, von deren einer an die andere die gerade Linie AC gezogen ist, nach verschiedenen Seiten, also sind auch diese Winkel gleich, und es ist demnach das Viereck ABCD durch die Linie AC in zwey Dreiecke zertheilet worden, in welchen beyden die Seite AC zwischen gleichen Winkel lieget. In diesen Dreiecken sind demnach auch die übrigen Winkel D und B einander gleich, wie auch die Seiten die an den gleichen Winkeln liegen AB und DC, ingleichen AD und CB. IV, 126. Das erste, daß nemlich der Winkel D dem Winkel B gleich sey, ist eines von demjenigen, so von diesen Vierecken zu erweisen war, und man siehet leicht ein, daß eben dasselbe auch von den zweyen Winkeln DAB und BCD auf eben die Art wäre erwiesen worden, wenn man nur gleich Anfangs an statt der Linie AC eine andere von D nach B gezogen hätte. Daß demnach auch diese Winkel DAB und BCD einander gleich seyn müssen. Das zweite, daß $AD = CB$, und $AB = CD$ ist die andere Eigenschaft unserer Vierecke, so wir angegeben, daß nemlich in den Vierecken, wel-

IV. Wir betrachten, die entgegen gesetzte Seiten einander gleich
 sind.

§. 199. Man drückt einen Theil dieses Satzes aus, wenn man sagt, die Linien DA, BC, welche zwischen den zweyen Linien AB, DC, die einander parallel liegen, dergestalt gezogen sind, daß sie gegen eine dieser Linien sich beyde gleich stark neigen, oder, welches eben das ist, daß diese DA, BC auch selbst einander parallel lauffen, seyen von gleicher Größe. Und hieraus schliesset man ohne Weitläufigkeit dasjenige, so wir bereits IV, 192. als bekannt angenommen haben, daß nemlich zwey parallellinien überall gleich weit von einander entfernt sind.

§. 200. Es folget aber aus dem Beweiss, welchen wir gegeben, daß auch das Dreyeck DAC dem Dreyeck ABC gleich sey, welches noch eine Eigenschaft dieser Art Vierecke ist, welche man dergestalt ausdrücken kan. Ein jedes Parallelogrammum wird durch die gerade Linie, welche in demselben von einer Spitze an die andere quer durchgezogen wird, in zwey gleiche Dreyecke zertheilet.

F. 95.

§. 201. Wir schliessen aus diesem letzterem weiter, daß alle Parallelogrammen, bey welchen einerley Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen wird, einander gleich seyn. Die 95 Figur wird die Meynung hiervon deutlicher machen. Wir sehen, daß in den beyden Parallelogrammen ABCD und abcd, die Winkel B und b einander gleich seyn, und daß die Seite AB der Seite ab gleich sey, und die Seite BC der Seite bc, und sagen, daß hieraus auch die Gleichheit der Parallelogrammen selbst folge. Man kan darzu sehen, wenn man wil, daß auch die Winkel A, a, ferner D, d, wie auch C. c, einander gleich seyn, wiewohl dieses anzumerken eben nicht sonderlich nöthig ist. Was aber die Gleichheit der Vierecke selbst betrifft, so stehet man sie ein, wenn man nur eine Querslinie durch die Spitze der Winkel A und C ziehet, und eine andere durch die Spitze der Winkel a und c. Denn weil $B=b$, und $AB=ab$, aber auch $BC=bc$, so werden in den Dreyecken ABC und abc gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen, und sind also die Dreyecke ABC und abc einander gleich. IV, 112. Demnach muß auch das erste Dreyeck zwey mal genommen, so viel geben, als heraus kommet, wenn man das zweyte gedoppelt nimmet. Nimmet man aber das Dreyeck ABC gedoppelt, so kommt das Parallelogrammum BD, und eben so entstehet das Parallelogrammum bd, wenn man abc zwey mal setzet. Denn die
 Drey

Dreiecke ADC , adc sind, wie eben gezeigt worden, den Dreiecken IV. ABC , abc gleich, und kommen also die Vierecke BD , bd allerdings heraus, wenn man die Dreiecke zweymal nimmt. Und demnach sind auch die Vierecke einander gleich. Die Gleichheit der Winkel, wie wir dieselbe angegeben, ist leicht einzusehen. Denn man sieht aus dem Beweis leicht, daß die Gleichheit der Vierecke, welche wir erwiesen, von der Art sey, daß dieselben genau auf einander passen, wenn man eines gehörig auf das andere bringet.

§. 202. Die Summa aller Winkel in einem solchen Viereck beträgt genau vier gerade Winkel. Das ist, wenn man alle Winkel eines solchen Vierecks an einander setzen wolte, so würde eben so viel heraus kommen, als man heraus brächte, wenn man vier gerade Winkel mit ihren Spitzen an einander rückte, und die Seiten ebenfalls zusammen fallen ließe. Dieses ist gar leicht einzusehen. Die Winkel A und B stehen zwischen den Parallellinien AD und BC nach einerley Seite, und sind also IV. 189. zusammen gesetzt zween geraden Winkeln gleich. Und so ist es auch aus eben dem Grunde mit den zweyen Winkeln D und C , welche ebenfalls zween gerade Winkel ausmachen. Also machen allerdings die Winkel A , B , C und D zusammen vier gerade Winkel.

F. 96.

§. 203. Wenn also in einem solchen Vierecke ein einziger Winkel gerade zu seyn befunden wird, so kan man daraus schließen, daß die übrigen Winkel desselben alle gerade seyn. Denn gesetzt es sey in dem Parallelogramm $ABCD$ der Winkel A ein gerader Winkel, so ist C dem Winkel A gleich IV. 198. und deswegen nothwendig ebenfalls ein gerader Winkel. Ferner aber machen die beiden Winkel A und B zusammen gesetzt zween gerade Winkel aus, welches nicht geschehen könnte, wenn nicht B ebenfalls ein gerader Winkel wäre. Denn wäre B kleiner oder größer als ein gerader Winkel, so würde er mit dem geraden Winkel bey A zusammen gesetzt nothwendig weniger oder mehr bringen als zween gerade Winkel. Eben so kan man zeigen, daß D ebenfalls ein gerader Winkel sey, nachdem wir gezeigt, daß der Winkel C gerade sey.

F. 97.

§. 204. Wiederum, wenn ein Parallelogramm einen einzigen schiefen Winkel hat, der nemlich größer oder kleiner ist, als ein gerader Winkel, so kan man sicher seyn, daß auch die übrigen Winkel alle schief seyn müssen. Denn weder unter diesen letztern Winkeln ein ein-
ziger

IV. **Wisspunkt.** Jäger gerader anzutreffen, so müßten sie alle gerade seyn, und auch der erste, welchen man schief angenommen, könnte nicht schief seyn, und man setzt also etwas sich selbst widersprechendes, wenn man sagt, ein Winkel in einem solchen Viereck sey schief, und die übrigen seyn doch nicht schief.

§. 205. Man beschreibet also ein Parallelogramm, so lauter gerade Winkel hat, nach eben der Weise, welche vor alle und jede dergleichen Vierecke IV, 178. angewiesen worden, aus zwei Seiten, welche man nach einem geraden Winkel an einander gesetzt. Und es kan hier nichts besonders gesagt werden. AB und BC sind zwei gerade Linien, welche bey B einen rechten Winkel machen. Man leget BC aus A nach D, und BA aus C ebenfalls nach D. Das, nach dieser allgemeinen Weise beschriebene Parallelogramm BD wird lauter gerade Winkel haben, weil der bey B gerade ist. Dergleichen Parallelogrammen die keine andere als gerade Winkel haben, heißen geradewinklichte Parallelogrammen.

§. 206. Man kan hier die Seiten AB und BC, wie bey allen Parallelogrammen, von beliebiger Größe nehmen, wie man leicht aus ihrer Beschreibung sieht; aber wenn man diese Größe einmal bestimmt hat, so werden alle die geradewinklichten Parallelogrammen, welche man daraus machet, von einerley Größe. Denn weil die Winkel nothwendig gerade sind, (sonst wären es keine geradewinklichte Parallelogrammen,) so werden bey allen solchen Parallelogrammen, die aus den Seiten AB und BC zusammen gesetzt sind, gleiche Winkel von gleichen Seiten eingeschlossen, und müssen demnach alle diese Parallelogrammen dem zu folge, so IV, 201. erwiesen worden, gleich seyn.

§. 207. Und da die Größe der Seiten AB und BC beliebig ist, so kan man auch diese Seiten einander gleich machen. Geschiehet dieses, so bekommt das Parallelogramm lauter gleiche Seiten, weil die übrigen denjenigen, welchen sie entgegen stehen, nothwendig gleich sind IV, 199. Ein dergleichen Parallelogramm nennen einige eine Raute. Ist aber dasselbe rechtwinklicht, so heißet es mit einem besondern Namen ein Quadrat.

F. 98. §. 208. Es wird also ein Quadrat noch eben so, wie insgemein alle Parallelogrammen beschrieben. Es darf aber dazu nichts weiter gegeben seyn, als eine Seite, AB. Denn man weiß den Winkel bey B ohne dem, weil er, nach dem Begriff des Quadrats, gerade seyn muß, und kan ihn allezeit machen.

chen. Ferner ist auch die Seite BC bekannt, als die der Seite AB gleich ist. Aus dem Winkel B aber und den Seiten AB , BC läßt sich das Quadrat nach der Anweisung IV, 178. ausmachen, nach welcher ein jedes Parallelogramm aus einem Winkel und zweien Seiten, die ihn einschließen, verfertigt wird. IV.
 F. 99.

§. 209. Alle Quadrate von gleichen Seiten haben einerley GröÙe. Man mache aus der Seite AB noch ein anderes Quadrat und ein drittes, es wird keines von diesen größer oder kleiner seyn, als dasjenige so wir gezeichnet AC . Dieses ist an sich klar, und man kan es auch aus dem Einschen so von der Gleichheit aller Parallelogrammen IV, 201. gesagt worden. Nimmt man aber eine Seite AB kleiner als eine andere AC , und setzet auf die erstere ein Quadrat AD , so wird dieses nothwendig kleiner als das Quadrat AE , welches man auf die größere Seite AC setzen kan. Bloß die Betrachtung der Figur kan uns hievon vollkommen überzeugen.

§. 210. Alle diese Eigenschaften der Parallelogrammen können ohne große Schwierigkeiten aus den Sätzen von der Parallelen Lage zweier geraden Linien eingesehen werden, und so ist es auch mit der nächstfolgenden Beschreibung dieser Vierecke. Man nehme zwei gerade Linien an, die einander gleich sind und parallel liegen; AD und BC , man hänge ihre äußersten Punkte vermittelst der geraden Linien AB und DC zusammen. Das Viereck AC ist ein Parallelogramm. Auch dieses zeigt die natürliche Vernunft, von welcher wir uns jederzeit so wenig als möglich ist, zu entfernen vorgesetzt. Man betrachte die Figur auf einer und der andern Seite, und drehe sie, wenn man es vor gut befindet, und sage so dann, auf welcher Seite wohl die geraden Linien AB und DC zusammen kommen würden, wenn man sie verlängert, ob oben oder unten. Beides zugleich kan nicht geschehen, denn das streitet wider die ersten Eigenschaften der geraden Linien: Warum sie aber einander vielmehr auf dieser als auf jener Seite antreffen sollten, läßt sich nicht gedenken, es folget demnach daß diese Linie AB und CD gar nicht zusammen lauffen werden, und daß sie demnach eben so wie AB und CD einander parallel sind. F. 96.
 97. 98.

§. 211. Um aber in unserem Zusammenhang zu bleiben, müssen wir wieder, wie bisanhero öfters geschehen, eine Quere-Linie AC ziehen. Weil nun gesetzt worden, daß AD der BC parallel sey, so sind auch die Winkel DAC und ACB einander gleich. Es ist aber auch

IV. die Seite AD der Seite BC gleich angenommen worden, und AC
 Abschnitt. ist der CA, das ist, sich selbst, nothwendig gleich; derowegen werden
 in den Dreyecken DAC, und ACB gleiche Winkel DAC und ACB
 von den gleichen Seiten AD = BC, und AC = CA eingeschlossen,
 und sind demnach auch die übrigen Seiten dieser Dreyecke, das ist, die
 Seiten des Vierecks AB und CD einander gleich IV, 112. Demnach
 bestehet unser Viereck aus Seiten deren jede derjenigen, welcher sie ent-
 gegen stehet, gleich ist, und ist demnach dasselbe wie alle Vierecke, de-
 ren Seiten sich dergestalt gegen einander verhalten, ein Parallelo-
 grammum IV, 180.

Von den Winkeln der geradeliniichten Figuren.

S. 212. Dieses sey von den Parallel-Linien genug gesagt, deren
 Eigenschaften wir begriffen haben, so bald wir drey gerade Linien auf
 eine besondere Art zusammen gesetzt. Wir nehmen nun die übrige
 Zusammensetzung dreier geraden Linien vor uns, und fallen also wieder
 F. 100. in die Lehre von den Dreyecken. Wir haben gesehen, daß wenn zwei
 gerade Linien AB, CD auf einer dritten AC dergestalt stehen, daß die
 zween Winkel BAC und ACD zusammen zween geraden Winkeln
 gleich sind, diese Linien AB und CD nicht zusammen lauffen können,
 wie weit man sie auch verlängert IV, 82. Wir haben gesehen, daß
 wenn man von dem Punct A noch eine andere gerade Linie ziehet in-
 nerhalb der AB, dergleichen die AE ist, diese, wenn sie genugsam ver-
 längert wird, die gerade Linie CD endlich gewiß antreffen werde IV,
 182. Geschicht dieses, und die beiden geraden Linien CD und AE
 treffen einander, wenn man sie verlängert, in F an, so wird aus den-
 selben mit der Linie AC ein Dreyeck ACF.

S. 213. Die zween Winkel dieses Dreyecks ACF und CAF ma-
 chen nothwendig weniger aus als zween gerade Winkel. Denn da-
 mit ACF zu zween geraden Winkeln erwachse, müste man zu dem-
 selben den Winkel CAB hinzusetzen. Es ist aber CAE der an des-
 sen Stelle zu ACF hinzugesetzt worden, kleiner als CAB, und es
 kan durch diesen kleinern Zusatz ohnmöglich so viel kommen, als man
 erhalten, da man den Winkel CAB zu eben dem ACF setzete. Al-
 so bringt CAE zu ACF hinzugesetzt weniger als zween gerade
 Winkel.

S. 214. Und wenn man demnach auf eine gerade Linie AC,
 was anders CD und AE so setzen wil, daß sie, wenn sie gehörig ver-
 läng-

IV.
Wächst.
F. 101.
längert werden, einander irgendwo, als in F, antreffen, so müssen die
zween Winkel ACF und CAE so angenommen werden, daß sie zu-
sammen weniger geben, als zween gerade Winkel. Wolte man die-
selbe so nehmen, daß sie zusammen gesetzt zween gerade Winkel bräch-
ten, so würden die Linien parallel lauffen, und einander nirgends an-
treffen: machte man aber die zween Winkel ACD und EAC grösser
als zween gerade Winkel, wie in der 101 Figur geschehen, so würden
sich die Linien CD, AE so gar von einander neigen, und einander
noch viel weniger antreffen, ob sie zwar, wenn man sie nach der an-
dern Seite zurück verlängerte, ein Dreyeck ACF ausmachen würden.
Es sind aber auch auf dieser Seite die Winkel CAF + FCA kleiner
als zween gerade Winkel, wie man sehen kan, wenn man auch die
BA, welche der CD parallel lieget, nach Belieben, in H zurück ziehet.

S. 215. Man kan sich auch so erklären: Zwo gerade Linien AE, F. 100.
CD, welche beide auf einer dritten Linie AC stehen, lauffen nicht zu-
sammen, und machen kein Dreyeck, wenn nicht, nachdem die AC in
G verlängert worden, der äussere Winkel DCG, grösser ist als der in-
nere EAC. Denn wäre DCG dem innern Winkel EAC gleich,
wie er dem Winkel BAC gleich ist, so würden die zwo Linien, die
man an AC gesetzt, parallel fallen, wie denn die AB der CD paral-
lel ist; und man siehet leicht ein, was erfolget wäre, wenn man an statt
des EAC einen Winkel angenommen hätte, welcher noch grösser ist,
als der äussere DCG.

S. 216. Demnach sind in einem jeden Dreyeck ACF jede zween
Winkel CAF und ACF zusammen, kleiner als zween rechte Winkel:
Und wenn man eine Seite desselben AC in G verlängert, so wird der
äussere Winkel GCF grösser als der innere CAF, welcher ihm entge-
gen stehet.

S. 217. Wie groß aber alle drey Winkel eines Dreyecks sind,
und wie viel der innere Winkel CAF kleiner sey, als der äussere GCF,
kan aus eben dieser Figur nachfolgender massen geschlossen werden.
Weil die Parallellinien AB und CD von der Linie AF geschnitten
werden, so sind die Winkel EAB und AFC einander gleich IV, 79. Nim-
met man also von dem Winkel BAC den Winkel BAE hinweg, und set-
zet an seine Stelle den Winkel F hinzu, so ist allerdings der übrig ge-
bliebene Winkel CAE mit dem bey F so groß als der Winkel CAB.
Da nun aber CAB mit dem Winkel ACF zween geraden Winkeln
gleich

IV. gleich ist, so muß auch die besagte Summe der Winkel $CAE + F$ ~~Wissn.~~ mit CAF zween gerade Winkel ausmachen.

S. 218. Will man sich dieses in der Form einer Rechnung vorstellen, so kan man so verfahren: Es ist $ACF = ACF$, $CAF = CAF$ und $FAB = F$. Man setze oder addire die ersten dieser Winkel zusammen, wie auch die letztern, so erhält man $ACF + CAF + FAB = ACF + CAF + F$, oder weil $CAF + FAB = CAB$, so ist $ACF + CAB = ACF + CAF + F$. Nun sind die zween Winkel $ACF + CAB$ zween geraden Winkeln gleich, derowegen müssen auch die drey Winkel $ACF + CAF + F$ zusammen gesetzt, zween gerade Winkel ausmachen. Und so viel betragen alle Winkel in einem jeden Dreyeck, nemlich zween gerade Winkel, denn man kan in einem jeden Dreyeck ACF , AB mit CF parallel ziehen; und den Beweis so führen wie wir eben gethan.

S. 219. Fast auf eben die Art siehet man, daß wenn man eine Seite des Dreyecks AC verlängert, der äussere Winkel GCF den beyden innern $CAF + F$, welche jenem GCF in dem Dreyecke entgegen stehen, zusammen genommen, gleich seyn müsse. Denn da der Winkel BAF dem Winkel F gleich ist, so ist, wie wir auch bereits gesehen, der Winkel $CAB (= CAF + BAF)$ der Summe der Winkel $CAF + F$ gleich. Da nun der Winkel GCF dem Winkel CAB gleich ist, so ist er auch die Summe der zween Winkel $CAF + F$, welche ihm in dem Dreyeck ACF entgegen stehen.

S. 220. Man kan diesen wichtigen Satz auch auf viele andere Arten einsehen. Wir wollen zu desto deutlicherem Verstand von diesen Beweisen einen einzigen hieher setzen, welcher aus dem erwiesenen gar leicht fließet. Ein jedes Dreyeck läßt sich durch den Zusatz eines andern Dreyecks, dessen Seiten mit den vorigen einerley sind, in ein Parallelogramm verwandeln. IV, 179. Man thue dieses mit dem Dreyeck ABC , und mache aus demselben, durch Beysetzung des Dreyecks ADC das Parallelogramm BD . Die Winkel dieser zwey Dreyecke ABC und ACD müssen einander gleich seyn, denn dieses erfolgt aus der Gleichheit ihrer Seiten. Also muß auch die Summe aller Winkel in dem Dreyeck ABC so groß seyn, als die Summe aller Winkel in dem Dreyeck ACD . Es machen aber alle Winkel beyder Dreyecke zusammen gesetzt die Winkel des Vierecks aus, wie selbst aus der Figur ohne weiteren Umschweif sichtlich ist. Demnach ist die

Sum

Summe der Winkel des einen Dreiecks ABC die Hälfte der Summe aller Winkel des Vierecks BD. Da nun alle Winkel des Vierecks vier geraden Winkeln gleich zu seyn befunden worden, IV, 202. so müssen die Winkel des Dreiecks ABC welche halb so viel machen, zween geraden Winkeln gleich seyn: und das war unser erster Satz.

IV.

F. 103.

S. 221. Daß aber, wenn man die Seite BC eines Dreiecks ABC verlängert, der äussere Winkel DBA, so groß sey, als die beyden innern, welche ihm entgegen stehen A und C, kan hieraus leicht geschlossen werden. Die beyden Winkel bey B, sind zusammen genommen zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf einer geraden Linie DBC stehen, oder $DBA + ABC = 2R$. Vorher haben wir gesehen, IV, 218. daß alle Winkel des Dreiecks ABC auch zween rechten Winkeln gleich sind, oder daß $ABC + A + C$ ebenfalls $= 2R$. Derowegen ist auch $DBA + ABC = ABC + C + A$. Nimt man nun beyderseits den Winkel ABC weg, so muß auch gleiches übrig bleiben; und da nach diesem Abzug auf der einen Seite DBA, und auf der andern $A + C$ übrig bleibt, so müssen diese Winkel gleich seyn, DBA nemlich der Summe der zween $A + C$.

S. 222. Diese Sätze setzen uns nunmehr in Stand die Arten von allen Winkeln in den Dreiecken zu bestimmen, wie auch die Summen der Winkel in allen übrigen Figuren, sie mögen so viele Winkel haben als man will. Vor allen sehen wir hieraus ein, daß in jeden zwey Dreiecken, bey welchen die Summen zweyer Winkel, welche man auch nehmen will, gleich gefunden werden, auch die dritten Winkel gleich seyn müssen, es mögen nun die erst besagten Winkel auch einzeln genommen gleich seyn, oder nicht. Gesezet, es sind in den Dreiecken ABC und abc die Summen der Winkel $B + C$, und $b + c$ einander gleich, ob zwar eben nicht $B = b$, und $C = c$, wie wohl dieses auch nichts hindert wenn es vorkommet; so müssen auch die Winkel A und a gleich seyn. Denn wenn sie nicht gleich wären, so könnte ohnmöglich A zu $B + C$ hinzugesetzt eben die Summe geben, welche a mit $b + c$ herausbringt. Die Summen aber aller Winkel sind in allen Dreiecken von einer beständigen Größe, und überall einley, weil sie jederzeit zween gerade Winkel betragen.

F. 104.

S. 223. Oder man schliesse so: $A + B + C = 2R = a + b + c$. Dieses wissen wir, daß es von jeden zwey Dreiecken richtig sey, was man auch vor welche nehmen will. Nun wird gesezet, es sey $B + C = b + c$,

IV. $= b + c$, und wenn man diese Summen von den vorigen wegnimmt, so bleibt wie allezeit, wenn man gleiches von gleichen abziehet, auch gleiches übrig. Derowegen sind die dritten Winkel A und a einander gleich.

§. 224. Was aber die Größen der Winkel in den besondern Arten der Dreyecke anlangt, so ist aus dem gezeigten überflüssig klar, daß in einem Dreyeck ohnmöglich zween wirklich gerade Winkel seyn können. Denn da jede zween Winkel eines jeden Dreyecks zusammen gesetzt notwendig weniger machen als zween gerade Winkel, so können zween derselben ohnmöglich selbst gerade Winkel seyn. Es sind demnach in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck IV, 101. die Winkel, welche ausser dem geraden bey denenselben anzutreffen sind, gewiß spitzig. Denn stumpf kan einer derselben vielweniger seyn als gerade, weil er sonst mit dem geraden Winkel, der in einem geradelinichten Dreyeck notwendig seyn muß, noch mehr als zween gerade Winkel machen würde. In einem rechtwinklichten Dreyeck machen auch die übrigen Winkel, die ausser dem geraden Winkel in demselben anzutreffen sind, zusammen gesetzt wieder einen geraden Winkel aus. Denn wäre dieses nicht, so könnten sie nicht mit dem geraden Winkel zusammen genommen zween gerade Winkel ausmachen, welches doch seyn muß.

§. 225. Eben so siehet man ein, daß in einem stumpfwinklichten Dreyeck, IV, 101. die beyden übrigen Winkel so ausser dem stumpfen in demselben vorkommen, gleichfalls spitzig seyn müssen. Denn wäre einer davon gerade oder stumpf, so würde er, mit dem vorigen stumpfen zusammen gesetzt, eine Summe geben, die grösser ist als zween gerade Winkel.

§. 226. Sonst aber hindert nichts, daß nicht in einem Dreyeck lauter spitzige Winkel vorkommen sollen. Man nehme zween Winkel eines Dreyecks zwar spitzig, aber so groß, daß sie, wenn man sie zusammen setzt, mehr bringen, als einen geraden Winkel, so muß notwendig der dritte Winkel kleiner seyn als ein gerader, und demnach spitzig werden. Es sind also spitzwinklichte Dreyecke IV, 103. möglich, und daß sie möglich sind, ist auch vor sich gar leicht einzusehen.

§. 227. Was aber die gleichschenkligten Dreyecke anlangt, so sind die Winkel derselben an der Grundlinie notwendig spitzig. Denn sie sind einander gleich, und wäre demnach einer derselben gerade oder stumpf, so müste der andere ebenfalls gerade oder stumpf seyn, und

und man bekäme also ein Dreieck von zwey geraden oder stumpfen Winkeln, so nicht möglich ist. Man kan aber diese Winkel an der Grundlinie so klein und spitzig machen als man will, und dadurch kan der dritte Winkel, der der Grundlinie entgegen gesetzt ist, so groß werden, als man will, und folgendes gerade oder stumpf: doch wie haben diese Sache schon längst IV, 107. aus andern Gründen eingesehen.

§. 228. In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich, IV, 119. und machen wie alle Winkel in jedem Dreieck zusammen gesetzt zween gerade Winkel aus. Es muß demnach ein jeder dieser Winkel der dritte Theil von zween geraden Winkeln seyn, oder zwey Drittel von einem geraden Winkel. Denn ein Drittel von der zwey (und folgendes zween geraden Winkeln) ist so viel als zwey Drittel von der eins, (oder von einem geraden Winkel) nemlich 2 durch 3 dividirt, giebt $\frac{2}{3}$.

§. 229. Aus diesem allen siehet man ein, daß wenn in einem Dreieck die Summe zweyer Winkel bekannt ist, man mag sie nun auch einzeln wissen oder nicht, man auch den dritten Winkel leicht haben könne. Denn man darf zu dem Ende nur die bekannte Summe der zween Winkel von zween geraden Winkeln abziehen, so bleibt der dritte übrig. Gesezt, ich weiß daß ein Winkel eines Dreiecks $\frac{1}{2}$ von einem rechten Winkel sey, und der andere $\frac{1}{2}$, oder ich weiß nur die Summe dieser zween Winkel $\frac{1}{2}$, so nehme ich dieselbe von 2 geraden Winkeln, oder von $2\frac{1}{2}$ eines geraden Winkels weg, so bleiben $\frac{1}{2}$ eines geraden Winkels vor die Größe des dritten Winkels übrig.

§. 230. Geometrisch ist eben das zu verrichten, viel leichter, und wir haben das obige nur zum deutlicherem Verstand angeführt. Denn eigentlich müssen hier alle Aufgaben durch Linien und Figuren aufgelöst werden, und das Rechnen hat, wenn man genau verfahren will in der Geometrie, außer wenn es die Beschaffenheit der Sache unumgänglich erfordert, keine statt. Wir würden alles durch einander werffen, wenn wir hierinne sehr vielen neuern, die von diesen Materien geschrieben, folgen würden. Und eben dieses ist von vielen anderen ihren Lehrarten zu sagen. Es ist nicht alles Gold was glänzt, und man muß sich hüten, etwas bloß deswegen zu bewundern, weil es eine Menge anderer hochschäzet, unter welchen vielleicht niemand ist, der einigen Grund seiner Bewunderung anzugeben wüßte.

IV. Es ist aber leicht einzusehen, daß, indem man die Geometrie abhandelt, es eben so wunderbarlich sey, sich der Rechenkunst zur Auflösung der Aufgaben zu bedienen, als wunderbarlich es gehandelt wäre, wenn man einem das Dreckseln weisen wolte, welcher im Tanzen unterrichtet seyn will.

F. 105.

S. 231. Gesezt nun, es sey der Winkel ABC die Summe zweier Winkeln eines Drecks, und man will den dritten Winkel finden, so ziehe man nur eine der Seiten als BC weiter fort nach D . Der Winkel ABD ist der gesuchte dritte Winkel des Drecks. Denn dieser dritte Winkel des Drecks ist derjenige, welcher mit der Summe der zwey gegebenen, oder mit ABC zwey rechte Winkel ausmachet; und dieses thut der Winkel ABD , und kein anderer.

S. 232. Auf eben die Art verfähret man, wenn ein Winkel eines Drecks bekannt ist, und man will die Summe der beyden übrigen wissen. Man ziehet den gegebenen Winkel von zwey geraden Winkeln ab, das Ueberbleibsel ist die Summe der beyden übrigen Winkel des Drecks, als welche nothwendig von der Größe seyn müssen, daß sie mit dem bekannten, zwey geraden Winkel vollmachen.

S. 233. Und hieraus siehet man, daß wenn in einem gleichschenkligen Drecks nur ein einziger Winkel gegeben ist, man die übrigen beyde finden könne. Denn dieser gegebene Winkel ist entweder derjenige, welcher der Grundlinie entgegen steht, oder einer von denjenigen, welche an der Grundlinie liegen. Ist der Winkel gegeben, welcher der Grundlinie entgegen steht, so hat man die Summe der beyden übrigen, wie wir eben gemiesen. Ob nun zwar, wenn das Drecks nicht gleichschenklich ist, man darum die Größe der Winkel nicht einzeln haben kan, weil wohl tausenderley Winkel zusammen gesetzt gleiche Summen geben können, so gehet doch dieses bey den gleichschenkligen Drecken an. Die Winkel, welche an der Grundlinie eines solchen Drecks liegen, sind einander gleich IV, 116. und ist also ein jeder die Helfte ihrer Summe. Wenn man demnach die Summe derselben gefunden, so darf man hernach nur dieselbe halb nehmen, um die Winkel auch einzeln zu haben. Ist aber in einem gleichschenkligen Drecks ein Winkel an der Grundlinie gegeben, so hat man so gleich auch den andern; und der dritte Winkel, welcher der Grundlinie entgegen steht, kan eben so gefunden werden, wie in einem jeden Drecks der dritte Winkel gefunden wird, wenn deren zwey gegeben sind.

S. 234. Wir:

S. 234. Wir haben nicht nöthig hier bey den Dreyecken stehen zu bleiben. So bald wir die Summe aller Winkel in einem Dreyeck wissen, so können wir auch die Summen aller Winkel in einer jeden andern geradenlinichten Figur finden. Man kan innerhalb einer jeden solchen Figur ein Punct nehmen, wie hier A, und von demselben gerade Linien nach allen Ecken der Figur ziehen. Dadurch wird die Figur in Dreyecke zertheilet, und dieser Dreyecke werden an der Zahl so viele, als viele Seiten die Figur hat. Es ist leicht die Zahl aller Winkel in allen diesen Dreyecken zu finden. Alle Winkel eines jeden derselben sind zween rechten Winkeln gleich. Es sind aber der Dreyecke so viel als Seiten sind. Also werden in allen Winkeln aller Dreyecke zusammen so vielmal zween rechte Winkel enthalten seyn, als viele Seiten das Vieleck hat. Und man darf also nur zween rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks multipliciren, um zu finden, wie viele rechte Winkel in allen den Dreyecken, in welche es zertheilet worden, enthalten sind. So sind in allen Winkeln der vier Dreyecke, in welche das Viereck BCDE zertheilet worden zweymal vier oder acht gerade Winkel enthalten, in den fünf Dreyecken, in welche wir das Fünfeck BCDEF getheilet haben, sind zweymal fünf oder 10 gerade Winkel. Es machen aber die Winkel der Dreyecke zum Theil die Winkel der Figur aus, wenn man sie zusammen setzt. Aus den zween Winkeln der Dreyecke bey B entsteht der Winkel des Vielecks EBC, aus den zween Winkeln der Dreyecke bey C entsteht der Winkel des Vielecks bey C und so ferner rings herum. Wenn sonst keine andere Winkel in den Dreyecken vorkämen als die bey B, C, D, so wäre die Summe aller Winkel der Dreyecke mit der Summe aller Winkel der Vielecke einerley. Es sind aber in den Dreyecken ausser den besagten Winkeln bey B, C, D, E, F noch andere Winkel enthalten, nemlich die inwendig um das Punct A herum stehen. Diese sind in der Summe der Winkel der Dreyecke mit enthalten, gehören aber zu der Summe der Winkel des Vielecks keinesweges. Um diese Winkel ist die Summe aller Winkel der Dreyecke grösser als die Summe aller Winkel des Vielecks. Diese Winkel müssen demnach von der Summe aller Winkel der Dreyecke weggenommen werden. Wir wissen wie groß die Summe aller dieser Winkel, die um C stehen, ist. Sie beträgt, wie sonst jede dergleichen Summen aller Winkel die um ein Punct herum stehen, vier gerade Winkel. IV, 68. Diese vier gerade Winkel müssen also von der gefundenen Summe aller Winkel der Dreyecke weggenommen werden,

IV. den, damit man die wahre Summe aller Winkel des Vielecks er-
 theilte. halte.

§. 235. Demnach ist die Regel die Summe aller Winkel in einem jeden Vieleck zu finden, diese: Man multiplicire zwey rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Vielecks, von dem Product nehme man vier gerade Winkel weg, so bleibt die Summe aller Winkel des Vielecks übrig. Diesem zu Folge sind alle Winkel in einem jeden Viereck zweymal vier geraden Winkeln weniger viere, das ist, vier geraden Winkeln gleich. Alle Winkel in einem jeden Fünfeck betragen zweymal 5 oder 10 gerade Winkel weniger viere, oder sechs gerade Winkel: Alle Winkel in einem jeden Sechseck betragen zweymal sechs oder zwölf gerade Winkel, weniger viere, das ist acht gerade Winkel: Alle Winkel in einem jeden drey und zwanzig Eck betragen zweymal 23, oder 46 gerade Winkel, weniger viere, das ist 42 gerade Winkel, und so ferner.

F. 107. §. 236. Es ist aber hiebey zu merken, daß wenn die Spitzen einiger Winkel solcher Figuren einwärts lauffen, man nicht die Winkel, welche auswärts fallen, finde, sondern die Summe der Winkel, welche inwendig um diese Spitzen stehen. Der Winkel CDE läuft einwärts. Indem man die Summe aller Winkel des Vielecks BCDEF, wie gewiesen worden, berechnet, bekommt man den Winkel CDE nicht, denn dieses giebt keinen Winkel in einigen der Dreyecke, in welche das Vieleck zertheilet worden: sondern man findet die Summe der beyden Winkeln der gedachten Dreyecke, deren Spitzen in D fallen, welche Summe man demnach vor den Winkel der Figur CDE halten muß. Oder man muß sich vorstellen, daß die beyden geraden Linien CD und DE einen Winkel nach innen zu einschließen, der größer ist als zween rechte Winkel. IV, 69. Ausser dem würde der Satz nicht wahr seyn. Denn es ist nicht an dem, daß die Summe aller übrigen Winkel der Figur bey B, C, E und F, zusamt dem äußern Winkel CDE so viel betrage, als durch die gegebene Regel gefunden wird. Wohl aber beträget die Summe aller übrigen Winkel, zusamt den beyden die innerhalb der Figur bey D liegen, so viel, nemlich weit von einem Fünfeck die Rede ist, sechs rechte Winkel.

§. 237. Dieses ist was man überhaupt von allen Winkeln aller Figuren wissen kan. Die Summe derselben hat eine bestimmte Größe. So lang die Zahl der Seiten einer Figur einerley bleibt, so lang

bleibet auch die Summe aller Winkel einerley, und wie diese Summe zu finden sey, haben wir gewiesen, an sich aber und einzeln betrachtet, können die Winkel der Figuren gar sehr verschieden seyn. Ob zwar die Summe aller Winkel in einem jeden Viereck nothwendig so groß ist, als die Summe von vier geraden Winkeln, so ist es doch nicht nothwendig, daß einer dieser Winkel des Vierecks, welchen man auch annehmen wil, nothwendig gerade sey. Er kan stumpf oder spizig seyn, und so ist es mit dem zweyten, und dritten; man kan die Größe eines derselben ins besondere aus ihrer bekannten Summe nicht errathen, oder einen allgemeinen Satz angeben, nach welchem die Größen dieser Winkel einzusehen wären. Doch ist dieses allen diesen Figuren gemein, daß wenn in denselben die Summe aller Winkel gegeben ist außer einen, man diesen leicht finden könne, wie wir dieses bereits ins besondere von den Dreyecken IV, 229. gewiesen. Denn man darf nur die gegebene Summe aller Winkel außer einen von der Summe aller Winkel der Figur abziehen, so bleibet der einzige Winkel übrig, welcher in der Summe ausgelassen worden. In einem jeden Fünfeck beträgt die Summe aller Winkel so viel als sechs gerade. Ist nun in einem Fünfeck die Summe von vier Winkeln derselben so viel als $4\frac{1}{2}$ gerade Winkel, so muß der fünfte Winkel $\frac{1}{2}$ eines geraden Winkels seyn.

S. 228. Sind aber die Winkel einer gegebenen Figur als A alle gleich, so hat es eine ganz andere Bewandniß. In diesem Fall kan man aus der Summe aller Winkel auch einen jeden derselben ins besondere finden, auf eben die Art wie wir oben IV, 228. die Größe eines Winkels in einem jeden gleichseitigen Dreyeck bestimmt haben. Man darf nur die Summe aller Winkel durch die Zahl derselben, das ist durch die Zahl der Seiten der Figur, theilen, so bekommt man die Größe eines jeden einzelnen Winkels. In einem Quadrat zum Exempel sind alle Winkel gleich, wie groß ist einer derselben? Die Summe aller Winkel in einem jeden Viereck beträgt vier gerade Winkel. Im gegenwärtigen Fall sind die vier Winkel, welche zusammen vier gerade ausmachen, einander gleich. Dieses könnte ohnmöglich seyn, wenn nicht ein jeder derselben selbst ein gerader Winkel wäre. In einem jeden Fünfeck beträgt die Summe aller Winkel so viel als sechs gerade. Sind nun die Winkel in einem Fünfecke einander gleich; so ist ein jeder derselben der fünfte Theil von allen, und kommt, wenn man die Summe aller, oder sechs gerade

F. 102.

IV. Winkel durch die Zahl der Winkel n theilet. Daß demnach ein Winkel eines solchen Fünfecks $\frac{2}{5}$, oder $1\frac{2}{5}$ eines geraden Winkels seyn wird, und eben so verfähret man in allen übrigen Fällen.

Wie die Seiten der Dreyecke durch die ihnen entgegen gesetzte Winkel bestimmt werden.

§. 239. Dieses ist alle der Nutzen, welchen wir gegenwärtig aus der Kenntnis der Summe aller Winkel eines jeden Dreyecks ziehen können. Und da wir also die Dreyecke so wohl nach ihren Seiten ins besondere, als auch nach ihren Winkeln ins besondere betrachtet, so ist noch übrig daß wir beides zusammen nehmen, und sehen wie und auf was Weise wir die Grösse der Winkel aus der Grösse der Seiten, und diese aus jener schliessen können.

§. 240. Es lästet sich aber von dieser Materie nichts vollkommenes sagen, und ausser demjenigen so von gleichschenkligten und gleichseitigen Dreyecken bereits vorgekommen, da wir nemlich aus der Gleichheit der Winkel die Gleichheit der Seiten, welche ihnen entgegen gesetzt sind, geschlossen, können wir nur noch dieses einzige hinzuthun, daß in einem jeden Dreyecke diejenige Seite grösser sey als eine andere, welcher ein grösserer Winkel entgegen steht. Es sey von dem F, 109. Dreyeck ABC, bekant, daß der Winkel A grösser sey als der Winkel B. Ich sage man werde sicher schliessen können, daß auch die Seite BC welche dem grössern Winkel A entgegen gesetzt ist, grösser sey als die Seite AC die dem kleinern Winkel B entgegen steht.

§. 241. Man kan dieses einiger massen abnehmen, wenn man die Seite BC nach Belieben in D verlängert, und so wohl CA um A als auch BD um B dergestalt beweget, daß das äusserste Punct C der Seite AC niemals ausser BD falle, wie wir die Sache sich dergestalt vorzustellen, bereits einige mal gerathen. Es wird, indem der Winkel bey A auf die Weise verkleinert wird, die Seite BC nothwendig mit verkleinert, und es kan demnach der Winkel A nicht wachsen oder abnehmen, wenn nicht auch zugleich die gegen überstehende Seite wächst oder abnimmet. Alleine weil bey dieser Versetzung der Seite AC, die Seite BC nicht immer einerley Lage behalten kan, sondern sich immer anders gegen AB neigen muß, damit sie beständig durch C gehe, so ist die Sache hier so vollkommen deutlich nicht, und also entfernen wir uns immer mehr und mehr von demjenigen, so auch blos durch den

den natürlichen Verstand; ohne vorhergehende Wissenschaft eingesehen werden kan, und werden je mehr und mehr gezwungen uns der bereits Abgeschnitzten Erläutnung zu bedienen, um einen oder den andern Schritt weiter zu thun.

§. 242. In der Betrachtung, welche wir vorhaben, kommen uns die bereits erkannten Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks zu Hülfe. Weil man setzt, daß in dem Dreieck CAB der Winkel CAB grösser sey als der Winkel B , welcher dem Winkel B gleich ist. F. 110. A notwendig auch die Seite AD der $AD = DB$, so muß auch dasjenige wenn man zu beiden der besagten E wollen beiderseits CD hinzu setzen; AD giebt mit dem Zusatz von DC , zwei Seiten des Dreiecks ADC , oder den Theil seiner Gränzen $AD + DC$. Die der AD gleiche Linie BD aber, wird nach eben dem Zusatz der DC , die ganze Linie BC . Diese BC muß demnach den beiden Linien $AD + DC$ gleich seyn. Nun ist $AD + DC$ notwendig grösser als AC , denn zwei Seiten in einem Dreieck zusammen genommen, sind allezeit grösser als die dritte Seite. Also wird auch BC , welche ebenfalls so viel beträgt als $AD + DC$, grösser seyn als AC . Daß ist, in dem Dreiecke ABC ist die Seite BC , welche dem grössern Winkel CAB entgegen gesetzt ist, notwendig grösser als die Seite AC , welche dem kleinern Winkel B entgegen steht, und dieses ist dasjenige, so erwiesen werden sollte.

§. 243. Ist demnach in einem Dreieck ein Winkel der Grösste unter allen, die in demselben vorkommen, so ist auch die Seite, die demselben entgegen liegt, die Grösste unter allen Seiten desselbigen Dreiecks. In einem gerade winklichten Dreieck ist allezeit der gerade Winkel selbst der Grösste unter allen Winkeln die in demselben Dreieck vorkommen. Denn wie wir IV, 224. gesehen, so sind die übrigen beiden Winkel, die ausser dem geraden in einem solchen Dreieck befindlich sind, notwendig spitzig, und folgender kleiner als der gerade Winkel. Es ist demnach auch die Seite welche in einem geradenwinklichten Dreieck dem geraden Winkel entgegen gesetzt ist, grösser als eine der übrigen. Und noch vielmehr ist in einem stumpfwinklichten Dreieck diejenige Seite, welche dem stumpfen Winkel entgegen steht, die grösste unter allen Seiten desselbigen Dreiecks. Man kan

IV. Kan hier eben den Schluß machen, welcher bey dem rechtwinklichten ~~Ausschnitt~~. Dreyeck angewandt worden, und die Sache ist an sich leicht einzusehen.

§. 244. Nun hätten wir noch eine einzige Betrachtung der Dreyecke übrig. Wir haben gesehen, wie sie aus einem Winkel und zween Seiten entstehen, welche denselben Winkel einschließen, IV, 98. und diejenige Eigenschaften der Dreyecke angemerkt, welche wir aus dieser Art die Dreyecke zusammen zu setzen, einsehen konnten. Wir haben Dreyecke aus ihren dreyen Seiten zusammen gesetzt, IV, 130. und diese Zusammenfügung zur Auflösung verschiedener nützlichen Aufgaben gebraucht. Endlich haben wir uns auch vorgestellt, wie ein Dreyeck aus einer geraden Linie und zween Winkeln werden möge. IV, 212. Es ist noch ein einziges zu betrachten übrig, nemlich, wie man ein Dreyeck aus einem Winkel an zween Seiten machen könne, welche diesen Winkel nicht einschließen.

§. 245. Oder, die Sache auf eine andere Art einzusehen, so haben wir ein Dreyeck zu machen, erstlich an eine gegebene gerade Linie AB von gegebener oder nach Belieben angenommener Länge, eine andere gerade Linie AC gesetzt, und so dann das Dreyeck mit einer neuen geraden Linie zwischen BC geschlossen. Zweitens haben wir, ein Dreyeck auszumachen, auf eine gerade Linie von beliebiger Länge AB, zweo andere gerade Linien AC und BC so gesetzt, daß ihre äußerste Punkte einander berührten, und die Größe dieser letztern geraden Linien ist ebenfalls gleich Anfangs bestimmt worden. Drittens hat man auf eine gerade Linie AB, zween Winkel gesetzt, den bey A und den bey B, von beliebiger Größe, und die geraden Linien AC und BC so lange fortgezogen, bis sie einander erreicht haben. Es bleibt noch übrig, daß wir ein Dreyeck machen, indem wir erstlich die AB hinlegen, ohne ihre Größe zu bestimmen, sodann an dieselbe AC setzen, welche mit der erstern einen Winkel von beliebiger Größe bey A mache, in dieser Linie AC ein beliebiges Punkt C annehmen, und dadurch die Größe dieser Linie bestimmen: so dann aber weiter aus C eine andere Linie CB von einer beliebigen, aber gleich Anfangs bestimmten Größe dergestalt legen, daß ihr äußerstes Punkt in die Linie AB falle.

§. 246. Bey dieser Art die Dreyecke auszumachen, kommt das meiste zu bedenken vor, und wir müssen uns, damit wir alles genau verstehen, erst vorstellen, wie und auf was Art gerade Linien fallen müß-

müssen, welche aus einem Punct, so ausser einer geraden Linie gegeben worden, an diese gerade Linie geleyet werden, damit sie von dieser oder jener Länge werden. Man nehme demnach ein Punct C ausser der geraden Linie AB wo man wil, und lasse aus demselben erstlich eine Perpendicularlinie auf AB fallen, diese ist CD. Sodann ziehe man auch eine andere Linie CE aus eben dem Punct an AB nach Belieben schief, so wird CDE ein geradewinklichtes Dreyeck werden, in welchem CE dem geraden Winkel bey D entgegen gesetzt ist, und demnach ist CE nothwendig grösser als die Perpendicularlinie CD IV. 243. Und man siehet hieraus ein, wie es denn auch die blossse Vernunft ohne vieles Nachdenken giebt, daß unter allen geraden Linien CD, CE die aus einem gegebenen Punct C an eine andere gerade Linie AB gezogen werden können, die Perpendicularlinie die aller kürzeste sey. Denn wenn man eine andere gerade Linie an statt der CE ziehen wolte, so würden doch die Gründe, aus welchen wir unsern Beweis hernehmen, einerley bleiben, und von einer jeden geraden Linie, welche wie CE gezogen worden, eben dasjenige zu erweisen seyn, so von der CE gezeigt worden.

§. 247. Kan nun aus C auf AB keine gerade Linie gezogen werden, die kürzer wäre als die Perpendicularlinie, und man wil aus einem gegebenen Winkel CED, der Seite CE und der Seite CD ein Dreyeck machen, so muß die Seite CD nicht kleiner angenommen werden als die Perpendicularlinie, die aus dem Punct C auf AB kan gezogen werden, sonst würde die Linie CD die AB niemals erreichen, und könnte das Dreyeck demnach nicht geschlossen werden.

§. 248. Die Perpendicularlinie die aus C auf AB kan gezogen werden, ist die Entfernung des Puncts C von der AB. Jederman misst die Entfernung eines Puncts von einer Linie durch dieselbe, und man kan sich sonst keine geschickte Art vorstellen, nach welcher die Entfernung eines Puncts von einer geraden Linie zu messen wäre. Bedient man sich dieses Begriffs, so siehet man leicht, daß man aus dem Punct C keine Linie ziehen kan, welche die gerade Linie AB erreichte, und doch kleiner wäre als die Entfernung des Puncts C von derselben AB.

§. 249. Wil man, nachdem man dergestalt aus dem Punct C auf die gerade Linie AB eine Perpendicularlinie CD fallen lassen, wie auch eine andere schiefe CE, noch eine andere schiefe Linie CF durch eben das Punct C, an eben die Linie AB

IV.

Abchnitt

F. III.

F. II.

Na

AB

IV. AB ziehen, so ist die äussere derselben CF die nemlich von der Perpendicularlinie CD am weitesten entfernt ist, nothwendig grösser als die innere CE. Denn weil der Winkel CED nothwendig spitzig ist, denn bey D ist der rechte Winkel, so muß seine Ergänzung zu zwey geraden Winkeln, oder der Winkel CEF stumpf, und das Dreieck CEF stumpfwinklicht seyn. Demnach ist die Seite desselben CF dem stumpfen Winkel bey E, und die andere CE dem spitzigen bey F entgegen gesetzt. Es ist also die erstere Linie CE nothwendig kleiner als die andere CF. IV, 243.

§. 250. Ist nun aber dieses, daß die schiefen Linien CE, CF immer desto grösser und grösser fallen, je weiter sie sich von der Perpendicularlinie CD entfernen, so ist auch nicht schwer einzusehen, daß wenn ihrer verschiedene wie hier die zwey CE und CF an eine Seite der Perpendicularlinie CD gezogen werden, ohnmöglich zwey derselben einander gleich seyn können. Denn wenn man zwey derselben vergleicht, welche man will, so muß nothwendig eine derselben von der Perpendicularlinie CD weiter entfernt seyn als die andere, gleichwie CF weiter von CD absteht als CE, und demnach die eine, CF, grösser seyn als die andere CE.

§. 251. Es ist keine gerade Linie so gros daß man sie nicht aus C an AB anbringen könnte, daß nemlich ihr äusserstes Punct wie hier das Punct F in AB falle, wenn man nur AB so sehr verlängern darf als man will, und dieses ist an sich selbst klar. Denn wenn es nicht so wäre, und BF wäre etwa zu lang, so könnte man nur AB weiter fort ziehen, weil dieses sich ohne Ende thun läßt, so muß endlich AB lang genug werden, daß das äusserste Punct die Linie AF, oder einer andern dergleichen noch in dieselbe fallen kan. So bald als DA so groß gemacht wird als CF, wird dieses gewiß geschehen, weil jederzeit DF kleiner ist als CF. IV, 243.

§. 252. Auf der andern Seite der Perpendicularlinie kan man eben dergleichen schiefe Linien ziehen als CE und CF, und von eben der Länge welche diese haben. Man mache De so groß als DE, und ziehe Ce, so ist auch $Ce = CE$. Denn von den Puncten der geraden Linie AB, welche von D gleich weit entfernt sind, nemlich von den Puncten E und e ist auch das Punct C der Perpendicularlinie CD gleich weit entfernt, und diese Entfernungen werden durch Ce, CE gemessen. Der Satz ist oben IV, 166. da gewesen, und wenn man sich

desselben nicht so gleich erinnern sollte, wird man hoffentlich nichts IV.
destoweniger zugeben, daß Ce der CE gleich sey. Denn es ist dieses ^{Abchnitt.}
auch bloß mit dem natürlichen Verstand leicht einzusehen, oder wenn
man auf die erste Gründe zurück gehen wil, daraus, weil in den bey-
den Dreyecken CDE und CDe die geraden Winkel bey D , einander
gleich sind, die Seite DE aber man der Seite De gleich genommen,
und CD den beyden Dreyecken CDE , CDe gemeinschaftlich ist. Denn
hieraus folget, daß auch die dritten Seiten CE und Ce dieser Dreyecke
einander gleich seyn.

ben,
Wi
Ma
CF
und
mac
Pdur
neht

n wir betrachten, um deutlich einzuse-
b zwoen geraden Linien, die denselben
ein Dreyeck zusammen zu setzen sey.
e gerade Linie AB vor, auf welcher
: steht. Aus dem Winkel CFB nun,
e andern Seite, ist ein Dreyeck auszu-
aß diese zwote Seite zwar so groß seyn
: Man kan sie aber auch grösser
n wie man wil. Nimmet man nun
vor diese zwote Seite eine Linie an, die grösser ist als CD aber kleiner
als CF , und leget sie aus C an die gerade Linie AB , so kan sie nicht
anders als zwischen CF und CD fallen. Denn sollte sie ausser der CF
nach A zu, fallen, so müste sie grösser seyn als CF . IV, 249. Es wird
demnach aus dem Winkel CFB , aus der Seite CF und aus der Sei-
te CE zwar das Dreyeck CFE bestimmt, aber man kan aus eben
diesen Dingen auch noch ein anderes Dreyeck machen. Denn man
kan auch auf die andere Seite der CD , wie IV, 252. gewiesen worden,
eine gerade Linie Ce setzen, welche der CE , gleich ist, und also das
Dreyeck CFe aus eben dem Winkel CFB , und zwoen geraden Linien
 CF , und $Ce = CE$, ausmachen.

S. 254. So oft man demnach einen Winkel CFB annimmt, eine
Seite CF welche an demselben lieget, und eine andere Seite CE ,
welche dem Winkel F entgegen gesetzt ist, welche letztere CE aber klei-
ner ist als CF , so werden daraus zwey Dreyecke CFE und CFe , wel-
che so wohl nach ihrer eigenen Grösse, als auch nach der Grösse ihrer
übrigen Seiten und Winkel, verschieden sind, wie dieses aus der Fi-
gur selbst augenscheinlich ist.

S. 255. Wolte man aber Cf eben so groß nehmen, als CF , so
wür-

IV. würde wieder nur ein einziges Dreieck können beschrieben werden, und
 Abschnitt. zwar würde es ein gleichschenklisches seyn. Wir kennen aber diese Art
 der Dreiecke zu gut, als daß wir uns bey denselben länger aufhalten
 sollten.

§. 256. Will man endlich aus dem Winkel CEB, aus der gegebenen Seite CE und einer andern CF, die größer ist als CE, ein Dreieck beschreiben, so kan man zwar die gegebene zweite Seite wieder auf beyde Seiten der Perpendicularlinie CD legen, einmal nemlich in CF und das andere mal in Cf, aber nur eine dieser Linien, nemlich Cf ist dem Winkel CEB entgegen gesetzt, die andere CF machet zwar auch mit der CE und AB ein Dreieck, nemlich CFE, aber es kommet in demselben der Winkel CEB, welchen man doch in das Dreieck bringen sollte, nicht vor, sondern seine Ergänzung zu zweyn geraden Winkeln CEA. Und ist demnach nur das einzige Dreieck CEF aus dem gegebenen Winkel CEB, und aus den geraden Linien CE und Cf = CF zusammen gesetzt. Es wird demnach aus einem gegebenen Winkel und zweyn geraden Linien, die den Winkel nicht einschließen, nur einerley Dreieck, wenn die Seite so dem Winkel entgegen gesetzt werden sol, größer ist als diejenige, welche an demselben spitz zu liegen kommen.

F. 113. §. 257. Wenn zwey Dreiecke nach dieser Art beschrieben werden, so sind nothwendig auch ihre übrige Seiten und Winkel, wie auch die Dreiecke selbst gleich. Oder deutlicher, wenn man zwey Dreiecke hat, ABC und abc, und man findet, daß in demselben die Winkel bey A, a, einander gleich sind, daß die Seite AC der Seite ac gleich sey, und CB der cb, so kan man schliessen, daß auch die Dreiecke selbst einander gleich seyn, daß AB gleich sey der ab, und der Winkel ACB dem Winkel c, und folgendes auch CBA dem b. Man muß aber auch dieses wissen, daß CB größer sey als CA, denn sonst könnten diese Schlüsse falsch seyn. Man kan beständig den Winkel a auf A bringen, weil diese Winkel einander gleich sind, und weil auch ac der AC gleich ist, so kan es nicht anders seyn, es muß, so bald die Seite ac aus dem Punct A auf AC geleyet worden, das Punct c in C fallen. Ist nun CB größer als CA, und folgendes auch cb größer als ca, so kan es nicht anders seyn, es muß cb auf CB fallen, weil cb der CB gleich ist, und von C innerhalb des Winkels CAB eine dergleichen Linie nur einmal gesetzt werden kan. IV, 256. ... Fiele cb außer CB in CD, so wären aus dem Punct C zwey gerade Linien an AB gezogen, und

und diese wären einander gleich, wir haben aber gesehen, daß dieses IV. bei den Umständen unserer Figur nicht seyn könne. Fällt aber cb auf CB , so fallen die ganzen Umkreise der Dreiecke CAB , cab zusammen, woraus man leicht sieht, daß so wohl die Dreiecke selbst, als ihre übrigen Seiten, und die Winkel welche zwischen gleichen Seiten liegen, einander gleich seyn müssen.

§. 258. Dieser Satz ist allgemein, und wir können aus demselben besondere Sätze heraus bringen, wenn wir uns Dreiecke von besonderer Art vorstellen, in welchen die angegebene Bedingungen, aus welchen wir auf ihre Gleichheit geschlossen, anzutreffen sind. Gesezt, es seyen die Winkel A und a gerade, und folgendes die zwey Dreiecke CAB und cab geradenwinklich, und ihre Seiten CA , ca , wie auch CB , cb seyen einander noch gleich, so werden die übrigen Seiten AB , ab , die Winkel welche zwischen gleichen Seiten liegen, und die Dreiecke selbst gleich seyn. Denn dieses, daß $AC = ac$, und $CB = cb$, sind die Bedingungen, aus welchen wir erst besagte Gleichheiten ableiten können, wenn nur auch die Winkel bey A und a gleich, und die Seiten CB , cb grösser sind als die Seiten CA , ca . Nun aber sind diese Bedingungen nothwendig da, wenn die Winkel A , a gerade sind. Denn alle gerade Winkel sind einander gleich, und die Seiten, die in solchen Dreiecken den geraden Winkeln entgegen gesezt sind, sind nothwendig grösser als die übrigen. IV, 243. Demnach kan man in zweyen geradenwinklichten Dreiecken bloß aus der Gleichheit zweier Seiten, ob diese zwar die geraden Winkel nicht einschliessen, die Gleichheit der Dreiecke, der übrigen Seiten und der Winkel zwischen den gleichen Seiten, schliessen.

§. 259. Eben so ist es auch mit stumpfwinklichten Dreiecken. Nur muß man auch hier die Gleichheit der stumpfen Winkel zum Grunde setzen, weil stumpfe Winkel auch ungleich seyn können, sind aber die Winkel A und a stumpf und einander gleich, ist ferner die Seite CA gleich der Seite ca , und CB gleich der Seite cb , so sind auch dieser Art Dreiecke gleich, und ihre übrigen Seiten, und die Winkel, welche zwischen den gleichen Seiten liegen. Denn daß CB grösser sey als CA , welches in dem allgemeinen Satz mit als eine Bedingung erfordert worden, liegt hier wieder in der Natur dieser Dreiecke selbst. So bald ein Dreieck stumpfwinklich ist, muß nothwendig

IV. wendig die Seite, welche dem stumpfen Winkel entgegen-steht, größ-
 Abschnitt. sey seyn als eine der übrigen.

§. 260. Dieses sind die Zusammensetzungen der geraden Linien, welche wir machen konten, indem wir ihrer drey annahmen. Es ist nicht nöthig daß wir auch die Figuren besonders betrachten, welche vier gerade Linien einschließen, und auf die Eigenschaften derselben so genau Acht haben: als bey den Dreyecken geschehen, und zum Theil noch geschehen muß. Dasjenige so von einigen derselben in den Anfangsgründen zu wissen nöthig ist, haben wir an seinem Ort angebracht, und das übrige wird in dem folgenden vorkommen. Noch viel weniger ist es nöthig, daß wir die Eigenschaften der übrigen Figuren, die mehr als vier Seiten haben, uns insbesondere weitläufig vorstellen. Man würde damit niemals fertig werden, und doch könnte diese Betrachtung in Anwendung der Geometrie wenigen Nutzen haben. Die besondere Arten derselben, welche nemlich gleiche Seiten und gleiche Winkel haben, welche noch ins besondere betrachtet werden müssen, lassen sich nicht wohl ohne der Kenntniß des Circels abhandeln, zu dessen besonderer Betrachtung wir uns demnach nunmehr wenden.

Fünf

V. Fünfter Abschnitt.

V.
Abschnitt.

Von geraden Linien und Winkeln bey den Cirkelkreisen.

Erste Eigenschaften der Cirkel.

S. 1.

Alle Cirkel, welche gleiche Halbmesser haben, sind so wohl selbst einander gleich, als auch ihre Umkreise. Solte man dieses nicht so gleich einsehen können, darf man nur zwei Scheiben, welche mit gleichen Halbmessern beschrieben worden, in Gedanken dergestalt auf einander legen, daß ihre Mittelpuncte in eines zusammen fallen. Es werden so dann auch ihre Umkreise zusammen fallen, man mag im übrigen die Cirkel um ihre Mittelpuncte drehen, wie man wil. Und dieses siehet man daraus, weil wenn man um einen gegebenen Mittelpunct mit einer bestimmten Oefnung des Cirkels einen Kreis beschreibet, dieser nicht verschieden werden kan, man mag anfangen wo man wil, und die Spitze, welche den Umkreis beschreibet, so oft man wil, herum führen. IV, 89.

§. 2. Hieraus schliessen wir, daß der Cirkelkreis um und um auf einerley Art gekrümmt seyn müsse, nicht etwa wie die Linie der 115. Figur ABCD, welche bey A und C viel stärker gekrümmt ist als bey B, und da sie sonst überall einwärts gebogen ist, bey B eine Hohlung auswärts hat. Es lassen sich aber auch dergleichen Figuren um kein Punct also drehen, wie eine Scheibe um ihren Mittelpunct kan gedreht werden, so nemlich, daß kein Theil derselben aus den Gränzen, in welchen die Figur einmal eingeschlossen war, hinaus wiche. Eine Scheibe kan man in einem Loche herum drehen, welches die Scheibe um und um berührt, und sonst keine andere Figur.

F. 115.

§. 3. Es folget auch aus dieser sehr leichten Betrachtung, daß wenn die Umkreise zweyer Cirkel AB und CD durch ein gemeinschaftliches Punct E gehen, sie mögen nun in diesem Puncte einander schneiden, oder bloß berühren, es nicht möglich sey, daß sie beide einerley Mittelpunct haben. Denn da alle Cirkelkreise, welche um einerley

F. 116.

117. 118.

Mit.

V. Mittelpunct beschrieben sind, und deren Umkreise durch einenley Punct ~~Mittelpunct~~ E gehen, ganz auf einander fallen, und einander decken, so könnten die Cirkel AB und CD, deren Umkreise beide durch E gehen, nicht verschieden seyn, sondern würden ganz in einem einzigen Cirkel zusammen fallen, wenn ihre Mittelpuncte zusammen fielen: Wir reden aber von zween verschiedenen Cirkeln.

F. 119. §. 4. Fallen aber die Mittelpuncte zweer verschiedener Cirkeln AB, CD in eins zusammen, oder sind zween Cirkel AB und CD um einen einigen Mittelpunct E, beschrieben, so können die Umkreise derselben einander ohnmöglich erreichen. Denn wäre dieses, so fielen auch hier die Cirkel ganz in einen zusammen. Man pfleget zu sagen, daß dergleichen Umkreise einander parallel sind, und nennet die Figur, welche von denselben beschloffen wird, oder dasjenige, so übrig bleibt, wenn man aus der Scheibe A B die Scheibe C D heraus schneidet, einen Ring.

§. 5. Man siehet leicht, daß wenn man bey dergleichen Parallelcirkeln einen Halbmesser ECA ziehet, das Stück desselben CA von bestimmter Länge, und überall einerley seyn werde, man mag den Halbmesser ziehen, wo man wil. Denn es ist dieses Stück CA der Unterschied der beiden Halbmesser unserer Cirkel, und diese haben ihre bestimmte Größe, und sind um und um von einerley Länge.

F. 120. §. 6. Wenn man in einem Cirkel zween Halbmesser AB und BC ziehet, so bekommt man eine Figur ABC, welche durch dieselbe zween Halbmesser AB und BC, und durch den Bogen AC beschloffen ist. Man heisset dieselbe einen Ausschnitt, und AC den Bogen desselben Ausschnitts. Das Ueberbleibsel ABCDA, so von eben den zween Halbmessern AB und BC, und dem Bogen ADC beschloffen wird, kan man, wenn davon zu reden ist, wie wohl dieses eben nicht oft geschieht, ebenfalls einen Ausschnitt nennen.

§. 7. Sind zween Cirkel einander gleich, das ist, haben sie gleiche Halbmesser, und man machet in denselben zween Ausschnitte ABC, abc, deren Winkel an den Mittelpuncten B und b gleich sind; so sind auch die Ausschnitte selbst und ihre Bogen AC und ac gleich. Ist aber der eine Winkel größer als der andere, so ist auch der Ausschnitt welcher den größern Winkel hat, größer als der Ausschnitt mit dem kleinern Winkel, und der Bogen von jenem ist auch größer als der Bogen von diesem. Dieses siehet man gar leicht von selbst ein, voll

vollkommen deutlich aber wird es, wenn man nur die Spitzen der Winkel B und b, das ist, die Mittelpuncte der Cirkel auf einander bringt, da denn die Cirkel selbst, und ihre Umkreise zusammen fallen müssen. Stellet man sich vor, daß, nachdem dieses geschehen, so dann der eine Cirkel so lang um seinen Mittelpunct gedrehet werde, bis daß die Seite bc auf BC zu liegen-kommet: So siehet man beides, so gesetzt worden. Denn sind die Winkel b und B einander gleich, so fället nunmehr auch ba auf BA, und a in A, ist aber B grösser als b, so fällt A weiter hinaus als a.

§. 8. Hieraus folget umgekehret, wenn in zween gleichen Cirkeln, zween Bogen AC und ac gleich angenommen worden sind, und man ziehet ihre Halbmesser AB, ab und BC, bc; daß auch die Winkel B und b einander gleich seyn werden. Denn wenn diese Winkel B und b ungleich wären, so müßten auch die Bogen ungleich seyn, wie eben V. 7. erwiesen worden: welches aber demjenigen widerspricht, so man zum Grunde geleyet, daß nemlich die Bogen AC, ac gleich seyn.

§. 9. Aus der Gleichheit der Winkel B und b in zween gleichen Cirkeln, folgert man auch die Gleichheit der Ausschnitte ABC, abc auf eben die Art wie wir geschlossen, daß ihre Bögen AC und ac gleich seyn. Und man siehet leicht, daß hinwiederum aus der Gleichheit der Ausschnitte, deren Halbmesser einerley Grösse haben, auch die Gleichheit der Winkel an den Mittelpuncten, oder an den Spitzen der Ausschnitte, und die Gleichheit ihrer Bogen folge. Man kan sich nicht vorstellen, wie in zween gleichen Cirkeln entweder die Winkel B und b, oder die Bogen AC und ac, oder die Ausschnitte ABC, abc gleich seyn könnten, wenn die zwey übrigen von diesen drey Dingen in den beiden Cirkeln verschieden sind.

§. 10. Ziehet man demnach eine gerade Linie AB, durch eine andere CD perpendicular, wodurch bey E, da sich diese Linien schneiden, vier rechte und einander gleiche Winkel entstehen: Und nimmt das Punct E vor den Mittelpunct eines Cirkels an, welchen man beschreibet: So werden die Bogen AC, CB, BD, DA der vier Ausschnitte, in welche der Cirkel durch die gerade Linien AB, CD getheilet wird, so wohl, als die Ausschnitte selbst, alle gleich. Und wenn man demnach durch den Mittelpunct eines Circuls E zwey gerade Linien AB, CD ziehet, deren eine auf der andern perpendicular stehet, so wird der Cirkel so wohl als dessen Umkreis in vier gleiche Theile getheilet. Und

F. 121.

V. es ist ein jeder der vier Bogen AC, CB, BD, DA der vierte Theil des ganzen Umkreises, gleichwie ein jeder der vier Ausschnitte AEC, CEB, BED und DEA der vierte Theil der Scheibe ist, und man kan überhaupt sagen, daß ein Ausschnitt, dessen Winkel gerade ist, der vierte Theil des Cirkels, und sein Bogen der vierte Theil des Umkreises sey.

S. 11. Demnach machen jede zweyen unserer Ausschnitte, die Helfte des Cirkels, und ihre beide Bögen die Helfte des Umkreises aus, und eine jede gerade Linie AB oder CD, welche durch den Mittelpunct eines Cirkels gezogen ist, theilet so wohl den Cirkel selbst, als dessen Umkreis in zwey gleiche Theile. Man kan dieses auch leicht sehen, wenn man einen auf Papier gezeichneten Cirkel dergestalt zusammen leget, daß der Bruch durch den Mittelpunct gehet, und, nachdem dieses geschehen, ihn so dann noch einmal, nach rechten Winkeln zusammen falzet, da denn die vier Ausschnitte, in welche er dergestalt zertheilet worden, auf einander zu liegen kommen, und einander decken werden; doch wem sind diese Dinge unbekannt?

S. 12. Eine gerade Linie AB, welche durch den Mittelpunct eines Cirkels gezogen worden, und die sich zu beiden Seiten an dem Umkreis desselben in A und B endiget, von welcher wir eingesehen, daß sie den Cirkel und seinen Umkreis gleich theile, heisset der Durchmesser des Cirkels. Derselbe ist zweymal so groß als der Radius, denn der Mittelpunct theilet den Durchmesser in zwey gleiche Theile, und eben deswegen nennet man den Radius auch den Halbmesser.

F. 122. S. 13. Man siehet auf eben die Art ein, wenn man einen Ausschnitt von beliebiger Größe ABC annimmt, und theilet seinen Winkel B in so viele gleiche Theile, als man wil, vermittelst der Halbmesser BD, BE, BF, daß dadurch auch so wohl der Ausschnitt selbst in kleinere Ausschnitte, ABD, DBE, EBF, FBC, die einander gleich sind, getheilet werde, als auch der Bogen AC in gleiche Bogen AD, DE, EF, FC. Denn weil die Winkel bey B alle gleich sind, so müssen auch alle die angezeigten kleinen Ausschnitte so wohl als ihre Bogen gleich seyn V. 7. Wiederum kan man aus der Gleichheit der Bogen AD, DE, EF, FC, oder auch aus der Gleichheit der Ausschnitte ABD, DBE, EBF, FBC, auf die Gleichheit ihrer Winkel bey B schließen, und wird demnach die Theilung des Winkels ABC, die Theilung des Bogens AC, und die Theilung des Ausschnittes ABC zugleich verrichtet, und so bald man eine von diesen Theilungen zur-

ge gebracht, hat man auch die andere und die dritte, oder man kan sie V;
doch leicht haben, bloß indem man die Halbmesser BD, BE, BF ge
hörig ziehet.

§. 14. Wir haben oben IV. 94. gesehen, daß der Umkreis eines Cirkels eine gerade Linie in mehr als einem Punct schneide, aber nicht eigentlich bestimmt, wie oft dieses geschehe, ob nur zweymal, oder ob die gerade Linie den Umkreis mehr als zweymal schneiden könne. Gegenwärtig ist uns daran gelegen, daß wir wissen, wie oft dieses eigentlich geschehen könne. Es sind aber nicht mehr als zween Durchschnitte möglich. Denn wenn um den Mittelpunct A ein Cirkelkreis beschrieben wäre, welcher die gerade Linie DB in den drey Puncten DCB berührt oder schneidet, oder wenn die krumme Linie BCD, welche drey Puncte B, C, D mit der geraden Linie DB gemeinschaftlich hat, ein Cirkel wäre: so könnte man von dem Mittelpunct desselben A drey gerade Linien AB, AC, AD ziehen, welche Halbmesser des Cirkels und folgendes einander gleich wären. Da nun aber diese Puncte B, C und D der geraden und der krummen Linie gemeinschaftlich sind, so müßten von einem Punct ausser der geraden Linie DB, nemlich von A, an diese, drey andere gerade Linien AB, AC, AD können gezogen werden, welche einander gleich sind. Dieses aber gehet ohnmöglich an, wie wir IV, 249. deutlich gesehen haben. Denn man stelle sich vor, daß aus A auf die gerade Linie DB eine Perpendicularlinie gezogen sey, so fällt diese entweder auf AC oder nicht. Fällt die Perpendicularlinie auf AC das ist, ist AC selbst auf DB perpendicular, so ist nothwendig AB größer als AC, weil die Perpendicularlinie die kleinste der geraden Linien ist, die aus A an DB fallen. Fällt aber die Perpendicularlinie nicht auf AC, sondern zwischen AC und AD, so ist die AB, so von der Perpendicularlinie weiter abweicht, größer als die AC, welche ihr näher lieget. Sind aber die drey geraden Linien AB, AC, AD einander nicht gleich, so ist es auch nicht möglich, daß die krumme Linie BCD, welche in dreyen Puncten mit der geraden Linie DB zusammen fällt, ein Cirkel sey, denn in einem Cirkel sind alle Halbmesser, dergleichen hier AB, AC, AD wären, einander gleich; oder ist die krumme Linie BCD ein Cirkel, so fällt sie mit der geraden Linie DB nicht in drey Puncten zusammen, und schneidet also oder berührt sie nicht in dreyen Puncten. Noch vielweniger also kan der Cirkelkreis von einer geraden Linie in vier oder noch mehreren Puncten geschnitten werden, welches zu erweisen war.

F. 123.

V. S. 15. Hieraus sehen wir wiederum, daß es nicht möglich, daß
 Abschnit. ein Cirkelkreis irgendwo wie die krumme Linie ABCD in der 115. Fi-
 gur einwärts gebogen sey, wie wir dieses bereits geschlossen haben, da
 wir bemerkt, daß ein Cirkelkreis um und um auf einerley Art gekrüm-
 met sey V. 2. Denn wäre ein Cirkel irgendwo einwärts gebogen, so
 müßte ihn die gerade Linie in mehr als zwey Puncten schneiden kön-
 nen, wie die eben gebrauchte 123. Figur weist.

F. 124. S. 16. Wenn man demnach zwey Puncte A und B in dem Umkreis ei-
 nes Cirkels nach Belieben annimmt, und ziehet sie mit einer geraden Linie
 AB zusammen, so fällt diese gerade Linie ganz innerhalb des Cirkels, und
 theilet sowohl denselben als seinen Umkreis in zwey Theile. Und diese Eigen-
 schaft hat der Cirkel mit einer jeden krumlinichten Figur, deren Umkreis
 überall auf einerley Art gebogen ist, gemeinschaftlich. Ja eben daraus
 schließet man, daß die krumme Linie überall auf einerley Art gebogen sey.
 Eine solche gerade Linie AB heisset eine Sehne, und die zweyen Bögen
 AFB und AGB, in welche sie den Umkreis theilet, heißen die Bogen
 dieser Sehne. Die zwey Theile aber in welche sie den Cirkel zerschnei-
 den, oder die Figuren AFB und AGB, welche die Sehnen mit ihrem
 Bogen einschließen, heißen Abschnitte.

S. 17. Man kan eine Sehne so ziehen, daß sie durch den Mittel-
 punct C gehe, wie hier DE. Diese theilet so dann den Cirkel in zwey
 gleiche Theile, denn sie ist der Durchmesser V. 12. Wir sehen, daß
 dieser Durchmesser DE mit der Sehne AB parallel lauffe, oder wo-
 nigstens sie nicht schneide: Denn man kan ihn allezeit auf die Art zie-
 hen. So ist der eine Abschnitt AFB, welcher von der Sehne AB und
 dem Bogen AFB beschloffen wird, und in welchen der Mittelpunct C
 nicht lieget, kleiner als der andere AGB, welchen eben die Sehne AB
 mit dem Bogen AGB beschließet, und innerhalb welchem der Mittel-
 punct C befindlich ist, und der Bogen AFB ist kleiner als der andere
 AGB. Derowegen wird auch der Abschnitt AFB, in welchem der
 Mittelpunct nicht lieget der kleinere, und dieser AGB, in welchem der
 Mittelpunct anzutreffen ist, der grössere Abschnitt genennet.

Von den Sehnen der Cirkel.

S. 18. Ziehet man nun eine Sehne, AB, in einem Cirkel, wie
 man man wil, nur nicht durch den Mittelpunct, und ziehet aus dem
 Mittelpunct des Cirkels C zwey Halbmesser CA und CB an diese
 F. 125. Sehne, und folgendes an die Puncte A und B, in welchen die Sehne
 den

den Cirkelkreis schneiden würde, wenn man sie verlängerte: So be- V.
kommt man ein gleichschenklisches Dreieck ABC , von welchem die *Mittlinie*
Sehne AB die Grundlinie ist, und der Mittelpunkt C ist die Spitze des
Winkels, welcher der Grundlinie entgegen steht. Denn da die zwei
Seiten AC und BC Halbmesser eines Cirkels sind, so sind sie noth-
wendig gleich. Es wird sich demnach auf dieses Dreieck alles dasje-
nige anwenden lassen, so wir von den gleichseitigen Dreiecken längst
eingesehen: Nur müssen wir hier die Namen verändern, und die
Grundlinie AB nunmehr die Sehne, und das Punct C den Mittel-
punct nennen.

§. 19. Man stelle sich vor, daß aus dem Mittelpunkt C die ge-
gerade Linie DF auf die Sehne perpendicular gezogen sey. Diese
wird so wohl die Sehne selbst, als auch den Winkel ACB in zwey
gleiche Theile theilen. Denn dieses ist von allen gleichschenklischen
Dreiecken IV, 157. erwiesen worden. Wird aber der Winkel ACB
durch die Linie CF in zwey gleiche Theile getheilet, und man verlän-
gert dieselbe bis an den Umkreis in E , so muß eben diese Linie auch
den Bogen der Sehne AB in E in zwey gleiche Theile theilen V, 12.
Ja weil auch der Winkel ACD , welcher entstehet, indem man die Li-
nie CE auf die andere Seite verlängert, dem Winkel DCB gleich ist,
denn sie sind die Ergänzung zweier gleichen Winkel ACE und ECB zu
zweyen rechten Winkeln; so ist auch der Bogen AD dem Bogen DB
gleich, und die gerade Linie CF , welche aus dem Mittelpunkt eines
Cirkels C auf seine Sehne AB perpendicular fällt, theilet nicht nur den
einen Bogen derselben AEB , sondern auch den andern ADB in zwey
gleiche Theile.

§. 20. Weil, wie wir gezeigt, und wie auch vor sich leicht zu
sehen ist, die gerade Linie CE die einzige ist, welche aus C auf AB
perpendicular gezogen werden kan, und eben diese einzige Linie auch
die AB so wohl als den Winkel ACB , und folgendes die Bogen AEB
und ADB in zwey gleiche Theile theilet: So kan man diese Linie auf
verschiedene Arten bestimmen. Man kan, wie bereits geschehen, sagen,
daß DE diejenige Linie sey, welche durch den Mittelpunkt auf die Se-
hne AB perpendicular fällt. Man kan eben diese DE die Linie nen-
nen, welche durch den Mittelpunkt gehet, und die Sehne in zwey glei-
che Theile schneidet. Man kan sie dadurch ausdrücken, daß man an-
gibt, sie stehe auf der Sehne AB perpendicular, und theile dieselbe in
zwey gleiche Theile, oder sie stehe auf der Sehne perpendicular, und

V.
Abschnitt.

theile den Bogen AEB oder ADB in zwey gleiche Theile, oder sie gehe durch den Mittelpunct C, und theile den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, oder auch sie theile so wohl die Sehne AB als den Bogen AEB oder ADB, welcher zu dieser gehöret, in zwey gleiche Theile. Alles dieses thut die einzige Linie DE, und sie wird durch alle diese Beschreibungen bestimmt.

S. 21. Man kan hieraus verschiedene Sätze machen, welche alle nunmehr keines weitern Beweises benöthiget sind, nachdem wir gesehen, daß sie nichts neues enthalten. Sie sagen nichts anders, als daß, wenn man diese Linie AB auf diese oder jene Art bestimmt, sie alle die Eigenschaften haben müsse, von welchen wir schon eingesehen, daß sie dergleichen Linien zukommen. Doch wollen wir sie zum Ueberfluß berühren, und hin und her etwas anbringen, so zu kurzer Wiederholung des Beweises dienen kan.

S. 22. Wenn man sich vorstellt, daß man die Linie CF durch den Mittelpunct C dergestalt gezogen, daß sie die AB in zwey gleiche Theile theilet, so theilet sie die Grundlinie des gleichschenkligten Dreiecks ABC in zwey gleiche Theile, und ist folgendes auf diese Grundlinie AB perpendicular: IV, 156. sie theilet auch den Winkel ACB in zwey gleiche Theile, und folgendes auch die Bogen AEB und ADB.

S. 23. Wenn man annimmt, daß die CF auf die Mitte der AB perpendicular gesetzt sey, so siehet man daraus, daß sie auch durch den Mittelpunct C gehen muß, weil, wenn dieses nicht wäre, man aus C eine andere Perpendicularlinie auf AB fallen lassen könnte, welche AB in andere zwey gleiche Theile theilen würde, welches widersinnisch ist. Denn man kan eine gegebene gerade Linie nur auf einerley Art in zwey gleiche Theile theilen, und einerley Größe hat nicht verschiedene Helften. Gehet aber die dergestalt gezogene CF durch den Mittelpunct, so siehet man aus dem vorigen, V, 22. daß sie, wenn sie verlängert wird, auch die Bogen der Sehne AB gleich theilen müsse.

S. 24. Stehet EF auf AB perpendicular, und theilet auch den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, so muß sie, wenn man sie verlängert, durch den Mittelpunct gehen, weil man sonst eine andere gerade Linie aus dem Mittelpunct auf AB perpendicular ziehen könnte, welche verlängert den Bogen AB in zwey andere gleiche Theile theilen

len würde, so nicht seyn kan. Demnach theilet eben diese EF auch die Sehne AB in zwey gleiche Theile. V, 19.

V.
Abschnitt.

S. 25. Gehet die Linie CE durch den Mittelpunct C, und theilet den Bogen AEB in zwey gleiche Theile, so theilet sie auch den Winkel ACB des gleichschenkligen Dreyscks in zwey gleiche Theile. Woraus wieder fließet, IV, 55. daß sie auf AB perpendicular stehen, und diese gleich theilen müsse.

S. 26. Und wenn endlich FE so wohl die Sehne AB als auch ihren Bogen AEB in zwey gleiche Theile theilet, so siehet man daraus, daß sie auch auf AB perpendicular stehen, und wenn man sie verlängert, durch den Mittelpunct C gehen müsse, weil, wenn dieses nicht wäre, man aus C auf AB eine andere Perpendicularlinie ziehen könnte, welche V, 19. so wohl die AB als auch, wenn sie verlängert würde, den Bogen AEB in andere zwey gleiche Theile theilen würde, so ohnmöglich ist.

S. 27. Man siehet hieraus, daß die Theilung eines Cirkelbogens in zwey gleiche Theile nichts erfordere, so nicht bereits da gewesen und gezeigt worden wäre. Es sey der Bogen AB in zwey gleiche Theile zu theilen. Man ziehe seine Sehne AB und lege auf die Mitte derselben die Perpendicularlinie CD, diese wird, wenn man sie gehörig verlängert, auch den Bogen in D in zwey gleiche Theile theilen. Oder hat man den Mittelpunct C, so lasse man nur aus demselben auf AB die Perpendicularlinie CD fallen, und verlängere sie bis sie den Bogen schneidet. Oder man theile AB in zwey gleiche Theile, und ziehe durch den Mittelpunct derselben und durch den Mittelpunct des Cirkels C die gerade Linie CD. Alles dieses kommet in der Anwendung, wenn man Geometrisch verfähret, fast auf eines hinaus, wie man leicht sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will, diese Zeichnung wirklich zu machen.

F. 126.

S. 28. Es fließet aber auch aus diesen Sätzen die Anweisung den Mittelpunct eines Cirkels zu finden, welchen man etwa verlohren. Denn es muß ein jeder Cirkel einen Mittelpunct haben, und zwar nur einen einzigen, wie aus dem ersten Begriff dieser Figur leicht zu sehen ist. Es sey der Cirkel dessen Mittelpunct zu finden ist derjenige, welchen die 125 Figur vorstellet. Man ziehe eine Sehne desselben wie man will AB, und ziehe durch die Mitte derselben die gerade Linie DE auf die Sehne perpendicular. Diese Linie wird gewiß durch den Mit-

F. 125.

telpunct

V. telpunct gehen. V, 23. Und hat man DE beyderseits bis an den Umkreiß verlängert, so ist diese Linie ein Durchmesser des Cirkels, und wird folgendes von dem Mittelpunct des Cirkels in zwey gleiche Theile getheilet. Man darf also nur die also gefundene DE in C in zwey gleiche Theile theilen, so ist dieser Theilungspunct C auch der Mittelpunct des Cirkels.

S. 29. Fast auf eben die Art findet man den Mittelpunct eines Cirkels, welcher durch drey gegebene Puncte gehen soll. Es müssen aber diese drey Puncte nicht in gerader Linie liegen, sonst wäre kein Cirkel möglich, dessen Umkreiß durch dieselben hindurch ginge. V, 14. Solte er beschrieben werden, so müßte er drey Puncte mit einer geraden Linie gemeinschaftlich haben, welches nicht seyn kan. Sind aber
F. 127. drey Puncte gegeben, welche nicht in gerader Linie stehen, als hier A, B und C, und man soll den Mittelpunct des Cirkels finden, welchen durch sie alle dreye durchgehet, so wiederhole man nur die Arbeit, welche eben gewiesen worden ist. Man ziehe zweyen dieser Puncte mit einer geraden Linie zusammen, welche man will, zum Exempel A, B, und setze auf AB die Perpendicularlinie DE, welche jene in zwey gleiche Theile theilet. Eben so verfähre man auch mit BC, und setze auf deren Mitte die Perpendicularlinie FG, welche, wie leicht einzusehen ist, die vorige schneiden muß. Der Punct, in welchen sie einander schneiden, ist hier H, und dieser ist der gesuchte Mittelpunct; so daß, wenn man das Cirkelinstrument in H einsetzet, und durch A den Umkreiß eines Cirkels zu beschreiben anfängt, dieser auch durch B und C gehen muß. Denn weil DE an die Mitte der AB, auf diese Linie perpendicular gesetzt worden, so sind alle Puncte dieser Linie, und folgendes auch H von A und B gleich weit entfernt, wie wir dieses oben von einer jeden geraden Linie eingesehen, welche auf der Mitte einer andern perpendicular steht; IV, 165. und weil auch FG auf der Mitte der geraden Linie BC perpendicular steht, so sind auch alle Puncte dieser FG, und unter diesen wiederum das Punct H, von B und C gleich weit entfernt: und wenn man demnach um den Mittelpunct H durch A einen Cirkel zu beschreiben anfängt, so muß derselbe auch durch B und C gehen.

S. 30. Hieraus siehet man, daß durch drey Puncte A, B und C welche in dem Umkreiß eines Cirkels liegen sollen, dessen Mittelpunct bestimmt werde, und nicht anders als in H fallen könne. Denn kan derselbe weder ausser der DE, noch ausser der FG fallen, das ist,

ist, fällt der Mittelpunct so wohl in die gerade Linie DE als auch in die andere FG, so fällt er allerdings nothwendig in H. Und daraus folgt; daß durch die drey Puncte A, B und C ohnmöglich zween verschiedene Cirkelkreise gehen, und noch vielweniger drey oder mehrere. Denn wenn man sich auch zween Cirkel vorstellen will, die durch diese Puncte A, B und C gehen, so muß man doch zugeben, daß ihre Mittelpuncte zusammen in H fallen. Nun gehen ihre Umkreise beyde durch den gemeinschaftlichen Punct A, oder B, oder C. Zwey Cirkelkreise aber, die um einen Mittelpunct dergestalt beschrieben worden, daß ihre Umkreise durch ein Punct A oder B, oder C gehen, fallen ganz zusammen, und sind nicht verschieden. V, 1.

§. 31. Oder man setze zu

der r
die s
B el
und
nicht
ie DI

daß die
B und
te A und
ine Per
en Linien
irkelkreise
ne seyn:
B stehet,

F. 128.

ohl des einen als des andern dieser Cirkel
ber eben diese Arbeit mit eben den Ver
dern zween Puncten vornehmen, nämlich
e BC ziehen, welche eine Sehne so wohl

in dem einen als in dem andern dieser Cirkel seyn wird, man kan auf die Mitte dieser Sehne eine Perpendicularlinie FG setzen, welche wieder durch den Mittelpunct beyder Cirkel gehen muß. Demnach fallen die Mittelpuncte dieser Cirkel in H zusammen, und es sind zween Cirkel um einerley Mittelpunct H durch den Punct A oder B beschrieben, das ist, es ist etwas geschehen, welches nicht seyn kan. Es sind demnach nicht beyde krumme Linien die durch A, B, und C gehen, Cirkelkreise: oder sind sie Cirkelkreise, so gehen sie nicht beyde durch diese drey Puncte.

§. 32. Und zween verschiedene Cirkelkreise können nicht drey Puncte gemeinschaftlich haben; das ist, sie können einander nicht in drey Puncten schneiden. Also noch vielweniger in vierten oder mehreren. Dieses ergänzt wieder einen von unsern ersten Sätzen. Wie haben gesehen, daß zween Cirkelkreise einander in mehr als einem Puncte schneiden können. IV, 96. Jetzt ist gezeigt worden, daß dieser Durchschnitts aufs höchste zween und nicht mehrere seyn können.

P p

§. 33. Zie

V. S. 33. Zieht man zwei Sehnen in einem oder in gleichen Cirkeln, welche Sehnen einander gleich sind, so werden auch ihre Bogen gleich, wie auch ihre Entfernungen von dem Mittelpuncte. Die bloße natürliche Einsicht läßt uns daran nicht zweifeln, so bald wir bedenken, daß der Cirkelkreis um und um einerley Krümme, einerley Rundung hat. V. 2. Wenn man demnach auf einer Seite desselben eben dasjenige thut, was man auf der andern vornimmt, so können ohnmöglich die übrigen Dinge, welche von diesen Zusammensetzungen abhängen, ungleich werden. Wir haben in dem Cirkel der um den Mittelpunct C beschrieben ist, die beyden Sehnen AB, und DE von gleicher Größe gesetzt. Durch dieselbe sind die beyden Bogen AB und DE abgeschnitten worden. Welcher von diesen beyden soll wohl größer seyn, und was hat man vor Ursache zu gedenken, daß AB größer sey als DE, welches einen nicht auch dahin führen könnte, daß man DE größer zu seyn setzte als AB? Eben dieses muß man auch von den Entfernungen dieser Sehnen von dem Mittelpunct C sagen.

S. 34. Die Verknüpfung aber dieser Wahrheit mit dem vorhergehenden kan man dergestalt zeigen. Man ziehe aus dem Mittelpunct C gerade Linien, auf die erst gezeichnete Sehnen perpendicular, und bezeichne sie mit CF, CG. Diese werden die Sehnen in zwei gleiche Theile theilen, V. 19. und wenn man sie fortziehet, bis in H und I, auch ihre Bogen. Da nun aber gesetzt worden, es sey $AB = DE$, so müssen auch die Helften dieser Linien AF und DG einander gleich seyn. Man ziehe ferner die zween Halbmesser CA und CD, welche einander nothwendig gleich seyn werden, so haben die zwey rechtwinklichte Dreyecke ACF und DCG zwei gleiche Seiten, nemlich $AC = CD$, und $AF = DG$. Und sind demnach so wohl ihre übrige Seiten gleich, als auch ihre Winkel, welche zwischen gleichen Seiten liegen. IV, 258. Die dritten Seiten dieser Dreyecke, deren Gleichheit wir eben geschlossen, sind CF und CG, und diese sind die Entfernungen deren Sehnen AB, DE von dem Mittelpuncte, daß also so erwiesen ist, daß gleiche Sehnen von dem Mittelpunct des Cirkels, in welchen sie gezogen sind, gleiche Entfernungen haben. Unter den Winkeln aber der Dreyecke ACF und DCG, welche zwischen gleichen Seiten liegen, und demnach ebenfalls gleich sind, sind diejenige, deren Spitzen an C reichen. Die Winkel, nemlich ACF und DCG sind einander gleich. Demnach haben die Ausschnitte ACE und DCI einerley Winkel. Also sind auch ihre Bogen AH und DI gleich,

gleich, und weil AH die Hälfte ist von AHB , und DI die Hälfte von DIE , so müssen auch die ganzen Bogen AHB und DIE gleich seyn. V. Abschnitt.
Es ist also richtig daß die Gleichheit der Bogen AHB und DIE so wohl als die Gleichheit der Entfernungen der Sehnen von dem Mittelpunct, oder die Gleichheit der Perpendicularlinien CF und CG aus

gen Seiten derselben Dreyecke gleich seyn, CF nemlich $= CG$, und $AF = DG$. Das erste, daß $CF = CG$ ist eben dasjenige so wir gesetzt, daß nemlich die Entfernungen unserer Sehnen AB und DE von dem Mittelpunct gleich sind; aus dem zweyten aber $AF = DG$ folget die Gleichheit der Sehnen AB und DE gar leicht. Denn weil CF , CG auf dieselbe perpendicular gezogen worden, so sind AF und DG die Hälften der Sehnen. V, 19. Diese Hälften sind, wie erwiesen worden, gleich, also müssen auch die ganzen Sehnen gleich seyn.

§. 36. Endlich fließet auch aus der Gleichheit der Entfernungen CG und CF die Gleichheit so wohl der Sehnen als der Bogen; oder wenn $CG = CF$, so ist auch $AB = DE$, und $AHB = DIE$. Wir haben uns nicht lange hietben aufzuhalten. Weil $FC = CG$, und $AC = CD$, so haben die rechtwinkliche Dreyecke AFC und DGC zwey gleiche Seiten, $FC = CG$, und $AC = DC$. Demnach sind auch die übrigen Seiten AF und DG einander gleich, IV, 258. welches die Hälften sind der Sehnen AB und DE , welche Sehnen demnach zuwanden.

V. ebenfalls gleich seyn müssen, aus dieser Gleichheit der Sehnen aber ~~Wsknntz~~ folgt die Gleichheit ihrer Bogen, wie V. 33. gezeigt worden.

§. 37. Eine jede Sehne, welche nicht durch den Mittelpunct des Cirkels gehet, und welche folgendes keinen Durchmesser desselben abgiebet, ist kleiner als der Durchmesser. Haben aber zwei Sehnen verschiedene Entfernungen von dem Mittelpuncte, so ist allezeit diejenige Sehne kleiner, welche von dem Mittelpuncte weiter entfernt ist. Das erste siehet man aus der bereits betrachteten 129 Figur ein. Denn das Dreieck AFC ist bey F geradewinklicht, und folgendes die Seite AC grösser als AF. IV. 243. Die erste ist der Halbmesser, und die zweite die Helfte der Sehnen AB. Also ist auch der ganze Durchmesser grösser als die ganze Sehne.

F. 130. §. 38. Um aber das zweite einzusehen, so ziehe man in einem Cirkel einen Durchmesser AB, und setze auf die eine Helfte desselben verschiedene Perpendicularlinien DE, FG, welche in H und I verlängert, Sehnen des Cirkels abgeben, von welchen sie die Helften sind: so siehet man auch bloß daraus, daß die Helfte der Sehne DE, welche dem Mittelpunct C näher liegt, grösser sey als FG, die von diesem Puncte weiter entfernt ist; weil bey einer jeden krummen Linie die von A nach B gehet, und die, wie der Cirkelkreis, immer einwärts gekrümmt ist, die Perpendicularlinie, dergleichen DE und FG sind, immer kleiner werden, indem sie sich den Puncten A oder B nähern. Man kan aber auch von den äussersten Puncten der Sehnen D und F nach dem Mittelpunct C gerade Linien sich vorstellen, da denn so gleich klar wird, daß die Linie FG kleiner sey als DE, so bald man nur auf die Art und Weise, wie ein Cirkelkreis beschrieben wird, Acht hat. Indem dieses geschiehet, drehet sich der Halbmesser DC um C, und neiget sich, indem sein äusserstes Punct von D nach F gehet, immer mehr und mehr gegen den Durchmesser AB. Die Perpendicularlinien DE und FG sind die Entfernungen dieses äussersten Punctes des Halbmessers in seinen verschiedenen Lagen DC und FC. Und es ist demnach FG nothwendig kleiner als DE, und folgendes auch FI kleiner als DH. Da es verschwindet endlich die Sehne ganz, indem sie sich von dem Mittelpunct immer mehr und mehr bis an A entfernt, weil der Halbmesser FC endlich gar auf AC zu liegen kommt. Es wachsen also die Sehnen eines Cirkels von nichts bis zu der Grösse des Durchmessers, welcher die grösste Sehne ist, die ein Cirkel haben kan, und die halbe Sehnen wachsen von nichts bis zu der Grösse des Radius.

§. 39. Wit

§. 39. Will man aber die Sehnen mit ihren Bogen vergleichen, so muß man sagen, daß, indem der Cirkelbogen von dem Punct A an nach und nach zu beyden seiten auf einerley Art wächst, so nemlich, daß die gleichen Stücke AF und AI zugleich erzeugt werden, auch die Sehne des Bogens FI mit wachse, und grösser und grösser werde, bis endlich der Bogen zur Grösse des halben Umkreisses KAL angewachsen, da die Sehne so groß geworden als sie nur hat werden können, und nunmehr dem Durchmesser an Grösse gleich gekommen: und daß, indem der Bogen noch grösser wird als der halbe Cirkel, KAL, und nach und nach an d Ah, fAi, und so weiter, kommet, so daß die Sehne auf der andern Seite des Mittelpunctes nach B zu fallen muß, die Sehne auch wieder beständig abnehme, und zwar in einem fort, bis sie endlich fast ganz verschwindet, indem daß die beyden äussersten Puncte des Bogens bey B einander erreichen, und den Cirkel schliessen wollen.

§. 40. Eben dieses kan man auch von den Helften der Sehnen, oder von den geraden Linien DE, FG mit einer geringen Veränderung sagen. In dem der Bogen von A auf einer Seite des Durchmessers AB, zu wachsen anfängt, wird die Perpendicularlinie FG immer grösser und grösser, bis sie endlich dem Radius KC gleich wird, wenn der Bogen die Grösse des vierten Theils des Umkreisses AK erreicht. Wird grösser als der vierte Theil des Umkreisses, so nehmen der Sehnen beständig ab, wie sie auf der andern haben, bis sie endlich fast ganz verschwinden, und den Bogen an den Durchmesser bey B anschliessen, und vollenden wil.

haben nicht nur von solchen Sehnen gesprochen die auf einen Durchmesser perpendicular sind, indem wir gesagt; daß in einerley Cirkeln diejenige Sehne allzeit kleiner ist, welche weiter von dem Mittelpunct absteht, und es ist der Satz in der That von allen Sehnen überhaupt richtig, sie mögen, wie diejenigen, die wir betrachten, einander parallel liegen, oder nicht. Man begreift dieses leicht, wenn man die gleichförmige Rundung des Cirkels, und daß dessen Umkreis um und um auf einerley Art gekrümmt ist, erweget. Noch deutlicher aber siehet man die Sache folgender gestalt ein. Es seyn AB und CD zwey Sehnen eines Cirkels, und die erstere AB sey von dem Mittelpunct E weniger entfernt als die zweyte CD;

F. 131.

V. **Abchnitt.** Das ist, die Linie EF, die aus dem Mittelpuncte auf die erstere Sehne perpendicular gefallen, sey kleiner als die Linie EG, die aus eben dem Punct auf die andere Sehne CD perpendicular fällt. Es muß nach unserm Satz AB grösser seyn als CD, und dieses ist zu erweisen. Man verlängere zu dem Ende EF in H, bis EH der EG gleich geworden, und ziehe durch H die Sehne IK mit der vorigen AB parallel. Weil nun die Sehnen IK und CD von dem Mittelpunct E gleich weit entfernt sind, die eine nemlich um EH, und die andere um EG = EH, so sind diese Sehnen einander gleich, V. 36. nemlich $IK = CD$. Man ist aber IK kleiner als AB, V. 38. also muß auch CD kleiner seyn als AB.

Gerade Linien, welche einen Eirkel berühren.

F. 132. S. 42. Wenn man selbst auf das äusserste Punct des Durchmessers AB oder des Halbmessers AC eines Eirkels eine Perpendicularlinie AD setzt, und dieselbe auf der andern Seite nach Belieben bis in E verlängert, so fällt diese gerade Linie DAE zwar mit dem Umkreis des Eirkels nothwendig in dem Puncte A zusammen, und berührt denselben eben deswegen, weil sie durch das äusserste Punct des Durchmessers A gezogen ist, welches nothwendig in dem Umkreis liegt. Sonst aber, kan nichts von der dergestalt gezogenen geraden Linie DAE innerhalb den Eirkel hineinfallen, oder die gerade Linie kan den Eirkel nicht schneiden. Dieses können wir auf verschiedene Arten einsehen. Ausser A reicht der Umkreis nicht, und er kan also von dieser Seite kein Stück der Linie DAE umschlingen, oder dieselbe einschliessen. Sollte demnach ein Stück dieser Linie innerhalb des Eirkels beschloffen werden, so müste dieses über oder unter dem Puncte A geschehen. Wenn aber dieses seyn sollte, müste sich der Umkreis des Eirkels über oder unter dem Puncte A nach der geraden Linie DAE auswärts biegen, damit nemlich ein Theil desselben auf die andere Seite dieser Linie zu liegen käme, welches aber demjenigen widerspricht, so wir von der einförmigen Krümmung des Eirkelkreises eingesehen.

S. 43. Man kan aber auch auf eine andere Art noch viel bündiger einsehen, daß alle Puncte der geraden Linie DAE, welche man nur angeben kan, ausser dem einzigen Puncte A, ausserhalb den Eirkel fallen. Man ziehe die Linie FC von einem nach Belieben angenommenem Punct dieser geraden Linie nach dem Mittelpunct C. Weil nun das Dreyeck FAC rechtwinklicht ist, (denn man hat DA auf AC

AC perpendicular gesetzt); so ist die Seite desselben FC nothwendig grösser als der Radius AC; Ist aber EC, die Entfernung des Punktes F unserer geraden Linie DE von dem Mittelpunct C, grösser als der Radius des Cirkels, so liegt dasselbe Punct F nothwendig ausser dessen Umkreis, und eben so schliesst man von einem jeden andern Punkte der geraden Linie DE.

§. 44. Eine dergleichen gerade Linie DAE, welche zwar einen Cirkel berührt, und ein Punct A mit dem Umkreis desselben gemeinschaftlich hat, von welcher aber nichts innerhalb des Cirkels fällt; oder die im übrigen ganz und gar ausser dem Cirkel liegt, und von dessen Umkreis abgetrennt ist, heisset eine Berührungslinie des Cirkels, oder eine gerade Linie, welche den Cirkel oder dessen Umkreis berührt.

lieffen,
A be-
t, wel-
sie ver-
pendi-
linie.
Cirkel
Mittels-
len, so
ie Per-
rn auf
uf DE
bey F,
itgegen

gesetzt. Es müste also AC grösser seyn als FC; und weil F ein Punct der Berührungslinie DE ist, und deswegen nicht innerhalb den Cirkel fallen kan, so müste noch vielmehr A ausser dessen Umkreis fallen. Oder die Sache etwas anders auszudrücken: CF ist gewis nicht kleiner als der Radius des Cirkels, weil F nicht innerhalb des Cirkels fällt, denn dieses thut kein Punct einer Berührungslinie. Aus dem aber, so angenommen worden, folget, daß AC grösser sey als FC: also ist AC gewis grösser als der Radius des Cirkels, und daraus kan nichts anders geschlossen werden, als daß A ausserhalb dessen Umkreis liege. Ist aber dieses, so ist A ohnmöglich der Berührungspunct.
Das

2813

V. ~~Abchnitt.~~ Daß demnach, wenn man setzt, daß A der Berührungspunct sey, und daß doch die gerade Linie, welche man aus C auf DE perpendicular zieht, nicht in A falle, man sich selbst widerspricht. Denn aus dem letztern folget wie wir gezeigt haben, daß A der Berührungspunct nicht sey. Es kan demnach ohnmöglich A der Berührungspunct seyn, und doch die Perpendicularlinie von welcher wir reden, ausser demselben fallen. Fället aber diese Perpendicularlinie nicht ausser den Berührungspunct, so muß sie in denselben fallen, welches dasjenige ist so gesetzt worden.

§. 47. Die gerade Linie so aus dem Mittelpunct C auf die Berührungslinie DE perpendicular fällt, ist nur eine einzige. Denn da durch jedes Punct auf jede gerade Linie nur eine einzige Perpendicularlinie kan gezogen werden, warum sollte es hier anders seyn? diese Perpendicularlinie aber gehet, wie eben gezeigt worden, durch den Berührungspunct A, und lieget also zwischen C und A, und zwischen diesen Puncten können wieder nicht mehr als eine gerade Linie gezogen werden. Demnach ist eben die gerade Linie die zwischen C und A lieget, auf DE perpendicular: oder wenn man den Mittelpunct C mit dem Berührungspunct A vermittelst einer geraden Linie AC verknüpft, so ist diese Linie AC auf die Berührungslinie DE perpendicular. Die Sache ist leicht: sollte indessen doch noch einiger Zweifel haften, so versuche man durch den Mittelpunct C auf DE eine Perpendicularlinie zu ziehen. Nach dem, so V, 46. gezeigt worden, muß sie durch den Berührungspunct A gehen, und kan also von der Linie CA, nicht verschieden seyn. Ist aber CA von der Perpendicularlinie nicht verschieden, so ist sie ja nothwendig selbst die Perpendicularlinie.

§. 48. Und also haben wir uns die vornehmsten Eigenschaften der Sehnen und der Berührungslinien bekannt gemacht. Wir können nunmehr beide verknüpfen, und uns dasjenige vorstellen, so aus dieser Verknüpfung folget.

F.133. §. 49. Es sey durch ein Punct A eines Cirkelkreises eine Linie BC gezogen, so den Cirkel berühret, und dieser seyn so viele Sehnen DE, FG beygesetzt, als man wil, welche alle mit der berührenden Linie BC, und folgendes auch mit einander, parallel laufen, so werden alle Bogen, die zwischen zweyen dieser Parallellinien enthalten sind, das ist AD und AE, wie auch DF und EG einander gleich seyn. Denn

Denn man ziehe aus dem Mittelpunct H auf die Berührungslinie BC eine Perpendicularlinie HA, welche man, wenn es nöthig ist, auf der andern Seite in I verlängern kan. Diese wird durch den Punct A gehen, in welchem die BC den Cirkel berührt, V, 46. und, weil die Sehnen DE, FG mit der BC parallel laufen, so wird eben diese HA auf diese Sehnen alle perpendicular fallen. IV, 190. Nun ist die Eigenschaft einer solchen Linie, welche aus dem Mittelpunct eines Cirkels auf eine Sehne desselben perpendicular gezogen worden, daß sie, wenn man sie verlängert, auch den Bogen derselben in zwei gleiche Theile theilet. V, 19. Dieses muß also unsere AHI ebenfals thun, und die Bogen AD und AE, aber auch FDA und GEA einander gleich machen. Das erstere, $AD=AE$ ist eines von demjenigen so angegeben worden, aus beyden zugleich $AD=AE$, und $FDA=GEA$ aber folget, daß gleiches übrig bleiben müsse, wenn man von den Bogen FDA und GEA, die Bogen AD und AE wegnimmt. Nimmet man aber AD von ADF weg, so bleibt DF übrig, und AE von AEG abgezogen, läßt EG. Diese Bogen DF und EG sind demnach einander ebenfals gleich.

S. 50. Man siehet gar leicht ein, daß sich dieser Satz umkehren lasse, und daß, wenn man annimmt, daß die Bogen DF und EG gleich seyn, daraus folge, daß die Sehnen DE und FG einander parallel liegen. Denn es läßt sich in der Lage solcher Sehnen nichts verändern, ohne daß man zugleich die Größe der Bogen ändert, welche zwischen ihnen enthalten sind, das ist, wenn man zwei Sehnen DE und FG parallel gezogen, wodurch wir gesehen, die Bogen DF und EG gleich werden, und man wil hernach die eine dieser Parallellinien der andern auf dieser oder auf jener Seite nähern, und sie dadurch ausser den parallelen Stand setzen, so wird eben dadurch auch der Bogen auf der einen Seite kleiner, als auf der andern: verändert man also die Bogen nicht, sondern läßt sie einander gleich, wie sie vorher einander gleich waren, da die Sehnen parallel lagen, so müssen auch die Sehnen nach wie vor parallel bleiben.

S. 51. Sollte dieses die Sache noch nicht vollkommen verständlich machen, welche zwar an sich keine Schwierigkeit hat, so kan man auf die eine der Sehnen FG aus dem Mittelpunct eine Perpendicularlinie ziehen, und dieselbe bis an den Umkreis in A verlängern.

F. 134.

V. **Wfschnitt.** gern. Diese Perpendicularlinie ist AH. Es wird dadurch der Bogen AF dem Bogen AG nothwendig gleich. Da nun auch gesetzt wird, daß DF dem EG gleich sey, so folget, daß auch die Bogen AD und AE gleich seyn, welche nach Abzug der letztern von der erstern übrig bleiben. Sind aber die Bogen AD und AE gleich, und fällt also die Linie HA aus dem Mittelpunct auf die Sehne DE dergestalt, daß sie ihren Bogen DAE in zwey gleiche Theile theilt, so ist diese Linie AH auch auf die DE perpendicular, wie wir V. 25. gesehen haben. Da nun aber eben diese AH auch auf die FG perpendicular gezogen worden, so müssen die Linien FG und DE nothwendig einander parallel seyn.

Von den Winkeln gewisser Sehnen und Berührungslinien.

S. 52. Alle diese Sätze, welche wir bisher von dem Cirkel betrachtet haben, sind gar leicht, und machen dasjenige mit aus, so man sonst die natürliche Geometrie nennet, bey welcher vor der Kunst nichts übrig ist, als daß sie dieselbe etwas in Ordnung bringe. Nun folgen etwas schwerere Sätze von den Winkeln, welche die Sehnen und Berührungslinien bey den Umkreisen der Cirkel machen.

F. 135.
136.
137.
138.

S. 53. Wenn man in verschiedenen Cirkeln die gleiche Halbmesser haben, oder die einander gleich sind, ein Punct A in dem Umkreise nach Belieben annimmt, und durch dasselbe zwei gerade Linien AB und AC ziehet, welche bey A in allen diesen Cirkeln einerley Winkel BAC machen, es mögen nun diese Linien AB und AC die Umkreise der Cirkel berühren oder schneiden wie sie wollen, so sind alle Bogen DE, welche zwischen den Schenkeln dieser Winkel enthalten sind, einander gleich, das ist, es ist $DE = DE$, in welchen von den gezeichneten Cirkeln man auch die mit DE bezeichnete Bogen nehmen wil. In der 135 und 136 Figur schneiden die geraden Linien AB und AC die Umkreise auf verschiedene Art, in der 137 schneidet AB den Umkreis und AC berührt ihn in E, welches Punct demnach mit A in eines zusammen fällt, und in der 138 Figur schneidet AB wieder den Umkreis wie auch AC, aber das Punct E, in welchem die letzte Linie AC den Umkreis schneidet, fällt hier auf die andere Seite des Punctes A in Ansehung des B. Es ist bey dem allen, unter den gesetzten Bedingungen, der Bogen DE überall von einerley Größe, und so groß als der Bogen DE in der 135 Zeichnung.

S. 54. Man kan dieses folgender gestalt einsehen: Man lege den ersten Cirkel oder die 135 Figur mit samt den in demselben gezogenen geraden Linien, mit seinem Mittelpuncte auf den Mittelpunct des zweiten und des dritten und vierten Cirkels, und drehe ihn um denselben so lange bis BA des ersten Cirkels mit der BA des zweiten, dritten und vierten parallel zu liegen kommt, oder bis BA in ba fällt, welche ba der BA parallel liegt. Gesezet, es falle, nachdem diese Lage der BA erhalten worden, die zweite Linie AC des ersten Cirkels nunmehr in ac, wodurch der Bogen DE des ersten Cirkels dem Bogen de des zweiten, dritten und vierten Cirkels, und der Winkel bac dem Winkel BAC gleich wird; so ist in einem jeden der drey lehtern Cirkel, in welchen diese Linien vorkommen, wegen der parallelen Lage der geraden Linien BA und ba, die von der Linie ac geschnitten sind, der Winkel bac gleich dem Winkel bey F, welcher nach unten zu gelehret ist, oder BFc IV, 187. Denn bac liegt inwendig zwischen den Parallellinien AB und ab, und F auſſer denselben, und beide stehen nach einerley Seite. Nun aber ist gesezet worden, daß der Winkel BAC dem Winkel bac gleich sey, und hieraus folget, daß die beiden Winkel, der besagte bey F, und der Winkel BAC beide einem dritten, nemlich dem Winkel bac, und demnach einander selbst, gleich seyn, oder daß $BFc = BAC$. Siehet man diese Winkel BFc und BAC etwas genauer an, so wird man inne, daß aus ihrer Gleichheit folge, daß auch die geraden Linien ac und AC einander parallel liegen IV, 77. Denn BAC liegt zwischen den geraden Linien AC und ac, welche beide von der AB geschnitten werden, und BFc liegt nach eben der Seite auſſerhalb denselben.

S. 55. Nachdem also AB und ab einander mit Gleichheit parallel geleyet worden, so ist selbst daraus, wegen der Gleichheit der Winkel BAC und bac, die parallel Lage der andern Seiten AC und ac, erfolgt. Und hieraus folget ferner V, 49. die Gleichheit der Bogen Aa und Dd, wie auch Aa und Ee, welche letztere zwischen zwey Parallelen Sehnen in der 136. Figur, oder in der 137, zwischen der Sehne ac und der Berührungslinie AC so jener parallel liegt, enthalten sind. Daraus aber, daß $Dd = Aa$, und $Aa = Ee$, schließet man ferner leicht, es sey auch $Dd = Ee$. In der 138. Figur aber ist $aE = Ae$, und $AE = AE$, folgendes wenn man gleiches zu gleichem sezet, $aE + AE$, das ist $Aa = Ae + AE$, das ist Ee. Woraus mit dem vorigen $Aa = Dd$, eben das, nemlich $Dd = Ee$, folget.

S. 56. Nunmehr ist nichts leichter, als ferner einzusehen, daß auch

Dq 2

die

V. die Bogen DE und de einander gleich sind, welches V. 53. gesetzt
 Abschnitz. worden, und zu beweisen ist. Denn es entsteht der Bogen de aus
 dem Bogen DE, indem man auf der einen Seite von DE den Bo-
 gen Ee wegnimmt, und auf der andern Seite den Bogen Dd anstü-
 cket, welches man gar leicht sieht, wenn man die Figuren betrachtet.
 Weil aber das weggenommene Ee dem zugesetzten Dd gleich ist, so
 wird dadurch in der Größe des Ganzen nichts geändert. Und es sind
 demnach überall die Bogen DE dem Bogen de gleich, welcher in allen
 unsern Eirkeln von einerley Größe genommen worden; und folgendes
 sind auch alle Bogen DE einander gleich, und der vorgetragene Satz
 ist richtig. Oder man sage es sey in einem jeden unserer drey Eirkel
 $De = De$, und setze beiderseits dasjenige hinzu, dessen Gleichheit er-
 wiesen worden $Dd = Ee$, so folget wieder $de = DE$.

§. 57. Man kan auch diesen Satz umkehren, und es folget hin-
 wiederum aus der Gleichheit der Bogen DE in verschiedenen glei-
 chen Eirkeln die Gleichheit der Winkel BAC, die nach einer Sei-
 te stehen, deren Spitzen A in den Umkreis des Eirkels fallen, und de-
 ren Schenkel AB und AC die Bogen DE abschneiden. Denn ge-
 setzt, es seyen die Winkel BAC in verschiedenen gleichen Eirkeln ein-
 ander gleich, und folgendes auch, wie wir gesehen, die Bogen DE,
 und man wil einen der Winkel BAC kleiner machen, so verkleinert
 man auch den Bogen DE auf welchem er steht, und ohne diese Ver-
 kleinerung des Bogens gehet die Verkleinerung des Winkels ohn-
 möglich an. Eben so muß man sagen, daß so bald als der Winkel BAC
 in einem oder dem andern dieser Eirkeln vergrößert wird, der Bo-
 gen DE nothwendig zugleich mit vergrößert werde. Oder, daß wir
 uns anders ausdrücken: Wenn man zween unserer gezeichneten glei-
 chen Eirkel vor sich nimmt, und setzet, daß in einem derselben
 der Winkel an dem Umkreis bey BAC größer sey, als in dem an-
 dern, so muß man auch nothwendig sehen, daß der Bogen DE auf
 welchem der größere Winkel steht, größer sey als der andere Bo-
 gen DE, auf welchem der kleinere steht. Nach dieser kleinen
 Vorbereitung schließen wir leicht, daß wenn die Bogen zweer Eir-
 kel DE gleich sind, die Winkel an BAC nicht ungleich seyn kön-
 nen. Denn man setze, daß zween Bogen DE gleich sind, und
 die Winkel BAC ungleich: so ist nothwendig einer dieser Win-
 kel größer als der andere, sonst wären sie nicht ungleich. Der
 größere Winkel hat allezeit einen größeren Bogen DE zwischen sei-
 nen

nen Schenkeln: also sind die Bogen DE in den beiden Cirkeln V. nicht gleich, welches demjenigen widerspricht, so eben gesagt worden. Mit einem Worte, wer da sagt, die Bogen DE seyen in zween gleichen Cirkeln gleich, aber die Winkel DAC seyen ungleich, der widerspricht eben dadurch sich selbst, weil aus der Ungleichheit der Winkel, DAC, die Ungleichheit der Bogen DE folgt, und kan also ohnmöglich die Wahrheit sagen. Sind aber bey der Gleichheit der Bogen DE die Winkel DAC nicht ungleich, so ist klar genug, daß sie gleich sind.

§. 48. Man kan aber eben dieses auch leicht gerade zeigen, ohne den vorhergehenden Satz zum Grunde zu legen. Wir setzen, daß in zween solchen Cirkeln dem zum Exempel in der 135 Zeichnung, und einem der übrigen die Bogen DE gleich seyn, und bringen den erstern mit seinen Mittelpuncte auf den Mittelpunct des andern, und drehen ihn so dann um diesen Mittelpunct so lange, bis die Sehnen BA der zween verschiedenen Cirkeln parallel werden. Wir setzen dieses sey geschehen, nachdem die Sehne BA der 135 Figur in ba gefallen, und daß dadurch die andere Seite AC in ac zu liegen gekommen, wodurch der Winkel bac dem Winkel BAC des Cirkels, welchen wir dergestalt auf die übrigen gebracht, gleich geworden. Weil nun gesehet wird, daß der Bogen de dem Bogen DE gleich sey; so ist auch Dd so groß als Ee: Welches man leicht einseheth, wenn man von einem jeden der gleichen Bogen DE, de, den Bogen De, welcher ihnen gemeinschaftlich ist, hinweg nimmet. Denn da bleibet allerdings Dd = Ee übrig. Weil aber auch Dd = Aa, denn dieses erfolgt aus der parallelen Lage der geraden Linien AB und ab V. 49. so sind die zween Bogen Aa und Ee, welche einem dritten, nemlich dem Dd gleich sind, auch einander gleich, und es sind folgendes auch AC und ac einander parallel. V. 50. Nun ist es keine Schwierigkeit zu zeigen, daß die Winkel BAC und bac einander gleich sind. Denn weil AB und ab zwe Parallelinien sind, die von der Linie ac geschnitten werden, so ist der innere Winkel bac dem duffern BFc, gleich. Und weil auch AC, ac zwe Parallelinien sind, welche beide von der AB geschnitten werden, so ist wieder der besagte Winkel BFc dem Winkel BAC gleich, und da folgendes BAC = F, und F = bac, so ist auch BAC = bac, welches zu erweisen war.

§. 49. Hieraus fließet so gleich, daß wenn man in einem Cirkel einen Bogen annimmt DE, und sehet auf denselben einen Winkel, Dq 3 F. 139. der

V. dessen Spitze in den Umkreis des Cirkels in A fällt, und ferner noch
 Abschnitt. andere Winkel, deren Spitzen in a , α fallen, diese Winkel DAE, DaE, D α E alle, so viel man deren auch machen will, einander gleich seyn werden.

S. 60. Ja es ist eben dieses richtig, wenn man durch DE eine Sehne zieht, und an das Ende derselben die gerade Linie EC setzt, welche den Cirkel in E berührt. Der Winkel DEC ist auch dem Winkel DAE gleich, welcher auf dem Bogen DE steht, und mit seiner Spitze A auf der andern Seite in den Umkreis des Cirkels fällt. Denn der allgemeine Satz läßt sich auch hier anwenden. Es steht auch der Winkel DEC, dessen Spitze in E in den Umkreis des Cirkels fällt, auf dem Bogen DE, eben wie DAE, und die Vergleichung dieser Figur mit den vorigen macht alles deutlich. Denn wir haben unsere Sätze so allgemein verfaßt und erwiesen, daß sie auch diesen Fall, in welchem eine der geraden Linien, die den Winkel an dem Umkreise einschließen, eine Berührungslinie ist, mit enthalten.

S. 61. Man kan aber diesen letzten Satz auch also verfassen. Wann man eine gerade Linie EC zieht, welche einen Cirkel in E berührt, zieht so dann die Sehne DE durch den Berührungspunct, und setzt auf dieselbe ein Dreieck DAE, dessen Spitze in den Umkreis des Cirkels fällt, so ist der Winkel A, welcher der erst genannten Sehne DE entgegen steht, dem Winkel DEC gleich, welchen eben die Sehne DE mit der Berührungslinie EC macht.

F. 140.

S. 62. Schneidet aber die Linie CA, welche mit der Sehne AD den Winkel DAC macht, den Umkreis des Cirkels in A und E, so ist DAC dem Winkel DaE gleich, welcher wieder auf dem Bogen DAE steht, und dessen Spitze a in den Umkreis fällt V, 55. Man siehet hieraus, daß dieser Winkel DaE mit dem ihm entgegen gesetzten Winkel DAE zween rechte Winkel ausmachen müsse. Denn die beiden Winkel DAC, und DAE sind ohnstreitig zween rechten Winkeln gleich, weil sie neben einander auf der geraden Linie CAE stehen. Also giebet auch DaE = DAC mit eben dem DAE eine Summe, welche so groß ist, als zween rechte Winkel.

S. 63. Man kan diesen Satz auch so ausdrucken: In einem jeden Viereck DaEA, welches in einem Cirkel dergestalt beschrieben ist, daß seine Ecken D, a , E, A in den Umkreis des Cirkels fallen, sind die zween einander entgegen gesetzte Winkel DaE, und DAE zusammen genommen zween rechten Winkeln gleich. Denn man kan über-
 all

all eine Seite des Vierecks EA in C verlängern, und so dann eben V. den Beweis geben, welchen wir jezo geführt. Abschnitt.

§. 64. Man kan sich eines jeden dieser Sätze bedienen, dasjenige so von dergleichen und anderen Winkeln noch ins besondere zu sagen ist, heraus zu bringen, doch führt uns der Winkel DEC, oder DEC welchen die Berührungslinie EC mit der Sehne DE macht, insonderheit leicht zu dem vorhabenden Zweck. Wir haben V. 60. gesehen, daß der Winkel DEC dem Winkel gleich sey, welcher in dem Abschnitt DAE dergestalt kan beschrieben werden, daß seine Spitze in den Bogen DAE fällt, und er mit der DE ein Dreieck ausmache: Und aus eben dem Beweise erhellet, daß auch der Winkel DEC einem dergleichen Winkel in DAE gleich seyn müsse. Man ziehe aus dem Mittelpuncte des Cirkels B die zween Halbmesser BD und BE, so wird das Dreieck BDE, wie bekannt, gleichschenkelicht, und die Winkel BDE, BED werden einander gleich. Der Winkel BEC aber, welchen der Halbmesser BE mit der Berührungslinie EC einschließet, ist ein rechter Winkel V. 47. Nun ist dieser rechte Winkel BEC aus den beiden BED und DEC zusammen gesetzt. Also ist $BED + DEC = R$, welches R hier wieder wie sonst öfters einen rechten Winkel bedeutet, und demnach die erst gesetzete Summe doppelt genommen, oder $2BED + 2DEC = 2R$. In dem Dreiecke BDE aber machen alle Winkel ebenfalls zween gerade Winkel aus IV. 217. und es ist auch $BED + BDE + DBE = 2R$, oder weil BED so groß ist als BDE, und folgendes $BED + BDE$ so viel als $2BED$, so kan man auch sehen $2BED + DBE = 2R$. Vergleicher man dieses mit dem vorigen $2BED + 2DEC = 2R$, so siehet man, daß diese Summen, welche beiderseits zween rechten Winkeln gleich seyn, auch ein ander selbst gleich seyn müssen, nemlich $2BED + DBE = 2BED + 2DEC$, und wenn man von diesen beiden Summen das gemeinschaftliche $2BED$ wegnimmt, so bleibet endlich $DBE = 2DEC$.

F. 142

§. 65. Und dieses ist der Satz, welchen wir heraus bringen wollen. Der Winkel DBE des Ausschnittes, welchen die zween Halbmesser DB, BE mit dem Bogen DAE machen, ist zwey mal so groß als der Winkel DEC, und folgendes auch zweymal so groß als der Winkel in dem Abschnitt DAE, welcher auf eben dem Bogen DAE steht, und der Winkel in dem Abschnitt DAE, welcher auf dem Bogen DAE steht, ist die Helfte des Winkels DBE, welcher auf eben dem Bogen DAE steht, und dessen Spitze an den Mittelpunct B raget.

V. raget. Wenigstens ist dieses richtig erwiesen, so lange der Winkel an dem Mittelpuncte DBE kleiner ist, als zween rechte Winkel.

§. 66. Daß aber eben dieses auch richtig sey, wenn man sich vorstellt, daß die zween Halbmesser DB und BE einen Winkel nach aussen zu machen, welcher auf dem Bogen DAE steht, und daß ein dergleichen Winkel, der nothwendig mehr betragen muß, als zween gerade Winkel, ebenfalls doppelt so groß seyn werde, als der Winkel, welcher auf eben dem Bogen DAE steht, aber mit seiner Spitze den Umkreis des Cirkels, zum Exempel in a, erreicht, kan aus nachfolgendem erhellen. DBE sol nunmehrso diesen Winkel bedeuten, welchen wir beschrieben, der nemlich auf dem Bogen DAE steht. Es ist klar, daß derselbe mit dem eigentlichen Winkel DBE, der den Bogen DAE ausschneidet, vier gerade Winkel mache IV, 68. Nun ist erwiesen, daß dieser letztere Winkel DBE doppelt so groß sey als DEC. Also ist der äussere Winkel $DBE + 2DEC = 4R$. Nun ist aber auch $DEC + DEC = 2R$; und also $2DEC + 2DEC$ doppelt so viel, und demnach $= 4R$. Folgender $DBE + 2DEC = 4R = 2DEC + 2DEC$. Und nimmet man hier wieder das gemeinschaftliche $2DEC$ zu beiden Seiten hinweg, so bleibt $DBE = 2DEC$. Da nun also der Winkel DEC dem Winkel in dem Abschnitt DAE gleich ist, so ist auch der Winkel DBE, welcher auf dem Bogen DAE steht, und dessen Spitze in den Mittelpunct B fällt, zweymal so groß als der Winkel, der auf eben dem Bogen DAE steht, aber mit seiner Spitze in den Umkreis des Cirkels fällt.

§. 67. Oder man benenne den Winkel an dem Umkreise der auf DAE steht, mit dem Buchstaben A, den Winkel an dem Mittelpuncte, der auf eben dem Bogen steht, mit B, den Winkel an dem Umkreise, der auf dem Bogen DAE steht, bezeichne man mit a, und den Winkel an dem Mittelpuncte auf eben dem Bogen, mit b, und schliesse etwas kürzer folgender gestalt: $B + b = 4R$, wie leicht einzusehen. Es ist V, 62. aber erwiesen worden, daß $A + a = 2R$, und hieraus folget $2A + 2a = 4R$. Folgender ist $B + b = 2A + 2a$. Nun ist vermöge desjenigen, so von diesen Winkeln V, 65. bereits ausgemacht ist, $B = 2A$, und demnach, wenn man in dem erwiesenen Satz $B + b = 2A + 2a$ das eine dieser Dinge B vor das andere $2A$ setzt, $B + b = B + 2a$, woraus durch den Abzug des gemeinschaftlichen B kommet $b = 2a$, welches zu erweisen war.

§. 68.

§. 68. Wenn die Sehne DE, welche mit der Berührungslinie EC den Winkel DEC macht, welcher dem Winkel DAE gleich ist, durch den Mittelpunct des Cirkels B gehet, so wird der Winkel DEC gerade, denn die Berührungslinie macht allezeit mit dem Durchmesser einen geraden Winkel. V, 47. Der Bogen DAE aber so wol, als der Bogen DaE werden in diesem Fall halbe Cirkelkreise. Derwegen ist ein jeder Winkel, welcher in einem halben Cirkel DAE beschrieben ist, oder ein Winkel, welcher auf einem halben Cirkelkreise DaE dergestalt steht, daß seine Spitze in den Umkreis eben des Cirkels fällt, von welchem jener die Hälfte ist, ein gerader Winkel. Welches man auch daraus sehen kan, weil ein solcher Winkel die Hälfte ist des eingebildeten Winkels DBE, welcher zween geraden Winkeln gleich ist. V, 65.

V.
Abschnitt.
F. 142.

§. 69. Stehet aber ein solcher Winkel wie DAE auf einem Bogen daE, welcher kleiner ist als ein halber Cirkelkreis, oder steht er in einem Bogen dAE, welcher grösser ist als ein halber Cirkelkreis, so ist er spitzig. Denn die Sehne dE macht in diesem Fall mit der Berührungslinie EC einen Winkel dEC, welcher kleiner ist, als der gerade DEC, und dieser Winkel dEC ist allezeit dem Winkel in dem Bogen dAE gleich. V, 60. Singegen ist ein Winkel stumpf, wenn er auf einem Bogen daE steht, welcher grösser ist als ein halber Cirkelkreis, oder in einem Bogen dAE, welcher kleiner ist, als ein halber Cirkelkreis. Weil in diesem Fall wenn dAE kleiner ist als ein halber Cirkel, die Sehne dE mit der Berührungslinie EC einen stumpfen Winkel macht.

§. 70. Diese Betrachtung der Winkel in den Abschnitten des Cirkel, giebt eine Anweisung an die Hand, eine Linie auf eine andere perpendicular zu setzen, welche in vielen Fällen von Nutzen, ja unentbehrlich ist. Zwo gerade Linien, die einen rechten Winkel einschließen, sind auf einander perpendicular. Ein Winkel in einem halben Cirkel ist allezeit ein rechter Winkel. Dieses sind die Gründe, worauf wir uns gegenwärtig bey Ziehung einer Perpendicularlinie gründen werden.

§. 71. Es sey auf AB eine Perpendicularlinie durch das Punct B zu ziehen, ohne die Linie AB zu verlängern: So setze man auf AB ein gleichschenklighes Dreueck ABC, dessen Schenkel AC man nach Belieben annehmen kan, verlängere so dann die eine Seite AC, oben bey der Spitze C, so lange, bis CD so groß wird als AC. Ist dies

F. 143.

R r

feh

V. *Abchnitt.* ges geschehen, so kan man die verlangte Perpendicularlinie ziehen. Die Puncte D und B liegen in derselben, und man darf nur diese Puncte mit einer geraden Linie BD zusammen ziehen, so ist diese BD die gesuchte Perpendicularlinie. Und es ist nicht schwer einzusehen, wie diese Zusammensetzung der Linien, damit DB auf AB perpendicular werde, aus den eben gewiesenen Quellen fließe. Setzet man einen Fuß des Cirkel Instruments in C ein, und fänget an einen Bogen durch A zu beschreiben, so gehet derselbe, wenn man in der Beschreibung fortführet, durch B, weil AC der CB gleich ist, und führet man weiter fort, so gehet eben der Bogen auch durch D. Es ist nunmehr nicht nöthig den Bogen weiter zu beschreiben. Weil der Mittelpunct desselben in C fällt, so siehet man, daß ACD ein Durchmesser desselben, und folgendes der Bogen ABD ein halber Cirkel sey. Es ist demnach der Winkel ABD ein Winkel in einem halben Cirkel, und folgendes ein gerader Winkel, V, 68. und DB stehet auf der AB perpendicular.

§. 72. Dieses war ein Fall, in welchem uns die angegebene Eigenschaft eines geraden Winkels bequem und nützlich seyn kan. Denn es kommet öfters, daß man auf eine gerade Linie eine andere perpendicular zu sehen hat, und die erstere Linie doch nicht wohl verlängern kan, wober die gegenwärtige Aufgabe zu statten kommet. Noch nothwendiger aber ist uns diese Art Perpendicularlinien zu ziehen, wenn uns ein Punct ausser dem Umkreis eines Cirkels gegeben ist, und wir sollen durch dasselbe Punct eine gerade Linie ziehen, welche den Cirkel berührt.

F. 144.

§. 73. Es sey der Mittelpunct des Cirkels A und ausser dem Umkreise desselben das Punct B gegeben, durch welches man eine gerade Linie ziehen soll, so den Cirkel berührt. Wir wissen schon, daß sie auf einem der Halbmesser des Cirkels perpendicular stehen muß, denn dergleichen Perpendicularlinien auf die Halbmesser können die Cirkel berühren, und berühren sie wirklich, wenn sie auf ihren äussersten Puncten stehen. V, 42. Alle andere Linien haben entweder mit dem Umkreise gar keine Gemeinschaft, oder sie schneiden den Cirkel. Was aber dieses vor ein Radius sey, auf welchen die gerade Linie durch B perpendicular fallen muß, können wir so gleich nicht wissen. Denselben nun zu finden, ziehe man nur eine gerade Linie zwischen B und A. Diese ist BA. Nachdem man dieselbe in C in zwey gleiche Theile getheilet, so beschreibe man um C durch A und B einen Cirkelkreis, welcher

welcher den erst beschriebenen Cirkel, dessen Mittelpunct in A fällt, V.
nothwendig in zweyen Puncten D und d schneiden wird. Diese sind
die Berührungspuncte zu den Berührungslinien die durch B können
gezogen werden. Man ziehe BD und Bd. Beyde gerade Linien be-
rühren den Cirkel, die eine in D, die andere in d. Beyde gehen durch B.

§. 74. Denn wenn man aus dem Mittelpuncte A auf D und d
die Halbmesser AD, Ad zieht, so sind dieselben nothwendig auf die
geraden Linien BD, Bd perpendicular, weil die Winkel BDA, und
BdA Winkel in einem halben Cirkel sind, wie aus der Beschreibung
klar ist. Denn man hat den Mittelpunct C in der geraden Linie AB
genommen, welche AB folgendes der Durchmesser des Cirkels BDA ist.
Nun aber berührt eine jede gerade Linie einen Cirkel, welche durch
das Ende eines Halbmessers gehet, und auf demselben perpendicular
steht. Es müssen derowegen die geraden Linien BD, Bd den Cirkel
nothwendig in D und d berühren.

§. 75. Man sieht hieraus, daß durch ein jedes Punct B ausser
dem Cirkel zwey gerade Linien BD, Bd können gezogen werden, welche
denselben berühren. Denn wenn man die Berührungslinien, wie ge-
wiesen worden, ziehen will, so findet man jederzeit zwey Durchschnit-
te D und d, und man kan durch einen jeden derselben eine Berüh-
rungslinie ziehen. Und man hat eben die Gründe zu zeigen, daß Bd
den Cirkel berührt, welche man bey BD antrifft, und aus welchen
man geschlossen, daß ihn BD berührt. Man kan aber auch leicht
einsehen, daß durch ein dergleichen Punct als hier D, nicht mehr Be-
rührungslinien an eben den Cirkelkreis können gezogen werden als die
zwo BD und Bd. Alle übrige gerade Linien, welche durch das Punct
B gehen, fallen entweder innerhalb den Winkel DBd, oder außers-
halb denselben. Die gerade Linien, welche durch B gehen, und auß-
serhalb den Winkel DBd fallen, haben mit dem Cirkel gar nichts
gemein. Sie gehen vor ihn vorbei, und treffen gar kein Punct des-
selben an: da im Gegentheil die geraden Linien, welche durch B inner-
halb DBd gezogen sind, denselben schneiden. Weder die erstern noch
die letztern sind demnach Berührungslinien, es sind also derselben nur
zwo, nemlich eben diejenigen, welche wir gefunden.

§. 76. Die Theile dieser Berührungslinien, von dem Puncte
B an, durch welches sie beyde gehen, bis an die Puncte D, d, in wel-
chen sie den Cirkel berühren, sind einander gleich, BD nemlich = Bd.

V. Dieses ist aus den rechtwinklichten Dreiecken ABD , und ABd leicht einzusehen. In dergleichen Dreiecken sind alle Seiten und Winkel gleich, welche auf einerley Art liegen, wenn in einem derselben zwei Seiten angetroffen werden, welche zweien Seiten des andern gleich sind. IV, 258. Nun sind in unsern Dreiecken ABd und ABD , die Seiten AD und Ad gleich, weil sie Halbmesser von dem Cirkel sind, welcher um A beschrieben worden, und die Seite AB ist beyden Dreiecken gemeinschaftlich. Demnach sind nothwendig auch die dritten Seiten BD , Bd einander gleich. Ja wir sehen aus dem gegebenen Beweiß auch noch etwas mehreres ein, nemlich, daß nachdem man die zwei Berührungslinien BD , Bd durch ein Punct außershalb des Cirkelkreises B gezogen, die gerade Linie BA , welche gedachtes Punct B mit dem Mittelpuncte des Cirkels verknüpft, den Winkel DBd , welchen die Berührungslinien mit einander machen, in zwey gleiche Theile ABD und ABd theilen werde.

Beschreibung der regulären Figuren.

S. 77. Dieses ist dasjenige, so wir von einem Cirkel im Anfang theils zu wissen nöthig hatten, und theils einsehen konnten. Denn man muß gestehen, daß noch verschiedene Aufgaben bey demselben übrig sind, welche man vermittelst der Geometrie, welche wir abhandeln, und in welcher keine andere krumme Linie, als der Cirkel selbst, betrachtet wird, gar nicht auflösen können, ob sie zwar einen hauptsächlichsten Nutzen haben; und unter diesen ist die Eintheilung des Cirkels, oder seines Umkreises. Wir können einen jeden Bogen in zwey gleiche Theile theilen, und wie dieses zu verrichten sey, ist oben V, 27. gewiesen worden. Wir können einen ganzen Umkreis gar leicht vermittelst des Durchmessers in seine zwei Helften theilen, und eine jede Helfte wieder in zwey Viertheile, und ein jedes Viertheil wieder in zwey Achtel; und eben so kan man auch einen jeden Bogen, welchen man in zwei Helften getheilet, ferner in zwey Viertheile theilen, und so immer weiter fort. Es sind auch noch andere Theilungen des ganzen Umkreises, welche man bloß durch die Anfangsgründe, und vermittelst des Cirkels und Zinials, als der einzigen Instrumente, deren man sich dabey bedienet, verrichten kan: und wir werden unten zeigen, wie ein ganzer Umkreis auch in sechs gleiche Theile könne getheilet werden, ob wir zwar die übrigen Theilungen in fünf und sieben gleiche Theile, welche Euclides ebenfalls zu verrichten lehret, anzuführen nicht eben nöthig erachten. Bey dem allen aber hat man keine

Me-

Methode einen Umkreis in so viele gleiche Theile zu theilen, als man will, und es steht nicht einmal bey der Geometrie, welche wir lehren, daß sie angebe, wie man einen jeden vorgegebenen Bogen in drey oder fünf, oder sieben gleiche Theile theilen soll, und wenn wir also die Gränzen der Wissenschaft so gar genau beobachten sollten, wären wir in der That bey dem Zweck, welchen wir uns vorgesetzt, bis auf ewige Kleinigkeiten mit der Betrachtung des Cirkels am Ende.

V.
Abschalt:

§. 78. Es hat aber die Theilung des Cirkels, welche sich Geometrisch nicht geben läßt, in der Ausübung ungemeinen Nutzen, und es gründen sich viele Auflösungen solcher Aufgaben darauf, welche wir nicht entbehren können. Was ist hier besser, wegen einiger Kleinigkeiten, die uns die strengste Vernunftlehre bey der Lehrart vorschreibt, nützliche Dinge wegzulassen, oder aber des Nutzens halber diese Banden zu zerreißen? Allerdings ist das letztere dem erstern vorzuziehen: denn der Nutzen allein ist es, weswegen die Wissenschaften gelehret und gelernt werden.

§. 79. Ist gleich die Theilung eines Cirkelkreises in so viele gleiche Theile als man will, Geometrisch zu reden, ohnmöglich, so läßt sie sich doch Mechanisch und durch Verlegung des Cirkels so leicht verrichten, daß wir nicht zweifeln, es werden viele, welche die Kunst mit Cirkel und Lineal umzugehen, vor die Geometrie haften, sich sehr wundern, daß wir bey einer, in ihren Augen so leichten Sache, so viel Schwierigkeit machen. Dieses ist bey denjenigen, welche unsern Fußstapfen, oder vielmehr der Anweisung der wahren Geometrie der Griechen, bis hieher gefolget, nicht zu befürchten, und wir können also ohne fernere Erinnerung weiter gehen. Doch dürfte vielleicht nicht unnöthig seyn, die Mechanische Art, nach welcher ein Bogen in so viele gleiche Theile getheilet werden kan, als man will, mit wenigem anzugeben, ob sie zwar an sich keine Schwierigkeit hat.

§. 80. Die Zahl der Theile, welche der Bogen haben soll, ist entweder eine einfache Zahl 3, oder 5, oder 7, oder eine andere, so aus einfachen Zahlen zusammen gesetzt worden, als 12. In dem ersten Fall, wenn zum Exempel der Bogen AB in drey gleiche Theile zu theilen ist, nimmet man den dritten Theil, nach dem Augenmaß AC, fasset so dann mit dem Cirkelinstrumente die Sehne von diesem Bogen AC, (daß man sie zeichne, wie hier der Deutlichkeit halber geschehen, ist eben nicht nöthig) und trägt diese Sehne von C weiter

F. 145.

V. **Wissn.** ter fort in CD, und endlich leget man sie aus D nach B. Fället nun ihr Ende genau in das Punct B, so ist dieses ein Zeichen, daß uns das Augenmaß nicht betrogen, und daß AC wirklich der dritte Theil des Bogens AB sey. Denn weil die Bogen AC, CD, DB gleiche Sehnen haben, so sind sie gleich: und weil gesetzt wird, daß sie zusammen den Bogen AB ausmachen, so ist ein jeder derselben der dritte Theil des ganzen Bogens AB. Findet man aber, daß die Sehne AC, nachdem sie dergestalt in den Bogen AB fortgesetzt worden, das dritte mal entweder B nicht erreicht, oder über B hinaus fällt, so sieht man leicht, daß man AC entweder zu klein oder zu groß angenommen, und man kan so dann den Fehler entweder ganz und gar verbessern, oder doch vermindern, bis man endlich, nach wiederholten Proben, den dritten Theil genau getroffen.

§. 81. Dieses heisset Mechanisch theilen. Der Beweis von allen solchen Arbeiten gründet sich bloß auf die Sinnen. Will jemand in Zweifel ziehen, ob durch die gewiesenen Handgriffe der dritte Theil des Bogens AB richtig gefunden worden sey, so kan man ihn davon nicht anders überführen, als wenn man zeigt, daß die Sehne AC allerdings sich drey mal in dem Bogen AB fortsetzen läset, da im Gegentheil die Richtigkeit der Geometrischen Auflösungen durch Vernunftschlüsse dargethan wird, und man nicht nöthig hat, dabey auf den Augenschein, als einen Hauptgrund, es ankommen zu lassen. Es hat auch die Geometrische Auflösung vor der Mechanischen dieses zum voraus, daß durch jene das gesuchte auf einmal gefunden wird, durch diese aber erst durch wiederholte Proben, oder doch so, daß man nicht gleich Anfangs gewiß seyn kan, man habe nicht gefehlet. Wie wohl auch dieses nicht zu leugnen ist, daß so lange man bloß auf den Nutzen in der Ausübung sieht, dergleichen Mechanische Auflösungen öfters den Geometrischen vorzuziehen sind. Und dieses darum, weil doch endlich die ganze Richtigkeit in der Ausübung auf ein scharffes Gesicht ankommt, welches aber so wohl bey einer Geometrischen als bey einer Mechanischen Ausübung fehlen kan. Man kan wirklich, wenn zu einem richtigen Instrumente, oder sonst zu einem andern Zweck, ein Bogen genau in zwey gleiche Theile zu zerschneiden ist, der Geometrischen Theilung niemals ehe vollkommen trauen, bevor man versucht, ob die Sehnen der Bogen, welche als die Helften des Ganzen gefunden worden, einander vollkommen gleich sind.

§. 82. Solchergestalt verfähret man, wenn die Zahl der Theile
die

die der Bogen haben soll, eine einfache Zahl ist; wäre sie aber eine andere Zahl, so könnte man sie erst in ihre einfache Zahlen zerfallen, aus welchen sie durch die Multiplication entstanden ist, und so dann nach und nach theilen. Zwölfe ist so viel als $2 \times 2 \times 3$, oder zwölf ist entstanden, indem man zwey in zwey, und das Product 4 wieder durch drey multipliciret hat. Soll man also einen Bogen in zwölf Theile theilen, so theile man ihn erstlich in 2 Theile, und eine jede dieser Hälften wieder in 2 Theile, so hat man der Theile im ganzen Bogen viere, deren jedes man wieder in 3 Theile theilen muß, damit man in dem Ganzen 12 bekommet. Und so verfähret man in allen dergleichen Fällen. Wir werden eine dergleichen Theilung ins künftige aus den angeführten Ursachen, als möglich und bekannt annehmen.

V.
Abschnitt.

S. 83. Und dieselbe führet uns erstlich darauf, wie wir in einem jeden gegebenen Cirkelkreise eine gleichseitige und gleichwinklichte Figur von so vielen Seiten als verlangt wird, beschreiben sollen, dergestalt nemlich, daß alle Ecken dieser geradelinichten Figur in den Umkreis des Cirkels fallen. Es sey zum Exempel in dem gegebenen Cirkel der 146 Figur ein Fünfeck zu beschreiben, dessen Winkel und Ecken alle gleich sind: so theile man, wie man kan, den Umkreis in fünf gleiche Theile, in A, B, C, D, E, ziehe so dann jede zwey der nächsten dieser Theilungspuncte mit geraden Linien zusammen, welche Sehnen von dem Bogen, in welche der Umkreis getheilet worden, abgeben werden, und diese Sehnen werden das verlangte Fünfeck einschließen.

F. 146.

S. 84. Man siehet leicht ein, daß die Figur so viele Seiten haben werde, als viele der Theile sind, in welche man den Umkreis getheilet, das ist, eben so viele als verlangt worden, und nicht viel schwerer ist es zu bemerken, daß diese Seiten alle einander gleich seyn werden. Denn sie sind Sehnen von gleichen Bogen eines Cirkels, welche allezeit einander gleich sind; V. 9. ja in der Mechanischen Theilung des Umkreises, welche wir V. 80. gezeigt, werden eben dadurch die Bogen einander gleich gemacht, daß man ihre Sehnen gleich macht, und ist also die Gleichheit der Sehnen nicht einmal aus der Gleichheit der Bogen zu schließen. Daß aber auch alle Winkel der also gezeichneten Figur einander gleich sind, siehet man so wohl durch den natürlichen Verstand daraus, weil sie alle auf einerley Art entstanden sind, und derowegen nicht das geringste da ist, worauf man sich vernünftig gründen könnte, wenn man einen derselben vor größer oder kleiner halten wolte, als den andern; als auch durch dasjenige,

V. *Wichtig.* so in dieser Geometrie ohnängst vorher gegangen. Alle Winkel des in dem Cirkel beschriebenen Fünfecks fallen mit ihren Spitzen in den Umkreis des Cirkels, und sie stehen alle auf gleichen Bogen. Nämlich ein jeder derselben steht in der Figur, welche wir vor uns haben, auf drey Fünfsteln des ganzen Umkreises; A auf $BC + CD + DE$, B auf $CD + DE + EA$, und so ferner. Oder man kan auch sagen, jeder derselben steht in gleichen Bogen eben des Cirkels, A in $BA + AE$, B in $AB + BC$, und so fort. Da nun alle Winkel, deren Spitzen in den Umkreis des Cirkels fallen, und die auf oder in gleichen Bogen stehen, einander beständig gleich sind, V. 59. so müssen auch die Winkel unserer Figur A, B, C, D, E, alle einander gleich seyn, und ist also die beschriebene Figur so wohl gleichseitig als gleichwinklicht.

F. 147. §. 85. Wenn man aus dem Mittelpuncte des Cirkels F an jede Ecke des Vielecks einen Halbmesser zieht FA, FB, FC, u. s. f. so werden die gleichschenkligten Dreyecke FAB, FBC, und so ferner, einander alle gleich, wie aus dem, so wir bey Betrachtung der Sehne gefaget haben, einzusehen ist: und auch ohne Weitläufigkeit daraus kan geschlossen werden, weil alle Seiten aller dieser Dreyecke einander gleich sind. Denn sie sind theils Halbmesser von einem Cirkel, theils aber Sehnen von gleichen Bogen. Demnach sind auch so wohl die Winkel bey F alle einander gleich, als auch die bey A, B, C, und so ferner, wie man auch diese letztern mit einander vergleichen will. Es ist demnach FBA die Helfte des Winkels ABC, und so ferner. Man übersieht auch alles dieses gar leicht, bloß mit der natürlichen Vernunft.

§. 86. Es sind aber die Winkel an dem Umkreise, zum Exempel, die bey A, den Winkeln an dem Mittelpuncte F, nicht nothwendig gleich. Man siehet leicht, daß wenn man die Zahl der Seiten vermehret, die Winkel an dem Mittelpuncte immer kleiner und kleiner werden, da im Gegentheil die Winkel an dem Umkreise bey dieser Vermehrung der Seiten des Vielecks, (wenn man nämlich zum Exempel dem Vieleck an statt 5 Seiten, derer 7 oder 9 oder 17 giebt) beständig wachsen. Wie ist es denn möglich, daß die Winkel bey A oder B oder C denen bey F in allen Vielecken gleich seyn sollten? Doch ist ein Fall, in welchem diese Winkel gleich werden; und diesen weisen wir so gleich zeigen.

§. 87. Die Summe aller Winkel bey F, machet vier gerade Winkel aus, wie dieses bey allen Winkeln, deren Spitzen in einem

Pun-

Puncte zusammen stossen, eintrifft. IV, 68. Und weil sie einander gleich sind, so ist ein jeder derselben der so vielste Theil von vier geraden Winkeln, als viele Seiten die Figur hat, das ist, als viele der Bogen AB, BC, &c. sind, in welche der ganze Umkreis getheilet worden. Und wenn demnach, wie in unserer Figur der Seiten des Vieleckes an der Zahl sechs sind, so ist ein jeder der Winkel an dem Mittelpunct F der sechste Theil von vier geraden Winkeln, das ist $\frac{2}{3}$, oder welches eben das ist, $\frac{2}{3}$ von einem geraden Winkel: gleich wie auch AB der sechste Theil des Umkreises ist. V.
 Absolut.

§. 88. Kan man demnach einen Winkel wie man wil, theilen, und nach Belieben den dritten, fünften, siebenden Theil von einem, oder von vier geraden Winkeln, schaffen; so kan man auch leicht den Umkreis des Cirkels eben so theilen. Nämlich so bald in unserer Figur der Winkel an dem Mittelpunct F zwey Dritteln eines rechten Winkels gleich gemacht wird; so ist sein Bogen BC der sechste Theil des ganzen Umkreises. Allein es hat mit der Theilung der Winkel überhaupt eben die Schwierigkeit, welche wir bey der Theilung der Bogen angegeben, und es hängt eines dieser Dinge von dem andern ab, die Theilung des Bogens in einem Ausschnitte, von der Theilung des Winkels, und die Theilung des Winkels von der Theilung des Bogens, wie wir bereits oben V, 13. bemerkt.

§. 89. Wenn aber der Winkel an dem Mittelpuncte AFB $\frac{2}{3}$ von einem rechten Winkel ausmachet, welches, wie wir V, 87. gesehen, bey einem Sechseck von gleichen Seiten und Winkeln, und zwar bey diesem alleine, eintrifft; so müssen die übrigen beyde Winkel des Dreiecks AFB, nämlich FAB und ABF, zusammen $\frac{1}{3}$ eines rechten Winkels ausmachen, sonst könnte die Summe aller Winkel des Dreiecks ohnmöglich $\frac{2}{3}$ von einem geraden Winkel, oder zwey gerade Winkel betragen, so doch in jedem Dreieck seyn muß. IV, 217. Es sind aber die besagten beyden Winkel bey A und B einander gleich, und da sie also zusammen gesetzt $\frac{1}{3}$ eines geraden Winkels ausmachen, so muß jeder derselben die Helfte hiervon, nämlich $\frac{1}{6}$ eines geraden Winkels seyn. Also sind alle drey Winkel des Dreiecks ABF einander gleich, und demnach auch die Seiten desselben. Oder das Dreieck BAC ist gleichseitig. IV, 129. Folgender ist die Seite des regulären Sechseckes AB, dem Radius AF des Cirkels gleich, in welchem das Sechseck kan beschrieben werden. Man beschreibet also in einem gegebenen Cirkel ein reguläres Sechseck gar leicht. Man darf nur

Es

den

V. den Radius in dem Umkreis herum setzen, er wird denselben genau in sechs gleiche Theile theilen, und man wird, wie überhaupt gezeigt worden, V. 83. so dann das Sechseck ausmachen können.

§. 90. Vermehret man in einer regulären Figur, welche man in dem Cirkel beschrieben, die Zahl der Seiten, und beschreibet zum Exempel an statt eines Sechsecks in eben dem Cirkel ein Zwölfeck, so werden die Bogen in welche man den Umkreis theilen muß, um die Figur zu beschreiben, nothwendig kleiner. Also werden auch die Seiten selbst kleiner, V. 39. Sie entfernen sich von dem Mittelpuncte, und nähern sich hingegen dem Umkreise des Cirkels. V. 37. Alles dieses ist aus demjenigen leicht zu schließen, so wir gleich Anfangs von den Sehnen gesehen. Da aber doch allezeit die Seiten einer in den Cirkel beschriebenen Figur, Sehnen von dem Cirkel sind, so können diese Seiten ohnmöglich, weder ganz noch zum Theil, außerhalb des Cirkels fallen, und ist also ein jedes Vieleck, so wir nach gegenwärtiger Anweisung beschrieben, ganz und gar innerhalb des Cirkels enthalten, und kleiner als der Cirkel, ob zwar durch die beständig fortgesetzte Vermehrung der Zahl der Seiten das Vieleck dem Cirkel immer näher und näher kommet, und von demselben der Größe und Figur nach immer weniger und weniger verschieden wird. Man gebe sich die Mühe diese Vermehrung der Zahl der Seiten selbst zu verrichten, so wird man die Sache vollkommen deutlich einsehen.

F. 148. §. 91. Will man um einen gegebenen Cirkel herum ein reguläres Vieleck beschreiben, so nemlich, daß alle Seiten des Vieleckes den Cirkel berühren, so kan man es fast auf eben die Art thun, die wir gewiesen haben ein Vieleck in einen Cirkel zu beschreiben. Man theile wieder den gegebenen Cirkel in so viele gleiche Theile, als viele Seiten die Figur haben sol, vermittlest der Puncte A, B, C, und so fort. Wir haben sieben dergleichen Theile gemacht, weil wir ein Siebeneck beschreiben wollen. Ist diese Theilung verrichtet, so ziehe man V. 42. durch ein jedes der Puncte A, B, C und so weiter, eine gerade Linie, welche den Cirkel berührt, und verlängere sie so lange, bis sie die nächste Berührungslinie antrifft, wodurch sich die Winkel E, F, G geben werden, die Figur E, F, G und so fort, wird das verlangte Vieleck seyn.

§. 92. Auch hier zeigt der natürliche Verstand die Richtigkeit der Auflösung leicht. Der Cirkel ist um und um von einerley Rundung.

Dung. Die Seite des Vieleckes EF ist nicht anders geleyet worden V. als die andere FG, und die dritte und die übrigen. Dadurch sind die Winkeln E, F, G entstanden, und die Seiten EF, FG haben dadurch ihre Länge bekommen. Welche Seite sol denn länger seyn als eine andere, und welcher Winkel E, F, G &c. ist grösser als der andere? Es ist nirgends etwas verschiedenes angenommen worden, indem wir das Vieleck verfertigt haben, wodurch solte demnach dasselbe auf einer Seite anders worden seyn, als auf der andern?

S. 93. Ein Geometra aber wird hier, aus den gegebenen Gründen, also schliessen können. Wenn man von den Puncten A, B, C nach dem Mittelpuncte gerade Linien ziehet, und ferner noch andere von den Ecken E, F, G &c., so siehet man, daß die Winkel bey H alle gleich seyn müssen. Denn AHB ist dem BHC gleich, weil die Bogen AB und BC gleich gemacht worden, und so ist es rund herum bey allen solchen Winkeln. Da nun aus dem Puncte E, aus welchem zwei gerade Linien gezogen sind EA, EB, die den Cirkel in A und B berühren, auch die Linie EA nach dem Mittelpuncte gezogen ist, so schneidet diese EH den Winkel AHB in zwey gleiche Theile, V, 76, und eben so theilet FH den Winkel BHC gleich, und so ist es wieder rings herum. Es sind demnach alle Winkel um den Mittelpunct H, AHE, EHB, BHF und so fort, einander gleich, weil ein jeder derselben eine Hälfte ist eines der gleichen Winkel AHB, BHC, und so weiter. Da nun also zwey Dreyecke die neben einander auf einer Seite des Vieleckes stehen, als HEB, und HBF, den Halbmesser HB mit einander gemeinschaftlich haben, und ihre Winkel bey H einander, wie erwiesen worden, gleich, ihre Winkel bey B aber gerade, und folgender einander ebenfalls gleich sind: denn die Berührungslinie EF machet mit dem Halbmesser HB nothwendig gerade Winkel, V, 47. so sind die übrigen Winkel dieser Dreyecke bey E und F einander ebenfalls gleich, nemlich $HEB = HFB$, wie auch ihre übrige Seiten $EB = BF$. IV, 126. Da aber ausser dem auch die Seiten EA und EB gleich seyn, wie auch die beyden Winkel bey E, V, 76. so ist $AE = EB$, und $EB = BF$, und $BF = FC$, und so rings herum. Wie auch $AEH = HEB$, und $HEB = HFB$, und $HFB = HFC$, und so wieder rings herum. Und wenn man demnach überall zwei von den gleichen Linien $EB + BF$, wie auch $FC + CG$ und so fort zusammen setzet, so siehet man daß EF, FG und die übrige Seiten unserer Figur einander gleich sind. Man setze ferner die zweyen gleiche Winkel bey E, F, G

V. E, F, G zusammen, so bekommt man die Winkel des Vielecks, welche bey so gestalten Sachen, da ihre Helften gleich sind, auch alle gleich seyn müssen. Und demnach hat das Vieleck, welches wir um den Cirkel herum beschreiben, lauter gleiche Seiten und lauter gleiche Winkel, wie verlangt worden.

S. 94. Die Punkte E, F, und so ferner, der Berührungslinien, welche die Seiten der Figur abgeben, sind am allerweitesten von dem Umkreise des Cirkels entfernt. Beschreibet man aber um eben den Cirkel ein anderes reguläres Vieleck, welches mehr Seiten hat als das gegenwärtige, so werden die Seiten nothwendig kürzer, und die Ecken dieses Vielecks fallen dem Umkreise des Cirkels näher, und dieses geschieht immer fort, je mehr man Seiten in das reguläre Vieleck bringet. Doch weil die Seiten eines solchen Vielecks doch immer Berührungslinien bleiben, so können sie ohnmöglich weder ganz noch zum Theile innerhalb des Umkreises des Cirkels hinein fallen; V. 42. noch weniger können die Ecken der Figur als diejenigen Punkte dieser Berührungslinien, welche jederzeit am allermeisten sich von dem Umkreise entfernen, jemals innerhalb des Umkreises zu liegen kommen, man mag auch die Zahl der Seiten des Vielecks vermehren wie man wil, und demnach ist ein dergleichen Vieleck, so viele Seiten es auch haben mag, immer grösser als der Cirkel.

S. 95. Aus demjenigen, so wir V. 85. von den Winkeln der regulären Vielecke gewiesen, schliesset man auch, wie auf eine gegebene Seite AB ein reguläres Vieleck von so vielen Seiten, als erfordert wird, zu setzen sey. Wir wollen uns vorstellen, daß dieses bereits verrichtet worden, daß man, zum Beispiele, auf AB ein Fünfeck in einem Cirkul beschrieben, und aus dem Mittelpuncte desselben C nach A und B die zween Halbmesser CA, CB gezogen: so ist C der Winkel an dem Mittelpuncte bey einem Fünfecke, und wird gefunden, wenn man vier rechte Winkel durch die Zahl der Seiten des Fünfecks, das ist durch 5, theilet; er hält demnach $\frac{4}{5}$ eines rechten Winkels. Diesen ziehe man von der Summe aller Winkel des Dreys ABC, das ist von zween geraden Winkeln, ab, so bleibet $2 - \frac{4}{5}$, das ist $\frac{6}{5}$, oder $\frac{2}{5}$ von einem rechten Winkel, und so viel betraget die Summe der beyden Winkel bey A und B. Weil sie einander gleich sind, so ist jeder dieser Winkel, die Helfte ihrer Summe, und demnach ist $A = B = \frac{1}{5}$ von einem geraden Winkel. Wir wie-

der.

berholen hier was bereits gezeigt worden, etwas anders. Denn wir haben bereits IV, 228. eine allgemeine Regel angegeben, den Winkel, welchen die Seiten eines jeden gleichwinklichten Vieleckes mit einander machen, zu finden, und von einem solchen Winkel ist, $CAB = CBA$. die Helfte. V, 87. Nach dieser Berechnung ist das Fünfeck leicht beschrieben. Man setze an die gegebene Seite AB beyderseits die Winkel A und B , wie sie gefunden werden, nemlich $\frac{2}{3}$ von einem geraden Winkel, dadurch wird das Dreyeck ACB fertig, dessen Spitze in den Mittelpunct des Cirkels fällt, in welchem das Fünfeck kan beschrieben werden, dessen Seite AB ist, und in welchem sich die Sehne AB fünfmal herum tragen lästet. Denn weil der Winkel bey C , ein Fünftel ist von vier rechten Winkeln, so muß, wie gezeigt worden, auch der Bogen AB der fünfte Theil des ganzen Umkreises seyn, V, 13. und demnach seine Sehne AB , wenn man sie fort trägt, wieder das andere, und so dann das dritte, das vierte, und das fünfte Fünftel von dem Umkreise abschneiden, und folgendes diesen in fünf gleiche Theile theilen.

§. 96. Wenn man demnach nur einen rechten Winkel theilen könnte, wie man wolte, so hätten auch alle dergleichen Aufgaben keine Schwierigkeit; da aber, wie V, 75. gesagt worden, eine allgemeine Theilung dieses Winkels wie aller übrigen nicht kan gezeigt werden, so bleibt auch die gegenwärtige Auflösung im Grunde mangelhaft, so doch, daß dadurch die Ausübung nicht das geringste leidet. Denn man kan $\frac{2}{3}$ von einem geraden Winkel leicht angeben, indem man aus der Spitze A des geraden Winkels BAC den Quadranten BC beschreibet, diesen in fünf gleiche Theile theilet, und nach dem dritten Theilungspunct die Linie AD ziehet: so wird der Winkel DAC , dreien Fünfteln des geraden Winkels BAC gleich, und folgendes die Helfte des Winkels, welchen die Seiten eines Fünfeckes einschließen. Eben so verfähret man in allen dergleichen Fällen.

F. 150.

§. 97. Wäre aber auf die Seite AB , an statt des Fünfeckes ein Sechseck zu beschreiben gewesen, so hätte man den Mittelpunct des Cirkels C , in welchen es zu beschreiben ist, geometrisch finden können, weil in diesem Fall das Dreyeck CAB gleichseitig, und der Halbmesser CA der Seite AB gleich ist. V, 89. Man darf demnach nur auf die gegebene Seite AB ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben, so hat man den Mittelpunct des Cirkelkreises zu dem Sechseck. Ubrigens verfähret man, wie gelehret worden.

Es 3

§. 98.

V. S. 98. Nehmen wir nun dasjenige, so von den regulären Vielecken
 Abschnit. gesagt worden ist, zusammen, und beschreiben in einem Cirkel ein re-
 F. 151. gulars Vieleck von so vielen Seiten als man wil, zum Exempel das
 Fünfeck ABCDE, und ein anders von eben so vielen Seiten um den-
 selben, und vermehret so dann die Zahl der Seiten beyder Vielecke:
 (am bequemsten ist es, daß man ihrer doppelt so viel mache): so se-
 hen wir, daß, indem sich der Umkreis des innern Vielecks nach allen
 Seiten an den Umkreis des Cirkels begiebet, V. 90. und der Umkreis
 des äussern Vieleckes sich ebenfalls mit allen seinen Ecken von aussen
 dem Cirkel nähert: V. 94. sich auch die Umkreise dieser zweyen Viel-
 ecke einander selbst nähern müssen, oder daß sich der Umkreis des äus-
 sern Vieleckes, welches mehr Seiten hat, dergleichen in der Fi-
 gur das äussere Zeheneck ist, von dem Umkreise des innern Vieleckes
 von eben so vielen Seiten um und um weniger entferne, als der Um-
 kreis des äussersten Vieleckes, von wenigern, nemlich in unserm Fall
 von fünf Seiten sich von dem Umkreise des innern Vieleckes von eben
 so vielen Seiten um und um entfernt, daß aber beständig, weil kein
 Punkt des Umkreises des äussern Vieleckes innerhalb des Cirkels,
 V. 90. und kein Punkt des Umkreises des innern Vieleckes ausserhalb
 des Cirkels fallen kan, V. 94. der Umkreis des Cirkels zwischen beyden
 Umkreisen der Vielecke in der Mitte bleibe, und von den Umkreisen der
 Vielecke beschloffen werde. Vermehret man nun die Zahl der Sei-
 ten noch weiter, und machet sie wieder doppelt so groß als sie vorher
 waren, so kommen die Umkreise der Vielecke einander noch näher, es
 gehet dieses ohne Ende fort, und man kan keine Gränzen setzen, wo die-
 se Näherung aufhören sollte.

S. 99. Gesetzt, man habe in Gedanken die Seiten der Vielecke
 auf die Art bis auf tausend vermehret, so siehet man leicht, daß wenn
 man zwey Tausendecke, eines um den Cirkel, und eines innerhalb des-
 selben beschreiben wil, der Unterscheid der Umkreise kaum mehr mit den
 Augen wird können bemerkt werden. Man versuche nur ein derglei-
 chen Vieleck von vier und zwanzig Seiten zu beschreiben, so wird man
 schon sehen, wie wenig ihre Umkreise von einander abstehen, und was
 ist 24 gegen tausend? Doch ist hier noch ein Unterschied des innern
 Vieleckes von dem äussern einiger massen merklich, und auch bey einem
 Tausendecke kan wenigstens der Verstand uns einen Unterschied des
 äussern Vieleckes von dem inneren vorstellen. Und eben so ist es, wenn
 man auch den Vielecken eine Million von Seiten gäbe; die richtigsten
 Schlüsse

Schlüsse werden uns allezeit dahin bringen, daß wir zugeben müssen, daß das äussere Vieleck, welches um den Cirkel beschrieben worden, grösser sey als das innere. Und wie könnte sonst jenes das äussere, und dieses das innere seyn? Die Seiten des äussern Vieleckes sind allezeit Berührungslinien, und entfernen sich von dem Umkreise des Cirkels, so bald sie sich von den Berührungspuncten entfernen. Und die Seiten des innern Vieleckes sind allezeit Sehnen, welche demnach ganz in dem Cirkel liegen, und bloß mit ihren äussersten Puncten in dessen Umkreis fallen können.

V.
Abschnitt.

§. 100. Doch fällt der Umkreis des Cirkels beständig zwischen die Umkreise zweyer dergleichen in und um denselben beschriebener Vielecke, und ist grösser als der Umkreis des innern, und kleiner als der Umkreis des äussern: und sind der Seiten viele, so ist der Umkreis des Cirkels von keiner dieser beyden eckigten Umkreise sonderlich unterschieden, weil die eckigten Umkreise selbst einander fast gleich sind. Man siehet hieraus, wie man eine Länge angeben könne, welche dem Umkreise eines Cirkels ziemlich nahe kommet. Man beschreibe in dem Cirkel ein reguläres Vieleck von sehr vielen Seiten, je mehr je besser, zum Exempel ein 96 Eck, und um den Cirkel beschreibe man ein reguläres Vieleck von eben so vielen Seiten. Man messe oder suche auf diejenige Art, welche am genauesten zum Zweck führen kan, den Umkreis so wohl des innern als des äussern Vieleckes. Man kan den einen oder den andern derselben vor den Umkreis des Cirkels halten. Eigentlich werden durch diese Umkreise der beyden Vielecke die Gränzen bestimmt, zwischen welche der Umkreis des Cirkels gewiß fallen muß, als welcher grösser ist als der Umkreis des innern Vieleckes, und kleiner als der Umkreis des äussern. Man siehet leicht, daß man dadurch ausser den Stand gesetzt wird, bey dem Umkreise sonderlich zu fehlen, und daß man noch über dieses die Fehler immer verkleinern kan, indem man nur den Vielecken mehr Seiten giebet.

Don geraden Linien, so den Cirkel schneiden.

§. 101. Dasjenige, so wir bisher von dem Cirkel gesehen, ist aus der Betrachtung der Sehnen desselben und der Berührungslinien geflossen. Wir haben nur noch etwas wenigens von solchen geraden Linien zu sagen, welche keine Sehnen sind, und den Umkreis des Cirkels doch schneiden, wenn sie verlängert werden: oder die von einem

- V. einem gegebenen Puncte, welches der Mittelpunct nicht ist, an den
 Abschnitt. Umkreis des Cirkels gezogen werden. Es sey erstlich das Punct A
 F. 152. dergestalt innerhalb des Cirkels gegeben, und von demselben sey durch
 den Mittelpunct die Linie BCD gezogen. Man ziehe ferner AE,
 AF, bis an den Umkreis, und an einer Seite des Durchmessers:
 nicht etwa eine zur Rechten desselben, und die andere zur Linken: so
 wird allezeit diejenige Linie grösser, welche sich von der Linie AB wei-
 ter entfernt, und mit dieser Linie einen grössern Winkel einschliesst,
 als diejenige, die sich derselben mehr nähert. AF ist grösser als AE,
 und so ist es immer, man mag dergleichen Linien ziehen wie man wil.
 Oder man kan eben das ausdrücken, wenn man saget, daß die Li-
 nien AE wachsen und grösser werden, indem sie sich dem Theil der
 Linie AD, in welchem der Mittelpunct C anzutreffen ist, nähere.
 Denn indem sich AE von der AB entfernt, so nähert sie sich der
 AD, und ist also dieses mit dem vorigen einerley gesagt. Ist zwey-
 tens das Punct A ausserhalb des Cirkels genommen worden: und
 man hat wieder durch dasselbe und den Mittelpunct die Linie ABCD
 gezogen, welche den Umkreis in B und D schneidet, und man ziehet
 zwei andere gerade Linien AE und AF, welche den Umkreis schnei-
 den, und sich in E und F an dessen Hohlung endigen, so ist eben die-
 ses richtig. Diejenige dieser Linien, welche der AD näher lieget, das
 ist AF, ist grösser als diejenige, welche weiter von derselben ablieget,
 AE. Und dieses ist wieder beständig richtig, man mag übrigens
 F. 154. dergleichen Linien AF, AE ziehen wie man wil. Hat man aber drit-
 tens das Punct A noch ausserhalb des Cirkels angenommen, und
 aus demselben die zwei Linien AE, AF nur so weit gezogen, bis sie
 den Cirkel erreicht, ohne ihn vorher zu schneiden, so ist diejenige die
 grössere, welche von der AB weiter ablieget. AF nemlich ist grösser
 als AE, weil der Winkel FAB grösser ist als EAB. Dieses ist
 das einzige, so wir von dem Cirkel noch zu erweisen haben, das übrige
 wird unten vorkommen.

G. 102. Es lässet sich aber dieses alles gar leicht einsehen, wenn
 man sich vorstellt, daß von einem dieser Puncte E der Halbmesser
 EC gezogen sey: und so dann sich die Linie EA in AF, und von dan-
 nen weiter bewegen lasse. Indem dieses geschieht, bleibt die Seite
 CA, wie auch die Seite EC beständig von einerley Grösse, der Win-
 kel ECA aber wird immer grösser und grösser, indem aus
 dem

denſelben der Winkel FCA , und endlich ein noch größerer wird. V. Wir haben aber gleich Anfangs IV, 107. geſehen, daß indem dergeltalt Abſchnitt ein Winkel ECA wächst, auch die Seite wachsen müſſe, welche dem Winkel entgegen geſetzt iſt, wenn nemlich, wie hier, die übrigen Seiten AC , EC von einerley Größe bleiben. Und alſo iſt FA größer als EA , und ſo weiter.

S. 103. Dieſe Schlüſſe ſchickenſich zu allen dreien Zeichnungen, welche die beſondern Fälle dieſes Satzes vorſtellen. Man kan aber auch denſelben überhaupt dergeltalt ausdrücken, daß man nicht nöthig hat auf die beſondere Lage des Punctes A Acht zu haben. Nachdem man durch dieſes Punct den Durchmesser ABC gezogen, deſſen äußerſtes Punct B dem Puncte A näher iſt, als das entgegen geſetzte: So ſtelle man ſich das Punct E erſtlich in B vor, und führe es ſo dann in den Umkreis durch E , F bis in D , ſo daß es beſtändig die Linie AE mit ſich nimmet. Es iſt in allen Fällen AE die kleinſte, wenn E in B fällt. Sie wächst, indem E in dem Umkreiſe ſich von B entfernt, beſtändig, und wird endlich die größte unter allen Linien, welche von dem Punct A an den Umkreis können gezogen werden, wenn E in D fällt.

S. 104. Wil man aber dieſe Schlüſſe etwas bündiger faſſen, ſo ziehe man in der 152. Zeichnung auch nach F , den Halbmesser CF , und hänge die zwey äußerſten Puncte dieſer Linien E und F mit der Sehne EF zuſammen: So iſt das Dreieck ECF gleichſchenklich, und die Winkel CEF und CFE ſind einander gleich. Weil nun der Winkel AEF aus dem Winkel CEF wird, indem man dieſem den Winkel AEC zuſetzt: So iſt AEF größer als $CEF = CFE$, und folgendes iſt der Winkel AEF noch vielmehr größer als AFE , welcher kleiner iſt als CFE . Man ſiehet alſo, daß in dem Dreieck AEF der Winkel AEF , welcher der Seite AF entgegen ſtehet, größer ſey als der Winkel AFE , welcher der Seite AE entgegen geſetzt iſt, und demnach iſt auch die Seite AF größer als die Seite AE . Denn in einem jeden Dreiecke iſt die größere Seite dem größeren Winkel entgegen geſetzt IV, 240.

S. 105. Eben dieſer Beweis iſt auch anzuwenden, wenn man zeigen wil, daß AF in der 153 Figur größer ſey als AE . Man wiederhole die Schlüſſe, welche wir eben gegeben, und wende ſie auf die gegenwärtige 153 Figur an, ſo wird man von der Richtigkeit des Satzes auch in dieſem Fall vollkommen überzeuget werden.

V. §. 106. Daß aber auch in der 154 Figur AF grösser sey als Abschnitt AE, siehet man, wenn man wieder den Halbmesser CF ziehet, und denselben so wohl als den vorigen CE nach Belieben in G und H verlängert. Weil wider das Dreieck CEF, welches die Sehne FE mit den Halbmessern CE, CF machet, gleichschenkllich ist, und weil also die Winkel CEF, CFE einander gleich sind; so sind auch ihre Ergänzungen zu zweien geraden Winkeln GEF und HFE einander gleich. Nun ist der Winkel AEF grösser als GEF = HFE, und AFE ist kleiner als HFE, also ist auch AEF grösser als AFE, und es ist wieder IV, 240: in dem Dreieck AFE die Seite AF, welche dem grössern Winkel AEF entgegen steht, grösser als die Seite AE, welche dem kleinern Winkel AFE entgegen gesetzt ist.

§. 107. Da nun also in der 152 und 153 Figur, die Linie AE immer wächst, indem sie sich nach und nach gegen der AD neiget, so muß notwendig diese Linie, welche aus A durch den Mittelpunct bis an den Umkreis in D gezogen ist, die grössste unter allen geraden Linien seyn, welche aus A an den Cirkelkreis können gezogen werden. Denn es kan die Linie AE nachdem sie in AD gefallen, sich dieser Linie AD nicht noch weiter nähern. Und man siehet leicht, daß in der andern Hälfte des Cirkels zur rechten, eben dasjenige statt habe, so wir von den Linien AE, AF in der linken Hälfte gezeigt haben. Im Gegentheil ist in der 152 und 154 Figur die Linie AB, welche den Umkreis erreicht, ohne daß sie durch den Mittelpunct gegangen, die kleinste unter allen AE, AF. Denn weil die Linie AF immer kleiner wird, indem sie sich dieser Linie AB nähert, und dadurch nach und nach bis zur Grösse AE, und so weiter abnimmet, so kan es nicht fehlen, es muß AB die kleinste unter allen diesen Linien seyn. Denn näher als AB sich selber ist, kan AE der AB nicht werden. Entfernet sich aber AE von der AB auf der andern Seite des Durchmessers zur Rechten, so wächst sie wieder, wie sie auf der linken Seite abgenommen, daß also überall AB die kleinste der beschriebenen Linien bleibet.

Sechster Abschnitt.

VI.
Abschnitt.

Von den Verhältnissen, und deren Gleichheit.

Grund-Begriffe.

S. 1.

Sie haben bisanhero die einfachsten Größen, so wohl die Zahlen, als die geraden Linien, vor sich betrachtet, und die vornehmsten Eigenschaften derselben, die auf die Art eingesehen werden konnten, uns bekannt gemacht. Oder wenn wir sie mit einander vergleichen, so haben wir bloß auf die Gleichheit oder Ungleichheit derselben gesehen, ohne uns bey der Größe der einen dieser Zahlen oder Linien, die man ihr in Ansehung der andern zuschreiben muß, aufzuhalten, und dieselbe zu untersuchen. Es ist nöthig, daß wir nunmehr auch einige derselben auf die andere beziehen lernen, und uns dasjenige ebenfalls vorstellen, was von den Größen gesagt werden kan, wenn man sie dergestalt mit einander vergleicht. Diese Betrachtungen sind etwas schwerer als die vorigen. Wir werden uns indessen alle Mühe geben dieselbe so leicht zu machen, als es uns möglich seyn wird.

S. 2. Man vergleicht zwei Größen, zum Exempel zwei gerade Linien A und B mit einander, wenn man sich vorstellt, daß die eine derselben A eben so groß sey als die andere B, oder daß A größer oder kleiner sey als B; und wie groß eigentlich A in Ansehung der B, oder B in Ansehung der A sey. Alles dieses kan nicht geschehen, wenn nicht A durch beständiges wachsen oder abnehmen der B endlich gleich, und so dann größer oder kleiner werden kan als B. Ist aber dieses, und kan die A, indem sie beständig wächst oder abnimmet, endlich der B gleich, und nach Belieben größer oder kleiner werden als B, so kan man diese zwei Größen allerdings mit einander vergleichen.

F. 155.

S. 3. So ist es mit allen geraden oder krummen Linien beschaffen, welche man alle mit einander vergleichen kan, weil sie alle entstehen, indem ein Punkt aus seiner Stelle fortfließet. Dadurch wird die

Et 2

Linie

VI. Linie beständig vergrößert, und man kan sich vorstellen, daß sie hin-
 und wieder verkleinert werde, indem das Punct, welches die Linie be-
 schrieben, in seinem vorigen Wege zurücke gehet, und in demselben sich
 dem Orte nähert, von welchem es zu erst ausgegangen. Man siehet
 leicht, daß indem dergestalt eine Linie beständig wächst oder abnim-
 met, sie endlich einer jeden andern Linie, sie mag so groß oder so klein
 seyn, als sie wil, gleich werde, und daß sie grösser werde als diese,
 wenn sie so dann noch weiter wächst, oder kleiner, wenn sie noch
 mehr abnimmet. Eben so ist es mit allen Grössen, von einerley Art
 beschaffen. Wenn man zwey Gewichte annimmt, wie man wil, so
 kan das kleinere durch beständiges Wachsen dem grössern gleich wer-
 den, und das grössere dem kleinern, indem es beständig abnimmet.
 Und man kan also alle Grössen von einerley Art mit einander ver-
 gleichen.

§. 4. Wie groß aber eigentlich eine gegebene Grösse in Anse-
 hung der andern sey, erkennet man auf zweyerley Arten. Es sey die
 Grösse der Linie A in Ansehung der Linie B zu bestimmen, oder, man
 sol nicht nur sagen, ob A in Ansehung der B sehr groß, oder nicht gar
 groß, oder sehr klein, oder nicht sonderlich klein sey; sondern auch,
 was A eigentlich vor eine Grösse in Ansehung der Grösse der Linie B
 habe: so können entweder die beiden Linien in gleiche Theile getheilet
 werden, so groß oder so klein diese auch seyn mögen, oder es gehet die-
 ses nicht an. Daß das erstere öfters seyn könne, ist kein Zweifel, denn
 man kan ja zwey Linien aus gleichen Theilen zusammen setzen, indem
 man einer jeden eine gewisse Zahl solcher Theile giebet, wie auf die
 Art AB und CD in der 156. Zeichnung entstanden.

P. 156.

§. 5. Das andere, daß nicht alle Linien sich dergestalt aus glei-
 chen Theilen zusammen setzen lassen, siehet man folgender Gestalt ein:
 Gesezet, man habe die Linien AB und CD in gleiche Theile getheilet, oder
 aus gleichen Theilen zusammen gesezet, so verlängere man die zweite der-
 selben CD um das Stück DE, so kleiner ist als eines dieser Theile: so ist so
 gleich klar, daß die beiden Linien AB und CE sich nun nicht mehr aus sol-
 chen Theilen werden zusammen setzen lassen, aus welchen man die Linien
 AB und CD zusammen setzen konnte. Wolte man aber sagen, man könne
 sie doch vielleicht aus kleineren Theilen zusammen setzen, so muß
 man zwar zugeben, daß dieses zuweilen seyn könne: denn es kan
 wirklich DE entweder die Hälfte, oder der dritte, oder der vierte
 Theil derjenigen Linie seyn, durch deren Wiederholung man die
 AB

AB und CD heraus gebracht hat, oder es kan DE $\frac{2}{3}$, oder $\frac{1}{2}$, oder $\frac{1}{3}$, VI. oder etwas dergleichen von derselben Linie betragen, in welchen Fällen Abschnitt man allezeit so wohl die Linie DE als auch ein jedes dergleichen Theile, aus welchen AB und CD zusammen gesetzt worden ist, wieder in gleiche Theile zertheilen kan, wodurch hernach auch die ganze AB so wohl als die CE in lauter gleiche Theile getheilet wird. Allein es kan auch DE kleiner seyn als eine Helfte eines solchen Theiles der AB, kleiner als ein Drittel, kleiner als ein Viertel, ein Zehentel, ein Tausendtel, ein Milliontausendtel, ja kleiner als ein jeder Bruch, welcher genannt und angegeben werden kan, wie man leicht sieht. Und in diesem Fall ist es nicht möglich, daß die beiden Linien AB und CE in Theile getheilet werden, die einander gleich sind, man mag sie vergleichen, wie man wil. Denn wie wil man eine Linie in solche Theile theilen, die kleiner sind, als eine jede Größe, welche auszusprechen ist?

§. 6. Es ist wahr, man kan ein Theilchen als DE, wenn dasselbe kleiner ist als alles so genennet oder gegeben werden kan, in Ansehung einer jeden begreiflichen Größe, AB oder CD, vor nichts halten, ob es zwar an sich selbst etwas ist. Es bedienen sich dieses Begriffs heut zu Tage viele große Männer. Sie nennen dergleichen Theilchen unendlich kleine Theilchen, und wenn man dieselbe annimmt, so folget, daß jede zwei gerade Linien sich in gleiche Theile zertheilen lassen, wenn nemlich nicht von einer solchen Theilung die Rede ist, die wir wirklich bewerkstelligen können, sondern von einer solchen, die wir nur begreifen, und uns in Gedanken vorstellen.

§. 7. Denn man kan sich in der That in der Linie AB so wohl als in der Linie EC so viele Theilchen vorstellen, als man wil, und von was Größe man wil. Werden der Theilchen in AB unendlich viele, so werden sie auch unendlich kleine. Das ist, wenn man der Theilchen in AB sich immer mehrere und mehrere vorstelllet, so werden dieselben auch immer kleiner und kleiner: und gleichwie man in der Vermehrung der Zahl der Theile ohne Ende fortgehen kan, so kan man auch in der Verkleinerung eines jeden dieser Theilchen beständig fortfahren, so daß man niemals auf Theilchen kommt, welche nicht weiter könten getheilet werden. Wenn man nun aus den Theilen der Linie AB die CE zusammen setzen wil, so kan es zwar allerdings kommen, daß eine gewisse Zahl dieser Theilchen eine Linie giebet, die kleiner ist als CE, und wenn man noch ein solches Theilgen hinzu setzt, diese Linie CE übertreffen wird. Wie in der Figur sichtlich ist;

VI. **Abchnitt.** da man AB in 5 gleiche Theile getheilet hat, deren sieben weniger geben als EC, und deren achte mehr als EC ausmachen. Allein man kan doch, indem man dergestalt eine Linie, wie EC, aus den Theilen einer andern AB zusammen setzet, niemals um ein Ganzes solches Theilchen fehlen. Und sind demnach die Theilchen unendlich klein, so fehlet man nicht mehr als um einen Theil eines unendlich kleinen Theilchens. Da nun das Ganze unendlich kleine Theilchen in Ansehung der CE vor nichts zu halten ist, VI, 6. so wird noch vielmehr ein Theil desselben vor nichts zu halten seyn, und man kan also sagen, daß man die Linie CE allezeit aus solchen Theilen zusammen setzen könne, welche entstehen, indem man eine jede andere Linie AB genau in gleiche Theile theilet.

§. 8. Wolte jemand sagen, man fehle in einer dergleichen Zusammensetzung dennoch, so klein als auch dieser Fehler seyn mag, so kan man zwar nicht in Abrede seyn, daß dieses geschehe, wenn man sich genau an den Verstand der Worte binden will. Allein gleichwie man weniger fehlet als vorher, wenn man die Linie AB in 30 Theilchen theilet, und aus diesen Theilchen eine Linie zusammen setzet, welche der CE so nahe kommet, als nur bey dieser Theilung und Zusammensetzung möglich ist, und wieder ungemein weniger, wenn man sich in AB hundert oder tausend Theilchen vorstellet, und überhaupt die Linie CE immer genauer heraus bringet, je mehr Theilchen man der AB giebet, und je kleiner folgendes ein jedes derselben wird: also kan man auch, wenn man sich bey einer noch so grossen Zahl der Theile in AB einiges Fehlers befürchtet, indem man aus solchen Theilchen die CE zusammen setzen will, ein jedes der Theilchen der AB zu wiederholten malen in noch mehrere, und folgendes noch kleinere, Theile theilen, und dadurch den Fehler noch immer kleiner und kleiner machen, weil er niemals so groß werden kan, als eines der Theilchen der AB. Auf die Art kan man den Fehler so sehr vermindern als man will, so daß er endlich so klein wird, daß er wirklich vor nichts, und vor keinen Fehler, zu halten ist.

§. 9. So richtig aber diese Begriffe an sich sind, so muß man doch gestehen, daß sie nicht bey allen Beyfall finden. Insonderheit stoßen sich öfters solche Anfänger an denselben, welche gewohnet sind auf alles genau Acht zu haben. Und man kan nicht in Abrede seyn, daß sie sich von der Deutlichkeit, welche in der Geometrie überall herrschen soll, einiger Massen entfernen, und die vollkommene Ueberein-
stim-

Stimmung aller Theile dieser Wissenschaft durch solche Redensarten aufheben, welche einigen Sätzen derselben zu widersprechen scheinen. Derowegen haben sich auch die Alten, welche nicht die bloße Wahrheit, sondern die augenscheinlichste Wahrheit und eine vollkommene Evidenz in ihren Geometrischen Schriften zum Augenmerke hatten, derselben niemals bedienet. Sie nehmen nichts als möglich an, so nicht wirklich kan bewerkstelliget werden, und nennen also eine Theilung einer geraden Linie niemals möglich, wenn sie nicht zeigen können, wie sie zu verrichten sey. Dieses aber gehet bey einer Theilung ohne Ende nicht an, in diesem Verstande, in welchem das Wort hier genommen wird. Es ist zwar richtig, und wir sehen es aus dem, so gewiesen worden, vollkommen ein, daß eine jede gerade Linie in zwey gleiche Theile getheilet werden kan, welche Theile wiederum gerade Linien sind, und daß demnach ein jeder solcher Theile wieder dergestalt getheilet werden könne, und dieses ohne Ende fort, das ist, ohne daß man von der innern Beschaffenheit des Dinges gezwungen wird, jemals aufzuhören, wie dieses zum Exempel geschehen würde, wenn man durch eine dergleichen Theilung endlich auf wirkliche Punkte käme, welche keine Größe und Theile haben, und sich also auch nicht in Theile zertheilen lassen. Allein man kan doch durch eine noch so oft wiederholte Theilung niemals auf unendlich kleine Theile kommen, und wenn man auch seine ganze Lebenszeit anwenden wolte, eine Linie immer fort dergestalt zu theilen, und so scharffe Sinnen hätte, daß man alle diese Theilungen bey den kleinsten Linien auf das genaueste verrichten könnte: so würde doch die Zahl dieser Theile endlich, und weit kleiner seyn, als die Zahl der Zeitsecunden eines menschlichen Alters, und man könnte die Größe des kleinsten Theilchens aus der Größe des Ganzen durch einen Bruch bestimmen. Dieses wolten die Alten sagen, indem sie eine Theilung ohne Ende dadurch vor ohnmöglich angaben, indem sie erwiesen, daß es gerade Linien gäbe, welche nicht wie die AB und CD aus gleichen Theilen könnten zusammen gesetzt werden.

VI.
Abschnitt.

S. 10. Wir wollen uns also an diese alten Begriffe, als die leichter und deutlicher sind als diejenigen, so eine unendliche Theilung zum Grunde haben, halten: und zeigen, wie man so wol solche Größen genau vergleichen soll, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, als auch die Gründe der Vergleichung derjenigen Größen angeben, bey welchen diese Theilung entweder nicht statt findet, oder doch nicht geschehen ist. Dieser letztern werden diejenigen entbehren
könn-

VI. Können, welche annehmen wollen, daß alle Größen aus unendlich
 Abschnitt. kleinen gleichen Theilen zusammen gesetzt werden können.

F. 155. §. 11. Vergleichen man nun zwei Linien A und B mit einander, und bestimmt die Größe der ersten A aus der Größe der andern B alleine, ohne was fremdes anzunehmen; indem man sich einen Begriff von dieser Größe macht, oder denselben auf diese oder jene Art durch Worte oder Zeichen ausdrückt: so sagt man, man habe die Verhältniß der Linie A gegen die Linie B bestimmt oder ausgedrückt. Eben dieses hat bey allen Größen von einerley Art statt, VI. 3. und man kan hieraus sehen, was das Wort Verhältniß, bedeute, wenigstens so viel zum ersten Anfang genug ist, denn wir werden in dem Verfolg dieser Abhandlung alles deutlicher einsehen. Die beyden Größen welche man mit einander vergleicht, wie hier A und B, heißen die Glieder der Verhältniß. Und zwar das erstere oder vorhergehende Glied, dasjenige, so man zuerst nennet, das nachfolgende oder zweyte aber, dasjenige, so man jenem nachsetzet.

Welche Verhältnisse einander gleich oder ungleich sind.

F. 157. §. 12. Wenn die Größe der Linie A aus der Größe der Linie B
 158. eben so bestimmt wird, wie die Größe der C aus der Größe der Linie D, so sagt man, die Verhältniß der A gegen die B sey der Verhältniß der C gegen die D gleich oder ähnlich, oder jene Verhältniß sey mit dieser einerley. Alle diese Redensarten bedeuten eben das. Zum Exempel, wenn A der B gleich ist, und C der D; so wird die Verhältniß der A gegen die B eben dadurch angezeigt, wenn man sagt, die A sey der B gleich. Eben so aber und nicht anders wird auch die Verhältniß der C gegen die D bestimmt, und diese beyden Verhältnisse sind demnach einerley oder einander gleich, und ähnlich. Man muß sich in Acht nehmen, aus diesem Exempel zu schließen, daß bey allen gleichen Verhältnissen auch die Glieder derselben gleich seyn müssen, $A = B$, und $C = D$. Dieses ist nicht nothwendig. Die A kan in Ansehung der B eine jede andere Größe haben, und die Verhältniß der A gegen die B bleibt doch der Verhältniß der C gegen die D gleich, wenn nur die C in Ansehung der D eben die Größe hat.

§. 13. Wenn die Verhältnisse A zu B und C zu D einander gleich sind, und A ist größer oder kleiner als B, so muß auch C größer oder kleiner seyn, als D, und ist A der B gleich, so muß auch C der D gleich seyn.

seyn. Alles dieses fließet so gleich aus den Begriffen, welche wir gegeben haben, und wir haben uns dabey nicht aufzuhalten.

VI.
Abschnitt.

S. 14. Eine jede Grösse, welcher die A gleich ist, E zum Exempel, kan an die Stelle des Gliedes A in der Verhältniß A zu B, oder B zu A gesetzt werden, ohne die Verhältniß zu ändern, das ist: wenn $A = E$, so ist die Verhältniß der A zu B der Verhältniß der E zu B gleich, wie auch die Verhältniß der B zu A gleich der Verhältniß der B zu E. Auch dieses braucht keines Beweises. Weil in der Grösse des ersten Gliedes der Verhältniß der A zu B keine Veränderung vorgehet, wenn man an die Stelle der A die ihr gleiche E setzt, so kan auch die Grösse des ersten Gliedes in Ansehung des zweyten durch diese Verwechselung der E mit der A nicht verändert werden. Eben so ist es, wenn A die Stelle des zweyten Gliedes vertritt.

F. 159.

S. 15. Ob aber zwey Verhältnisse einander gleich sind, oder nicht, siehet man am allerleichtesten, wenn die zweyten oder nachfolgenden Glieder derselben einander gleich sind, wie bey den Verhältnissen der 160 Figur, da die Linie B der Linie D gleich genommen worden. Ist in diesem Falle auch das Glied A dem Gliede C gleich, so ist die Verhältniß der A zu der B, der Verhältniß der C zur D gewiß gleich. Wie kan in den Grössen A und C einige Verschiedenheit statt haben, wenn man sie auf die Grössen der B und D beziehet, da so wohl diese B und D, als auch jene A und C einander gleich sind?

F. 160.

S. 16. Sind aber bey der Gleichheit der Glieder B und D die Glieder A und C einander ungleich, so kan die Verhältniß der A zur B, der Verhältniß der C zur D, ohnmöglich gleich seyn. Wie ist es möglich, daß verschiedene Grössen A und C, wenn man sie auf einerley Grösse B oder D beziehet, einerley seyn solten? Gesezet, C ist der B oder D gleich, so kan A ohnmöglich eben der B oder D gleich seyn; da sie grösser ist als $C = B = D$. Dieses aber oder etwas dergleichen müste möglich seyn, wenn die A gegen die $B = D$, eben die Verhältniß haben könnte, welche die C gegen eben die $B = D$ hat, ob zwar A der C ungleich ist.

S. 17. In diesem Falle, wenn zwey Verhältnisse A zur B, und C zur D, deren zweyte Glieder B und D einerley Grösse haben, ungleich sind, nennet man diejenige Verhältniß die grössere, deren erstes Glied grösser ist, die andere wird die kleinere genennet. In unserer Figur ist A grösser als C, und demnach die Verhältniß der A zur B grösser als die Verhältniß der C zur D.

u u

B grösser

VI. Abschnitt. B grösser als die Verhältniß der C zur D. Eine jede andere Verhältniß, welche der Verhältniß A zur B gleich ist, ist auch grösser als die Verhältniß der C zur D. Wie könnte sie sonst der Verhältniß der A zur B gleich seyn? Gesezt die Verhältniß der E zur F sey der Verhältniß der A zur B gleich, so ist diese Verhältniß der E zur F grösser als die Verhältniß der C zur D.

S. 18. Hieraus siehet man, daß, wenn die zweyten Glieder zweyer gleichen Verhältnisse gleich sind, die ersten Glieder derselben ohnmöglich ungleich seyn können, denn wären sie ungleich, so wären auch die Verhältnisse ungleich. Wiederum wenn eine Verhältniß A zur B grösser ist als eine andere C zur D, und die zweyten Glieder dieser Verhältnisse sind einander gleich, $B=D$, so ist das erste Glied der grössern Verhältniß, A, grösser als das erste der zweyten, C. Denn wäre $A=C$, so wären auch die Verhältnisse A zur B, und C zur D einander gleich. VI, 15. Wäre aber A kleiner als C, so wäre auch die Verhältniß A zur B kleiner als die Verhältniß C zur D. VI, 17. Beides widerspricht demjenigen so gesezt worden, daß die Verhältniß der A zur B grösser sey als die Verhältniß der C zur D. Auf eben die Art siehet man ein, daß, wenn die Verhältniß der C zur D kleiner ist, als die Verhältniß der A zu B, und die zweyten Glieder derselben B und D sind einander gleich, auch das erste Glied der kleinern Verhältniß C kleiner seyn müsse als das erste Glied der grössern A. Dieses ist in der That von demjenigen, so eben gesagt worden, nicht verschieden, und kan gar leicht von vorne eingesehen werden, wenn man sich vorstelllet, daß wenn C der A gleich wäre, oder grösser als A, auch die Verhältniß der C zur B oder D; der Verhältniß der A zu der B oder D gleich seyn müsse, oder grösser als diese, welches demjenigen widerspricht, so gesezt worden.

F. 161. S. 19. Es ist aber auch in dem Fall nicht schwer zu sagen, welche Verhältnisse einander gleich, oder ungleich seyn, und welche die grössere oder kleinere sey, wenn die ersten Glieder derselben einerley Grösse haben. Wir haben dieses in der 161 Figur vorgestellet, da bey den Verhältnissen der A zur B, und der C zu D, die Glieder A und C einander gleich sind. Sind in diesem Fall auch die zweyten Glieder B und D einander gleich, so sind auch die Verhältnisse gleich: denn worinne sollten sie verschieden seyn? Sind aber die Glieder B und D ungleich, so sind auch die Verhältnisse ungleich. Denn es ist ohnmöglich, daß die gleichen Grössen A und C aus den ungleichen B und

und D auf einerley Art sollen können bestimmt werden. Es kan B grösser seyn als $A = C$, und D kleiner als $A = C$. Ist es bey diesem Umstand möglich, daß die kleinere A auf die grössere B sich eben so beziehe, wie sich die grössere $C = A$ auf die kleinere D beziehet? Dieses aber oder etwas dergleichen müste man zugeben, wenn man setzen wolte, A und C könnten einander gleich seyn, und doch gegen die verschiedene Grössen B und D einerley Verhältnisse haben.

VI.

Abg. 111.

§. 20. Sind aber bey den ungleichen Verhältnissen A zur B, und C zur D, die ersteren Glieder A, C gleich, und die zweyten B, D ungleich, so ist diejenige Verhältniß die grössere, in welcher das zweyte Glied kleiner ist, und wenn die B kleiner ist als die D, so ist die Verhältniß der A zur B grösser, als die Verhältniß der C zur D, und diese im Gegentheil ist kleiner als jene. Man kan dieses, daß man eine Verhältniß unter den bemerkten Umständen grösser oder kleiner nehmet, als eine andere, als eine beliebige Redensart ansehen.

§. 21. Daß aber diese Redensart mit derjenigen Benennung nicht streite, der wir zuerst VI, 17. erwehnet, und daß bey beyderley Umständen einerley Verhältnisse grösser oder kleiner genennet werden, siehet man ein, wenn man überhaupt bemerket, daß eine Verhältniß A zur B grösser genennet werde, als eine andere C zur D, wenn das erste Glied der erstern Verhältniß A in Ansehung des zweyten Gliedes B derselben Verhältniß grösser ist, als das erste Glied C der zweyten Verhältniß in Ansehung des zweyten Gliedes D eben der Verhältniß. Nun kan man nicht nur wenn B so groß ist als D, und A grösser als C, schliessen, es sey A in Ansehung der B oder D grösser, als C in Ansehung eben der B oder D: sondern man kan auch eben das folgern, wenn A und C gleich sind, B aber ist kleiner als D. Denn es ist klar, daß einerley Grösse A in Ansehung der kleinern B grösser seyn müsse, als eben diese A oder C in Ansehung der grössern D ist. Ein Pferd ist in Ansehung einer Maus viel grösser als in Ansehung einer Ziege.

F. 160.

F. 161.

§. 22. Hieraus schliessen wir wiederum, daß wenn in zwey gleichen Verhältnissen, A zu B, und C zu D, die ersteren Glieder A und C gleich sind; die zwey letzteren B und D ohnmöglich ungleich seyn können. Denn wäre dieses, so wären auch die Verhältnisse ungleich. Und, daß wenn die Verhältniß A zu B grösser ist als die Verhältniß C zu D, die ersten Glieder aber derselben A und C einander gleich

VI. **Abchnitt.** sind, auch B kleiner seyn müsse als D. Denn wenn dieses nicht wäre, sondern B wäre so groß als D, so wären die Verhältnisse A zu B und C zu D einander gleich, oder wenn B größer wäre als D, so wäre die Verhältniß der A zu B kleiner als die Verhältniß der C zu D. VI, 20. Beides streitet mit demjenigen so angenommen worden.

§. 23. Es können aber Größen von verschiedener Art gleiche Verhältnisse gegen einander haben. Es hindert nichts, daß ein Gewicht dem andern gleich sey, eben wie eine Länge einer andern gleich ist. Und in diesem Fall verhält sich das erste Gewicht zu dem zweyten, wie die erste Länge zu der zweyten. Es hindert nichts, daß das erste Gewicht in Ansehung des zweyten eben so groß sey, als eine Länge in Ansehung einer andern, in welchem Fall die Verhältniß der Gewichte wiederum der Verhältniß der Längen gleich ist. Aber man kan nicht sagen, daß ein Gewicht, ein Centner zum Exempel, gegen eine Länge, wenn man will, von einer Meile, sich so verhalte, wie ein anderes Gewicht gegen eine andere Länge. Denn das Gewicht hat gegen die Länge gar keine Verhältniß. VI, 11. Wie groß ist ein Centner in Ansehung einer Meile Weges? Ist der Centner größer oder kleiner als die Meile, oder ist der Centner der Meile gleich? Welche ungereimte Frage! Dennoch findet man die Beantwortung derselben in Büchern.

F. 157.
158.

§. 24. Es können aber auch die vier Größen A, B, C, D, deren erste zu der zweyten sich verhält, wie die dritte zu der vierten, alle von einerley Art seyn. Ist dieses, so siehet man bloß aus dem gezeigten, daß wenn die erste A größer ist als die dritte C, auch die zwote B größer seyn müsse als die vierte D, und daß, wenn A kleiner ist als C, auch B kleiner seyn müsse als D, woraus man leicht folgern könnte, daß wenn A der C gleich ist, auch B der D gleich seyn müsse, wenn dieses nicht bereits da gewesen wäre, und wir nicht VI, 22. gezeigt hätten, daß bey gleichen Verhältnissen, deren erstere Glieder A, C von einerley Größe sind, auch die zweyten B und D von einerley Größe seyn müssen.

§. 25. Ist aber A größer als C, so ist nothwendig die Verhältniß der A zur B größer als die Verhältniß der C zur B; denn die größere A hat allezeit, wie wir VI, 17. gezeigt haben, zu einer jeden Größe, und folgendes auch zur B, eine größere Verhältniß, als die kleinere C. Nun wird gesetzt, daß die Verhältniß der C zur D der Verhältniß der A zur B gleich sey: demnach ist auch die Verhältniß
der

der C zur D grösser als die Verhältniß der C zur B. Das ist, man VI.
hat zwei Verhältnisse der C zur D, und der C zur B, deren erstere grösser ist als die zweite, und deren erstere Glieder C von einerley Grösse
sind. Wir haben gesehen daß in solchen Fällen allezeit das zweite
Glieder der grössern Verhältniß, kleiner sey, als das zweite Glied der
kleinern. VI, 22. Demnach ist D kleiner als B, und folgendes B grösser
als D, welches zu erweisen war.

§. 26. Eben so siehet man, daß, wenn A kleiner ist als C, auch
nothwendig B kleiner seyn müsse als D, wenn man nemlich wiederum,
wie vorher sehet, daß die Verhältniß der A zur B, und der C zur D
einander gleich seyn. Denn wenn A kleiner ist als C, so ist die Ver-
hältniß der A zur B kleiner als die Verhältniß der C zu eben der B,
aus der Ursache, die wir eben angezogen haben; weil nemlich eine
kleinere A gegen eben die B eine kleinere Verhältniß hat, als eine grössere
C. VI, 17. Da nun wieder die Verhältniß der A zur B der Ver-
hältniß der C zur D gleich gesetzt wird, so ist auch diese Verhältniß
der C zu D kleiner als die Verhältniß der C zu B. Und demnach, da
die ersten Glieder dieser Verhältnisse C einerley sind, so ist auch das
zweite Glied D der kleinern Verhältniß grösser als das zweite Glied
der grössern Verhältniß B. VI, 20.

§. 27. Wir können aber diesen Beweis auch etwas natürlicher
fassen. Wir setzen noch daß die Verhältniß der A zur B
der Verhältniß der C zur D gleich sey, und daß die
A grösser sey als C. Will man nun setzen daß bey die-
sen Bedingungen die zweiten Grössen B und D einander gleich seyn,
so siehet man leicht, daß daraus folgen würde, es sey die erste Ver-
hältniß der A zur B grösser als die zweite, VI, 17. welches dem gesetz-
ten widerspricht, und also nicht statt haben kan. Wolte man aber
annehmen, daß die B kleiner wäre als die D, so wird dadurch die erste
Verhältniß der A zur B noch grösser, als die andere C zur D. Denn
je kleiner das zweite Glied einer Verhältniß wird, je grösser wird das
erste in Ansehung desselben, und je grösser wird auch die Verhältniß,
und umgekehret, je grösser das zweite Glied wird, je kleiner wird die
Verhältniß. VI, 20. Also kan in diesem Falle, wenn A grösser ist als
C, und B kleiner als D, die Gleichheit der Verhältnisse der A zur B,
und der C zur D noch vielweniger statt haben, und bleibt also nichts
anderes übrig so man sagen könnte, als daß auch B grösser sey als D.

§. 28. Nimmet man an, es sey A kleiner als C, so kan man auf

VL. Abschnitt. eben die Art schliessen, daß auch B kleiner seyn müsse als D. Oder es sieget dieses vielmehr schon in dem vorigen. Denn wenn man annimmt es sey A grösser als C, so saget man zugleich es sey C kleiner als A, und wenn die Verhältniß der A zur B der Verhältniß der C zur D gleich ist, so ist auch die letztere dieser Verhältnisse, der C nemlich zur D der erstern A zur B gleich. Da nun erwiesen worden, daß unter den erwähnten Bedingungen B grösser seyn müsse als D, das ist, D kleiner als B, so stehet man auch, daß sich eben dasjenige, so gesetzt und erwiesen worden, auch so ausdrücken lasse: Wenn zwei Verhältnisse C zur D, und A zur B einander gleich sind, und das erste Glied der erstern C ist kleiner, als das erste Glied der zwoten A, so ist auch das zweyte Glied der erstern D kleiner als das zweyte Glied der zwoten B. Man darf nur die Ordnung der Verhältnisse ändern, die Verhältniß C zur D vor die erste, und die Verhältniß A zur B vor die zwote annehmen, so wird dieser Satz mit dem vorigen VI, 25. einerley.

Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse bey Zahlen und getheilten Grössen.

§. 29. Dieses alles konten wir so gleich aus dem Begriffe der Verhältniß, welchen wir gegeben, herleiten. Das Uebrige wird ungemein deutlicher, wenn wir die Merkmale der Gleichheit der Verhältnisse, so wohl bey solchen Grössen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, als auch bey solchen, welche man sich nicht dergestalt zusammen gesetzt vorstellt, genauer angeben, zu welcher Betrachtung wir uns also nunmehr wenden.

F. 162. §. 30. Wenn zwei Grössen aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, wie die zwei Linien A und B, deren erstere A aus so grossen Theilen zusammen gesetzt ist als die zwote B, so beurtheilet man die Grösse der ersten A genau aus der Zahl der Theile, welche in der zwoten dieser Grössen, B, enthalten sind, und aus der Zahl der gleichen Theile, welche die erstere A ausmachen. Es bleibt nichts zu fragen übrig, wenn man mir saget, B sey in drey gleiche Theile getheilet, und A enthalte fünf dergleichen Theile. So bald ich dieses weiß, so weiß ich die Grösse der A in Ansehung der B, und es wird mir die Grösse der A auch an sich bekant, so bald man mir die eigentliche Grösse der B bekant machet, indem man sie mir nemlich vorleget, oder sonst, wie man kan, anzeiget.

§. 31. Und

S. 31. Und man stellet sich demnach die Verhältniß der A zur B VI. in diesem Falle, wenn diese Linien beyde in gleiche Theile getheilet sind, Abschnitt. vor, wenn man die Zahl der gleichen Theile in B anmerket, und wie viele derselben die Linie A ausmachen. Derowegen kan man sagen, die Verhältniß der A zur B sey nichts anders, als die Art und Weise wie A aus der B entsteht, wenn man diese vor eine Einheit annimmt. Denn hält man B vor Eins, und wil aus derselben die A machen, so muß man B in gleiche Theile theilen, aber in solche, aus welchen sich auch A zusammen setzen läßt, und so dann die A aus dergleichen Theilen der B wirklich zusammen setzen.

S. 32. Alle Zahlen lassen sich auf diese Art aus andern machen, wenn sie aus einerley Einheiten bestehen. Ja da man, wie gleich Anfangs erinnert worden, bey den Zahlen auf die Größe ihrer Einheiten selten Acht zu haben pfleget, sondern bloß die Vielheit derselben in den Zahlen betrachtet: so kan man sagen, daß überhaupt eine jede Zahl aus einer jeden andern entstehen könne, indem man jene in gleiche Theile theilet, und aus solchen Theilen die erste Zahl zusammen setzt. Nämlich man darf nur die zwote Zahl in ihre Einheiten theilen, und aus diesen Einheiten die erste Zahl zusammen setzen, so hat man erhalten, was hier verlangt wird. Doch darf man eben nicht allezeit die Zahlen wirklich in ihre Einheiten theilen. Man kan zuweilen bey größern Theilen stehen bleiben, zuweilen aber muß man auch gar auf Theile der Einheit gehen. So wird die Zahl 5 aus der Zahl 3, wenn man die letztern 3 in drey gleiche Theile theilet, und fünfe dieser Theile zusammen setzt. Wil man aber sechse aus drey machen, so hat man nicht nöthig die drey zu theilen, sondern man kan nur dieselbe zwey mal nehmen, so ist die 6 da. Zwölfe wird aus 8, wenn man achte in zwey gleiche Theile theilet, deren jedes 4 ist, und dieser Theile dreye zusammen nimmet. Um aber endlich die Zahl 2 aus $\frac{7}{4}$ zu machen, muß man $\frac{7}{4}$ in drey gleiche Theile theilen, deren jedes $\frac{7}{12}$ betragen wird, und dieser Theile achte zusammen setzen, so kommen $\frac{7}{3}$, welches eben so viel ist als die erste Zahl 2.

S. 33. Man siehet hieraus, daß in dem Falle, welchen wir hier betrachten, wenn nemlich die Größen A und B aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, man die Größe der A in Ansehung der B durch einen Bruch ausdrücke, welcher sich auf die zwote dieser Größen B, als auf seine Einheit beziehet, und dessen Nenner die Zahl der Theile in B ausdrucket, der Zehler aber anzeigt, wie viele solcher Theile in A
ent-

VI. enthalten sind. Der Bruch $\frac{7}{5}$ drückt die A, aus der B, dergestalt aus:
 Abschnit. Er zeigt daß die B, auf welche man ihn beziehet, und welche als die Einheit angenommen wird, in drey gleiche Theile zu theilen sey, und daß man fünf dieser Theile nehmen müsse, die Linie A zusammen zu setzen. Eben so drückt der Bruch $\frac{7}{5}$ die Größe der Zahl 7 in Ansehung der Zahl 5 aus, weil man wirklich die letztere Zahl 5 in fünf gleiche Theile theilen, und dieser Theile sieben zusammen setzen muß, wenn man aus der Zahl 5 die Zahl 7 heraus bringen will.

§. 34. Dieser Bruch, welcher die Verhältniß einer getheilten Größe gegen eine andere, die aus eben so grossen Theilen besteht, so nett ausdrückt, und welcher allzeit zu seinem Nenner die Zahl der Theile der zweiten Größe, auf welche man die erste beziehet, und zu seinem Zähler die Zahl der Theile der ersten Größe hat, die man auf die zweite beziehet und aus derselben ausdrückt: Dieser Bruch, sage ich, heisset deswegen der Name der Verhältniß.

§. 35. Zwei Verhältnisse, bey dergestalt getheilten oder theilbaren Größen, sind einander gleich, wenn die ersten Glieder derselben aus den letzteren, als aus ihren Einheiten auf einerley Art entstehen: Oder wenn man die letzteren Glieder beyderseits in gleich viele Theile theilen, und aus einerley Zahl dieser Theile die ersten Glieder zusammen setzen kan: das ist, wenn sie gleiche Namen haben. So ist es mit den Linien der 163 Figur beschaffen, deren erstere A wir auf die zweite B beziehen: und die dritte C auf die vierte D, und uns die Verhältniß der A zur B, wie auch die Verhältniß der C zu der D vorstellen. Will man die A aus der B machen, so theile man die B in drey gleiche Theile, und setze fünf dieser Theile zusammen, so hat man die A. Auf eben die Art aber entstehet auch die C aus der D. Die D muß ebenfalls in drey gleiche Theile getheilet werden, und man muß dieser Theile 5 zusammen setzen, wenn man C aus D machen wil. In B und D sind gleich viele Theile, wie auch in A und C. Die A wird aus der B durch den Bruch $\frac{5}{3}$ ausgedrückt, welcher sich auf B als die Einheit beziehet, und A enthält $\frac{5}{3}$ dieser Einheit B. Eben so wird auch C durch den Bruch $\frac{5}{3}$ angezeigt, welchen man auf die Einheit D beziehen muß, von welcher C $\frac{5}{3}$ enthält. Die Namen dieser beyden Verhältnisse A zur B, und C zur D sind einerley, weil sie beyde $\frac{5}{3}$ sind.

§. 36. Im Gegentheil wären die Verhältnisse A zur B, und C zur D ungleich, wenn man A nicht dergestalt aus B machen könnte, wie C aus

C aus D entsteht. Nämlich, wenn auf C, wie in der Figur, fünf solche Theile gehen, deren drey die D ausmachen, und es gingen auf A nicht fünf, sondern vier oder sechs Drittel der B, oder A bestünde aus etwas mehr oder weniger als $\frac{2}{3}$ der B, so könnte die Verhältniß der A zur B, der Verhältniß der C zur D ohnmöglich gleich seyn. In diesem Falle sind auch die Namen der Verhältnisse ungleich. Denn wenn A nicht dergestalt aus der B entstehen kan, wie die C aus der D entsteht, so ist es nicht möglich, daß die beyden A und C durch einerley Brüche solten ausgedrucket werden, welche sich auf die Einheiten B und D beziehen. Brüche von gleichem Werthe können allezeit, wie alle andere, zu gleichen Benennungen gebracht werden, in welchem Falle auch ihre Zehler gleich seyn müssen, sonst könnten die Brüche ohnmöglich gleichen Werth haben. II, 18. Wie kan aber dieses seyn, wenn die Einheiten B und D nicht können in eine gleiche Zahl solcher Theile getheilet werden, welche, wenn man sie in gleicher Zahl zusammen setzet, die grösseren A und C bringen? Ist in diesem Falle ein Bruch möglich, welcher so wohl die Grösse A aus der B, als auch die C aus der D ausdrücke? Kan ich sagen daß so wohl A fünf Drittel der B betrage, als auch C durch diesen Bruch $\frac{2}{3}$ ausgedrucket werde, wenn ich sie auf D beziehe, und aus dieser Linie messe, wenn zwar C aus fünf Dritteln der D wirklich bestehet, die A hingegen nicht aus fünf Dritteln der B zusammen gesetzt werden kan?

S. 37. Und man kan also aus der Ungleichheit der Namen zweier Verhältnisse allezeit auf die Ungleichheit der Verhältnisse selbst schließen. Denn weil, wenn die Verhältnisse gleich sind, auch ihre Namen gleich sind, und im Gegentheil ungleiche Verhältnisse auch ungleiche Namen haben, so folget, daß wenn die Namen zweier Verhältnisse ungleich sind, auch die Verhältnisse ungleich seyn müssen: denn wären die Verhältnisse nicht ungleich, sondern gleich, so wären auch ihre Namen gleich.

S. 38. Und zwar ist diejenige Verhältniß (wir reden noch immer von der Verhältniß solcher Grössen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind), grösser als die andere, welche einen grösseren Namen hat. Denn wenn die zweyten Glieder der Verhältnisse B und D einander nicht allein an der Zahl ihrer Theile, sondern auch wirklich gleich sind, welches erfordert, daß auch die Theile in B den Theilen in D gleich seyen; so ist klar, daß wenn A $\frac{2}{3}$ der B beträgt, und C hingegen beträgt weniger, zum Exempel $\frac{1}{3}$ der D, so ist, sage ich,

Es

klar,

F. 164.

VI. Klar, daß auch A grösser seyn werde als C. Denn $\frac{1}{2}$ der $B=D$, ist
 Abschnitt. mehr als $\frac{1}{2}$ eben der B oder D. Nun aber hat die grössere A gegen
 eben die B allezeit eine grössere Verhältniß als die kleinere C gegen B
 oder D hat: VI, 17. also ist leicht einzusehen, daß die Verhältniß der
 A zur B grösser seyn werde, als die Verhältniß der C zur D. Hier-
 aus aber fließet, daß wenn man an die Stelle der vorigen Verhältniß
 A zur B eine andere setzt, welche ihr gleich ist, nemlich E zur F, auch
 diese Verhältniß grösser seyn werde, als die Verhältniß C zur D
 VI, 17. Nun ist der Name der Verhältniß A zur B, dem Namen
 der Verhältniß E zur F gleich, weil wir sehen, daß diese Verhältnisse
 gleich seyn VI, 35. und demnach der Name der Verhältniß E zur F
 grösser als der Name der Verhältniß C zur D. Die Verhältniß also,
 welche einen grössern Namen hat, E zur F, ist auch selbst grösser als
 die Verhältniß C zur D mit dem kleineren Namen. Und umgekehret
 ist die Verhältniß mit dem kleineren Namen C zur D kleiner, als die
 Verhältniß E zur F, deren Name grösser ist.

S. 39. Danun also die Gleichheit zweier Verhältnisse zwischen Grös-
 sen von dieser Art aus dem Namen derselben jederzeit geschlossen werden,
 und wenn der Name einer Verhältnisse grösser ist als der Name der an-
 dern, die Verhältniß selbst grösser ist: So hat man eine Verhältniß kurz zu
 bezeichnen, nur diese Gleichheit der Namen anzuzeigen. Nun kommt der
 Name der Verhältniß A zur B allezeit, wenn man die Zahl der gleichen
 Theile in A durch die Zahl der gleichen Theile in B dividiret, oder welches
 auf eben das hinaus kommt, wenn man die Zahl der gleichen Theile in A
 vor den Zähler eines Bruches annimmt, dessen Nenner die Zahl
 der gleichen Theile in B ist. Und eben so kommt der Name der
 Verhältniß der C zur D, wenn man die Zahl der gleichen Theile in
 C, durch die Zahl der gleichen Theile in D theilet, oder aus diesen
 Zahlen wieder einen Bruch machet, wie man den vorigen gemacht I, 136.
 Demnach kan $\frac{A}{B}$ nichts anders als den Namen der Verhältniß der A
 zur B bedeuten, wenn man sich unter A die Zahl der gleichen Theile in
 A vorstellt, und unter B die Zahl der gleichen Theile in B, und eben so
 bedeutet $\frac{C}{D}$ den Namen der Verhältniß der C zur D. Folgendes be-
 deutet $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ nichts anders, als daß die Namen der beiden Verhält-
 nisse A zur B und C zur D, gleich seyn, und daß folgendes diese Ver-
 hältnisse selbst einerley seyn.

§. 40. Und wenn zweien Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{6}$ einander gleich sind, VI. so sind die Namen der Verhältnisse der Zähler zu den Nennern gleich, folgendes ist, die Verhältniß der Zahl 2 zu der Zahl 3 gleich der Verhältniß der Zahl 4 zu der Zahl 6. Und umgekehret, wenn die Verhältniß zweier Zahlen, 2 zur 3 der Verhältniß zweier andern Zahlen 4 zu 6 gleich ist, so ist auch der Name der ersten Verhältniß $\frac{2}{3}$, dem Namen der zweiten Verhältniß $\frac{4}{6}$ gleich, das ist, die Brüche sind gleich, welche man macht, indem man die ersten Glieder dieser Verhältniß vor die Zehler und die zweiten vor die Nenner annimmt.

§. 41. Es verändert in diesem nichts, wenn man die Einheiten der Zahlen A und B von der Größe annimmt, welche die Theile der Linie A und B wirklich haben, und hinwiederum die Einheiten in den Zahlen C und D so groß zu seyn setzt als die Theile in der C und D sind, welche von den vorigen verschieden seyn können. Denn wenn man die Zahl der Theile in A durch die Zahl der Theile in B dividirt, oder diese Zahlen in Form eines Bruchs schreibt $\frac{A}{B}$, so wird der Quotient einerley, von was Größe man auch die Einheiten in B und A annimmt; wenn sie nur in der Zahl A nicht anders genommen werden, als in der Zahl B, weil nemlich wenn A fünf und B drey bedeutet, drey Ellen in 5 Ellen nicht öfter enthalten sind, als drey Centner in fünf Centnern. Der Quotiente aber, der durch die Division der A durch B kommt, ist der Bruch $\frac{A}{B}$ I, 136. welcher demnach einerley Werth behalten muß, man mag die Einheiten der Zahlen A und B annehmen wie man wil. Demnach kan man auch die Einheit der Zahlen A und B so groß annehmen, als die Theile in A und B sind; und so überall.

§. 42. Und demnach könnte man allezeit dergleichen Verhältnisse in allen Stücken eben so bezeichnen, wie die Brüche gezeichnet werden. Es wäre aber dieses im Druck etwas unbequem, weil die Zeilen öfters gebrochen werden müßten. Derowegen hat man noch ein anderes Zeichen der Division angenommen, welches dieses ist (:) und man schreibt vermittelst desselben $\frac{A}{B}$ auch also A : B, daß demnach auch A : B den Namen der Verhältniß A zur B ausdrückt, und A : B = C : D nichts anders bedeuten kan, als daß die Namen der Verhältnisse, der A zur B, und der C zur D, und folgendes die Verhältnisse der A zur B, und der C zur

VI. zur D selbst einander gleich seyn. Wir werden uns künftig überall
Wissmatt. dieser Art zu zeichnen bedienen.

F. 162. §. 43. Alle Verhältnisse gleich getheilter Größen lassen sich durch ganze Zahlen ausdrücken, oder: man kan zwei ganze Zahlen schaffen, welche sich gegen einander verhalten wie A zur B, wenn diese Größen A, B in Theile zertheilet werden können, die einander gleich sind. Diese Zahlen sind allezeit selbst die Zahlen der Theile in A, B, oder andere, welche eben diese Verhältniß gegen einander haben. Die Verhältniß der Größe A zu der Größe B ist der Verhältniß der Zahl 5 zu der Zahl 3 gleich, weil A in in fünf und B in 3 gleiche Theile zertheilet ist, und über dieses die Theile in A den Theilen der B gleich sind. Es entstehet A aus der B, wie die Zahl 5 aus der Zahl 3 entstehet. Aber man kan auch andere Zahlen schaffen, deren erstere aus der zweiten, wie 5 aus 3 entstehen kan, und wir haben oben I. 101. gewiesen, daß alle Zahlen, welche kommen, wenn man 5 und 3 durch eine beliebig angenommene Zahl multipliciret, diese Eigenschaft haben. Es verhält sich also 5 zu 3, wie 2 + 5 zu 2 + 3, das ist, wie 10 zu 6, und eben diese Verhältniß 10 : 6 drücket auch die Verhältniß A : B aus; wenn man unter A und B die Linien der 162. Figur. versteht, welchen diese Buchstaben begeschrieben sind.

§. 44. Oder man stelle sich vor, daß man ein jedes Theilchen der A wieder in eine Zahl anderer gleicher Theile theile, und ein jedes Theilchen der B in eben so viele. Man theile zum Exempel ein jedes Theilchen in den beiden Linien A, B wieder in drey gleiche Theile, so ist klar, daß dieselben Theile ebenfalls alle gleich seyn werden. Es sind aber nunmehr der Theile in A, 15, und der Theile in B, 9, und es verhält sich demnach A zur B nicht nur wie 5 zu 3, sondern auch wie 15 zu 9. Und man siehet, daß man noch ohne Ende andere Zahlen finden könnte, welche eben diese Verhältniß A : B ausdrücken.

§. 45. Vergleichen ganze Zahlen, welche einetley Verhältniß A : B ausdrücken, haben alle einerley Verhältniß gegen einander, es sind aber immer einige derselben grösser als andere. Die Verhältniß 5 : 3 ist der Verhältniß 15 : 9 gleich. Die Zahl 5 entstehet aus 3 eben so wie 15 aus der 9 entstehet. Und die Namen dieser Verhältnisse $\frac{5}{3}$ und $\frac{15}{9}$ sind einerley, weil der letzte Bruch keinen andern Werth hat, als der erste, wie man findet, wenn man die Glieder desselben durch

durch 3 theilet. Es entsteht demnach hierbey die Frage, in welchem Falle die Zahlen, welche einerley Verhältniß ausdrücken, die kleinste unter allen sind, die eben diese Verhältniß haben, und wie die größten Zahlen von eben dieser Verhältniß aus der kleinsten entstehen? VI. Abschn.

§. 46. Wir können dieses aus demjenigen herleiten, so von den Brüchen bereits gewiesen worden. Wenn die Verhältnisse $5:3$ und $20:12$ gleich sind, so sind auch die Brüche $\frac{5}{3}$ und $\frac{20}{12}$ gleich, und sind die Brüche gleich, so sind auch die Verhältnisse gleich VI, 40. Eines folget aus dem andern, oder man saget vielmehr in diesen Redens-Arten einerley mit verschiedenen Worten. Ist nun der Bruch durch die kleinsten der Zahlen ausgedrückt, durch welche er sich ausdrücken läßt, so ist auch die Verhältniß des Zehlers zu dem Nenner in den kleinsten Zahlen dargestellt. Es läßt sich aber ein Bruch nicht durch noch kleinere Zahlen ausdrücken, wenn die Glieder desselben sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen II, 97. Es sind demnach auch solche Zahlen, die sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen, die kleinsten unter allen, die eben die Verhältniß haben. Aus der Ursache kan die Verhältniß $5:3$ nicht durch noch kleinere ganze Zahlen ausgedrückt werden.

§. 47. Doch es wird dieses und was noch hievon zu zeigen ohnfehlbar deutlicher, wenn wir uns an die gegebene Begriffe unmittelbar halten, ohne auf die Bruch-Rechnung zurück zu gehen. Wir wollen demnach setzen, daß die Verhältniß der Zahl A zu der Zahl B durch andere Zahlen C, D auszudrücken sey, dergestalt, daß die Verhältniß A:B der Verhältniß C:D gleich sey: so muß man A und B in gleiche Theile theilen, wie in der 165 Figur geschehen, da ein jedes Theil dieser Zahlen A und B zwey ist, und so dann der C so viele Theile geben, als die A hat, und der D so viele, als deren in B enthalten sind: so verhält sich ohnstreitig A zur B, wie sich C zur D verhält. Denn es entstehet A aus der B, wie die C aus der D entstehet VI, 35. Sind nun die Theile der Zahlen C und D von den Theilen der Zahlen A und B nicht verschieden, so sind diese letztern Zahlen C und D mit den erstern vollkommen einerley, und es ist $A = C$, und $B = D$. Und wenn man demnach andere Zahlen haben wil, deren erstere sich gegen die andere wie A zur B verhält, so muß man die Theile dieser Zahlen C und D kleiner oder größer annehmen als die Theile sind, in welche die Zahlen A und B zertheilet worden ist, F. 165.

VI. wie wir gethan, indem wir vor die Theile der Zahlen C und D die
Abchnitt. Einheit genommen.

S. 48. Ist dieses letztere geschehen, und hat man die Einheit vor den Theil der C und D angenommen, so entstehen die Zahlen A und B aus den Zahlen C und D, wenn man diese letztere Zahlen C und D durch einen der Theile, in welche man A und B zerfällt hat, multipliciret; Als in unserer Figur wird A aus C und B aus D, wenn man diese letztere Zahlen durch 2 multipliciret, und im Gegentheil kommen die Zahlen C und D, wenn man die erstere A und B durch eben die Zahl 2 dividiret. Je grösser man die Theile der Zahlen A und B annimmt, und je kleiner die Theile sind, aus welchen man die Zahlen C und D zusammen setzet, je kleiner werden auch diese letztere Zahlen C und D. Man kan aber die Theile in C und D nicht kleiner machen als die Einheit, weil C und D ganze Zahlen seyn sollen. Denn wenn man vor einen jeden Theil in A und B einen Bruch in die Zahlen C und D setzen wolte, zum Exempel $\frac{1}{2}$, so würde $C = \frac{1}{2}$ und $D = \frac{1}{2}$, dieses aber wolten wir nicht haben. Und wenn man demnach die Zahlen A und B in so grosse Theile theilet, als nur möglich ist, und setzet vor einen jeden solchen Theil in A die Einheit in C, und vor einen jeden solchen Theil in B die Einheit in D, das ist, II, 65. wenn man die Zahlen A und B durch den grösssten gemeinschaftlichen Theiler dividiret, welchen sie haben können, und bemerket die Quotienten bey C und D, so sind C und D die kleinsten Zahlen, welche eben die Verhältniß ausdrucken die A zur B hat.

S. 49. Ist nun aber dieses alles dergestalt geschehen, hat man die Zahlen A und B in so grosse Theile getheilet, als sie nur haben können, und vor einen jeden dieser Theile die Einheit in C und D gesetzt, und folgendes die Verhältniß A : B durch die kleinsten Zahlen C und D ausgedrucket, so beziehen sich die Zahlen C und D nothwendig als einfache Zahlen auf einander, und sie haben keinen andern gemeinschaftlichen Theiler als die Einheit. Denn wenn die Zahlen C und D einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, welcher grösser wäre
F. 166. als die Einheit, zum Exempel 2, wie die Zahlen C und D, der 166 Figur, da wir diese Theilung durch die gedoppelten Striche bemerket, so müßten auch die Zahlen A und B sich durch einen gemeinschaftlichen Theiler theilen lassen, welcher gedoppelt so groß ist, als der vorige, weil vor eine jede Einheit der Zahlen C und D ein solcher gedoppelter Theil in A und B stehet. Dieses aber widerspricht demjenigen, so wir
An-

Anfangs-gesetzt, daß man die Zahlen A und B mit dem größten Theilern getheilet, welche sie gemeinschaftlich haben können. Es ist demnach nicht anders möglich, C und D müssen sich als einfache Zahlen auf einander beziehen.

VI.
Abschnitt.

F. 165.

§. 50. Und ist eine Verhältniß C : D durch zwei Zahlen ausgedrucket, die sich auf einander wie einfache Zahlen beziehen, so kann sie nicht durch andere, und von den vorigen verschiedene Zahlen ausgedrucket werden, die sich ebenfalls auf einander wie einfache Zahlen beziehen. Denn will man zwei Zahlen A und B machen, deren erste A sich zu der zweiten B verhält wie C zur D; so muß VI, 35. man C und D in gleiche Theile theilen. Diese Theile aber sind hier keine andere als die Einheit, weil C und D sich als einfache Zahlen auf einander beziehen. Vor einer jeden Theil in D, das ist, vor eine jede Einheit dieser Zahl, muß man nachhero einen nach Belieben angenommenen Theil zum Exempel 2 in B setzen, und vor eine jede Einheit, die in C angetroffen wird, eben den Theil 2 in A bringen: so verhält sich A zur B, wie C zur D, und man kann auf keine andere Art ganze Zahlen heraus bringen, welche von den Zahlen C und D verschieden sind, und deren Verhältniß doch der Verhältniß C zur D gleich ist, als auf diese, wie aus dem Begriffe der Verhältniß überflüssig klar ist. Und hieraus folget, daß alle Zahlen welche sich gegen einander verhalten wie C zur D, aus der Multiplication dieser zwei Zahlen durch einerley dritte Zahl entstanden sind, wenn gesetzt wird, daß C und D sich auf einander als einfache Zahlen beziehen.

§. 51. Demnach sind die Zahlen A und B keine einfache Zahlen, sie beziehen sich auch nicht auf einander als einfache Zahlen, weil sie durch die Multiplication der Zahlen C und D, die sich als einfache Zahlen auf einander beziehen, entstanden sind. Ist es aber nicht möglich, daß einerley Verhältniß durch verschiedene Zahlen ausgedrucket werden sollte, die sich auf einander als einfache Zahlen beziehen, so ist noch vielweniger möglich, daß einerley Verhältniß durch verschiedene wirklich einfache Zahlen sollte können ausgedrucket werden. Denn alle einfache Zahlen beziehen sich auf einander als einfache Zahlen.

§. 52. Man pfleget die Verhältniß solcher Größen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, durch die Verhältniß der kleinsten Zahlen auszudrucken, durch die sie ausgedrucket werden können. Man saget eine Linie, die wir A nennen wollen, verhalte sich zu einer Linie

VI. Einie B, wie 2 zu 1, wenn A doppelt so groß ist als B, oder A verhalte sich zu B, wie 3 zu 2, wenn A drey Theile enthält, deren zwey die B ausmachen: oder wenn A sechs Theile hat, deren viere in B enthalten sind. Dasjenige so wir gezeigt, giebt uns an die Hand, was dieses vor Zahlen sind, durch welche eine dergleichen Verhältniß ausgedrucket wird. Sie sind entweder einfache Zahlen, oder beziehen sich auf einander als einfache Zahlen, und werden gefunden, wenn man die Verhältniß A zur B durch beliebige Zahlen ausdrucket; zum Exempel, wenn A aus 18 Theilchen bestünde, deren 12 die B ausmachen, durch die Verhältniß 18 : 12, und die Glieder dieser Verhältniß so dann durch den größten gemeinschaftlichen Theiler theilet, welchen sie haben können. Dieser ist im gegenwärtigen Fall 6, und die Verhältniß 18 : 12 wird, wenn man beyde Glieder durch 6 dividiret, durch die Verhältniß 3 : 2 ausgedrucket, welche also auch die Verhältniß A : B darstellt.

S. 53. Die Gleichheit zweier Verhältnisse wird mit einem Wort die Proportion genennet, welche also allezeit aus vier Gliedern besteht, deren erstes sich zu dem zweyten verhält, wie das dritte zu dem vierten. Doch kan auch ein Glied die Stelle von zweyen vertreten, oder es können zwey Glieder einer Proportion einander gleich seyn. Man siehet hieraus leicht, daß $A : B = C : D$ nichts anders bedeuten könne, als daß die vier Gröffen die durch die Buchstaben A, B, C, D, bedeutet werden, sie mögen nun Zahlen oder Einien, oder was anders bedeuten, eine Proportion haben, oder, wie man auch anders zu reden pfleget, daß diese Gröffen A, B, C, D in der Ordnung, in welcher sie stehen, proportional sind. VI, 42.

F. 167. S. 54. Das erste Glied einer Proportion A muß nothwendig mit dem zweyten B von einerley Art seyn, sonst kan es gegen dasselbe keine Verhältniß haben, und das dritte C muß von der Art des vierten D seyn. Es ist aber nicht nothwendig, daß C und D von der Art der Glieder A und B seyn, wie wohl auch nichts hindert, daß dieses nicht ebenfalls statt haben könnte. Wir haben dieses bereits oben VI, 23. eingesehen, und wiederholen es bloß hier mit andern Worten.

S. 55. Wenn aber bey einer Proportion eines der Glieder der ersten Verhältniß, zum Exempel B, von der Art eines Gliedes der zweyten Verhältniß als des C ist; so sind nothwendig alle vier Glieder von einerley Art. Dieses ist gewißlich so, wenn B der C gleich ist.

F. 168. Denn gleiche Dinge können nicht verschiedener Art seyn. Ist aber dieses,

les, und ist in der Proportion $A : B = C : D$ das Glied B dem Gliede C gleich, so sagt man, die Proportion gehe in einem fort, sie sey stetig, oder zusammenhängend. Nämlich die Glieder A, B, C, D, das ist (wenn man B vor C, oder C vor B setzt, welches in diesem Falle allezeit geschehen kan,) die Glieder A, B und B, D, oder A, C, und C, D seyen in einer stetigen oder zusammenhängenden Proportion. Man pfleget in diesem Falle auch das mittlere Glied B oder C, nur einmal zu nennen, und zu sagen, A, B und D, oder A, C und D seyen in einer zusammenhängenden Proportion, oder auch, die Proportion der Glieder A, B, und D, oder A, C und D gehe in einem fort. In welchem Falle man sich einbilden muß, daß das mittlere Glied der Proportion B oder C die Stelle so wohl des zweyten Gliedes der ersten Verhältniß $A : B$, als auch die Stelle des ersten Gliedes der zweiten $C : D$ vertrete. Es werden aber dergleichen Proportionen nicht anders bezeichnet als die übrigen. Man schreibt $A : B = B : D$, oder $A : C = C : D$. Die mittlern Buchstaben sind einerley, und bedeuten, daß das zweyte Glied der ersten Verhältniß mit dem ersten Glied der zweiten einerley sey. Dieses ist ein gnugsames Kennzeichen, daß die Proportion zusammen hänge.

VI.
Abschnitt.

Merkmale, woraus die Gleichheit der Verhältniß ungetheilter Gröffen geschlossen wird.

§. 56. Sind die Gröffen, welche man mit einander vergleicht, nicht aus gleichen Theilen zusammen gesetzt, oder betrachtet man sie wenigstens nicht so, als ob sie aus gleichen Theilen zusammen gesetzt wären, so muß man, wie wir gleich Anfangs VI, 9. erinnert, ein anderes Kennzeichen haben, woraus man die Gleichheit zweier Verhältnisse und die Proportion der Glieder dieser Verhältnisse schließet, welches wir nunmehr deutlich vorzutragen bemühet seyn werden.

§. 57. Gesezet, es seyen die vier Gröffen AB, AC, und ab, ac gegeben; man soll sagen, ob die Verhältniß $AC : AB$ der Verhältniß $ac : ab$ gleich sey oder nicht: so theile man die Gröffen AB, ab in eine beliebige Zahl gleicher Theile, welche in unserer Figur fünfe ist, und trage diese Theile auf die verlängerten AB, ab fort, bis man über die Punkte C, c hinaus kommt; wenn: nämlich AC, ac größer sind als AB, ab, denn sonst ist dieses nicht nöthig. Findet man, daß zwischen A und C eine andere Zahl dieser Theilchen liege, als zwischen a und c, so siehet man so gleich, daß die Verhältniß $AC : AB$ der

F. 169.
170.

P p

Ver-

VI. Verhältniß $ac : ab$ ohnmöglich gleich seyn könne. VI, 36. Findet man aber, daß zwischen A und C eben so viele Theilchen liegen, als zwischen a und c, so ist man zwar nicht gesichert, daß die Proportion $AC : AB = ac : ab$ vollkommen richtig sey, aber so viel weiß man doch, daß die Verhältnisse $AC : AB$ und $ac : ab$ nicht sonderlich ungleich seyn können. Und zwar kommen sie der Gleichheit desto näher, je mehrere der Theilchen in AB sind, und je kleiner also diese Theilchen angenommen worden. VI, 8.

S. 58. Will man aber darthun, daß die Verhältnisse $AC : AB$ und $ac : ab$ vollkommen gleich seyn, so muß man zeigen, daß, was von einer Theilung richtig ist, auch bey allen übrigen statt habe, und daß nicht nur, wenn man AB und ab in fünf gleiche Theile theilet, und dergleichen Theilchen aus A nach C, und aus a nach c fort trägt, zwischen A und C so viele Theile zu liegen kommen, als ihrer zwischen a und c liegen, sondern daß eben dieses erfolge, wenn man AB und ab in 15, in 29, in 377, und mit einem Wort, in so viele gleiche Theile theilet als man will.

S. 59. Man kan dieses auch also ausdrucken: Wenn die Größen AC, AB, ac, ab proportional seyn sollen, und man theilet AB in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und ab in eben so viele gleiche Theile, so muß eine jede Zahl der Theile, in welche AB getheilet worden, weniger bringen als AC, wenn eben die Zahl der Theile der ab weniger giebt als ac, und giebt die Zahl der Theile der AB, welche man angenommen hat, eben so viel als AC, so muß auch eben die Zahl der Theile der ab so viel ausmachen als ac. Liebet aber eine nach Belieben angenommene Zahl der Theile, in welche AB getheilet worden, mehr als AC, so muß auch eben die Zahl der Theile der ab mehr betragen als ac. In der 169 Figur ist AB in fünf gleiche Theile getheilet, und ab in eben so viele Theile. Ein Theilchen der AB ist kleiner als AC, und ein Theilchen der ab ist auch kleiner als ac. Zwey Theilchen der AB bringen weniger als AC, und zwey Theilchen der ab bringen auch weniger als ac. Dingen geben drey Theilchen der AB mehr als AC, und drey Theilchen der ab geben ebenfalls mehr als ac. Hieraus schließt man, daß die Verhältniß $AC : AB$ von der Verhältniß $ac : ab$ sonderlich nicht abgehen könne, und wenn eben dergleichen eintritt, man mag der Theilchen in AB, ab so viele machen als man will, so sind die Verhältnisse $AC : AB$, und $ac : ab$ wirklich gleich. Man kan

Kan eben dieses auf den Fall anwenden, wenn die AC, ac größt sind als die AB, ab, welchen die 170 Figur vorstellet.

VI.
Abschnitt.

S. 60. Oder noch anders. Wenn man der AB eine beliebige Zahl gleicher Theile giebet, und die ab in eben so viele gleiche Theile theilet, eben diese Theile aber, so oft es nöthig ist, von B, b weiter über C, c forträgt, und findet, daß die Puncte C, c zwischen gleichnamige Theilungspuncte fallen, die nemlich von dem Anfange der Linien A, a um einerley Zahl von Theilchen ab stehen, und dieses trifft beständig zu, wie viele Theile man auch den Linien AB, ab geben mag: so kan man sicher schliessen, daß die Verhältniß AC:AB der Verhältniß ac:ab gleich, und die Proportion $AC:AB = ac:ab$ richtig sey.

S. 61. Erweget man dieses genau, so siehet man, daß man diese Begriffe auch nachfolgender gestalt ausdrücken könne. Es kan m eine jede ganze Zahl bedeuten, was man vor eine annehmen will, und eben so ist es mit einem jeden andern Buchstaben n , folgendes wird $\frac{1}{m}$ einen jeden Bruch bedeuten, dessen Zehler die Einheit ist, und $\frac{n}{m}$ bedeutet überhaupt einen jeden Bruch, dessen Glieder so groß oder so klein seyn mögen, als man will. Und demnach drucket $\frac{1}{m} AB$ einen Theil der AB aus, welcher entstanden, indem man AB in so viele gleiche Theile getheilet, als viele Einheiten in der Zahl m enthalten sind, und $\frac{1}{m} ab$ bedeutet einen eben dergleichen Theil der Größe ab, welche in so viele gleiche Theile getheilet wird als AB, weil man dem Buchstaben m in einerley Sage, und so einem jeden andern, keine andere Bedeutung giebt, als dieselbige, welche man zuerst angenommen, oder, weil man bey jedem Sage gleiche Zahlen mit einerley Buchstaben bezeichnet, ob zwar übrigens diese gleiche Zahlen nach Belieben angenommen werden können. Und will man demnach anzeigen, man soll so wohl AB als ab in eine beliebige Zahl gleicher Theile theilen, so kan man nur schreiben, man soll so wohl $\frac{1}{m} AB$ als $\frac{1}{m} ab$ nehmen. Soll nun aber dieser Theile beyderseits die Zahl n angenommen werden, so benennet man diese Zahl der Theile also $\frac{n}{m} AB$, $\frac{n}{m} ab$. Und $\frac{n}{m}$ ist der Bruch welcher durch seinen

VI. **Beispiel.** Wenn m angezeigt in wie viel gleiche Theile die Gröſſen AB , ab getheilet werden müſſen, und durch ſeinen Zehler n wie viele ſolcher Theile man annehmen müſſe, um dasjenige zu erhalten, welches $\frac{n}{m}AB$, oder $\frac{n}{m}ab$ ausgedrucket. Demnach iſt $\frac{n}{m}AB$, in der 169 Figur überhaupt ein jeder Bruch der Linie AB , in wie viel gleiche Theile man auch AB mag getheilet haben, und $\frac{n}{m}ab$ iſt ein eben dergleichen Bruch der Linie ab , welcher Bruch allezeit größer iſt als das ganze AB , wenn n größer iſt als m . Und demnach kan man ſagen, ohne in den Begriffen etwas zu ändern, welche wir mit Worten ausgedrucket: die Proportion $AC:AB = ac:ab$ habe ihre Richtigkeit, wenn bey einer jeden Bedeutung, die man den Buchſtaben m, n geben mag, ſals $\frac{n}{m}AB$ größer iſt als AC , auch zugleich $\frac{n}{m}ab$ größer iſt als ac : und ſals $\frac{n}{m}AB$ kleiner iſt als AC , auch zugleich $\frac{n}{m}ab$ kleiner iſt, als ac : und ſals $\frac{n}{m}AB$ ſo groß iſt als AC , auch zugleich $\frac{n}{m}ab$ ſo groß iſt als ac . Man erwäge alles genau, ſo wird man finden, daß dieſer Ausdruck nichts anders bedeuten könne, als was vorher mit Worten vorgetragen worden.

§. 62. Dieſes iſt das Merkmal, woraus die Alten die Proportion geſchloſſen. Sie tragen aber dasſelbe etwas anders vor, vielleicht weil ſie die Brüche vermeiden wollten. Sie haben bemerkt, daß wenn $\frac{n}{m}AB$ größer iſt als AC , auch nAB größer ſeyn müſſe als mAC . Denn dieſe Gröſſen nAB und mAC entſtehen, wenn man die erſtern $\frac{n}{m}AB$ und AC beyderſeits durch die Zahl m multipliciret; 1, 147. und wenn man zwei Gröſſen durch einerley Zahl multipliciret, ſo entſtehet aus der Multiplication der größeren allezeit was Größeres, als aus der Multiplication des Kleineren. Aus eben der Urſache iſt nAB kleiner als mAC , wenn $\frac{n}{m}AB$ kleiner iſt als AC , und $nAB = mAC$, wenn $\frac{n}{m}AB = AC$. Man kan aber auch umgekehret ſchließen, von nAB

$nAB = mAC$ auf $\frac{n}{m}AB = AC$, und so bey den übrigen, und sind VI. Abschnitte.
also diese zwei Arten sich auszudrücken, im Grunde einerley. Denn aus $nAB = mAC$, wird $\frac{n}{m}AB = AC$, wenn man beyderseits durch

die Zahl m dividiret. Und diesem zufolge kan man sagen, daß, wenn nAB grösser ist als mAC , und zugleich nab grösser als mac ; oder wenn nAB kleiner ist, als mAC , und zugleich nab kleiner als mac , oder wenn $nAB = mAC$, und zugleich $nab = mac$, so sind die Grössen AC, AB, ac, ab proportional. Das ist, wenn man vier Grössen hat AC, AB, ac, ab und man findet, daß wenn man die erste AC und dritte ac mit einer beliebigen Zahl m und die zwote AB wie auch die vierte ab durch eine ebenfalls nach Belieben angenommene Zahl n multipliciret, niemals mAC grösser werde als nAB , wenn nicht auch mac grösser ist als nab , oder kleiner, wenn nicht auch mac kleiner ist als nab , oder der nAB gleich, wenn nicht auch mac der nab gleich ist: so kan man eben so, wie vorher VI, 59. schliessen, es seyn die vier Grössen AC, AB, ac, ab proportional. Die Anwendung dieses Merkmals ist so schwer nicht, als sie Anfangs scheinen kan. Doch werden wir uns des erstern Ausdrucks durch Brüche VI, 61. lieber bedienen, weil selber wenigstens etwas einfachere Figuren giebet.

§. 63. Es kan uns dabey nicht aufhalten daß wir angenommen, es könne eine jede Grösse, dergleichen die Linien AB, ab sind, in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet werden. Denn daß dieses geschehen könne, ist an sich selbst klar, und mußte in der Rechenkunst überall zum Grunde gelegt werden. Von geraden Linien aber, mit welchen wir hier meist umgehen, haben wir auch gewiesen, auf was Art ihre Theilung möglich sey, als wir IV, 194. gezeigt, daß jede zwei gerade Linien durch eine beliebige Zahl von Parallellinien, welche gleich weit von einander entfernt sind, in gleiche Theile getheilet werden. Man kan daraus leicht die Anweisung herleiten, wie diese Theilung wirklich zu verrichten ist. Es sey AB in der 171. Figur in fünf gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch A eine beliebige Linie, ohne ihr Ende zu bestimmen, und trage auf dieselbe von A an eine Linie von beliebiger Länge fünf mal. Dadurch wird die ganze Linie AC aus fünf gleichen Theilen zusammen gesetzt. Man ziehe BC von dem Ende dieser Linie, an das Ende der vorigen AB , welche man theilen sol: und durch alle Theilungspuncte der AC ziehe man mit dieser BC Parallellinien. Dies

VI. ~~Wichtig.~~ se werden die AB in fünf gleiche Theile theilen. Denn wenn man auch durch A die Linie AD den übrigen parallel ziehet, so stehet man, daß AB zwischen den äussersten der Parallellinien liege, welche AC in fünf gleiche Theile theilen. Demnach wird AB ebenfalls in fünf gleiche Theile getheilet, und eben so kan man eine jede andere gerade Linie in fünf oder viele gleiche Theile theilen, als aufgegeben wird.

S. 64. Uebrigens kan man dasjenige, so bisher VI. 61. gesagt worden, wieder als eine Erklärung einer beliebigen Redensart ansehen. Daß aber dieser Begriff der Proportion mit demjenigen überein komme, welchen wir gleich Anfangs VI. 11. gegeben, kan aus nachfolgenden erhellen. Man kan bey den Umständen, die wir angegeben, sich vorstellen, daß die zwei Grössen AB und AC , wie auch die zwei andern ab und ac gleichförmig anwachsen, und daß AB mit der ab , und AC mit der ac zugleich entstanden sey: Woraus nothwendig fließet, daß die Verhältniß $AC : AB$ der Verhältniß $ac : ab$ gleich sey, wie man hoffentlich einsehen wird, wenn wir uns noch etwas deutlicher werden erkläret haben.

F. 169.
170.

S. 65. Eine Linie entstehet durch die Bewegung eines Punctes, und wenn diese Bewegung von A anfänget, und das Punct gehet von dannen nach B zu, so wächst die Linie beständig. Alle andere Grössen können auf die Art entstehen, nicht zwar durch die Bewegung der Puncte, denn dadurch entstehen bloß die Linien, sondern durch die Bewegung anderer Grössen; oder sie können doch durch ein beständiges Wachsthum eben so zunehmen, wie eine Linie durch die Bewegung des Punctes, welches sie beschreibt, immer größer und größer wird. Diese Bewegung des Punctes aber und das daraus entstehende Wachsthum der Linie kan auf verschiedene Art eingerichtet seyn. Die Linie kan bald geschwinder bald langsamer wachsen, und das Wachsthum kan nach verschiedenen Regeln abwechseln. Es kan aber auch eine Linie und überhaupt eine jede Grösse gleichförmig anwachsen, so nemlich, daß jede gleiche Theile derselben in gleicher Zeit entstehen. Geschiehet dieses bey zwei Linien AB und ab zugleich, dergestalt, daß wenn jede derselben in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet ist; das erste Theil der Linie AB anwächst, indem das erste Theil der Linie ab erzeugt wird, und entstehet das zweyte Theil der Linie AB zugleich mit dem zweyten Theil der Linie ab ; das dritte mit dem dritten, und so immer fort, so entstehen die Linien AB , und ab durch ein gleichförmiges Wachsthum zugleich. Jede zwei gerade Linien können durch ein gleich-

gleichförmiges Wachsthum zugleich entstehen, und wenn die Punkte, welche die Linien AB, ab auf die Weise beschreiben, zugleich in C, c angekommen sind, es mögen nun diese C, c auf dieser oder jener Seite der Punkte B, b liegen, so sind auch die Linien AC, ac durch ein gleichförmiges Wachsthum zugleich entstanden.

VI.
Wachsthum.

§. 66. Es ist aber ohne sonderliche Schwierigkeit einzusehen, daß die Punkte, welche die Linien AC und ac so wohl als AB, ab durch eine gleichförmige Bewegung beschreiben, in dem Falle zugleich in C und c kommen, wenn die Punkte C, c in den beyden Linien AB, ab immer zwischen solchen Theilungspunkten liegen, welche von A, a um eine gleiche Zahl von gleichen Theilen der AB und ab entfernt sind, von was Größe diese Theile auch seyn mögen, und daß bey dieser Bedingung die Linien AC, ac durch eben die gleichförmige Bewegung, welche AB und ab zugleich beschreibt, zugleich entstehen. Und demnach kommt das Merkmal, aus welchem wir VI, 60. geschlossen, daß die Größen AC, AB, ac ab proportional sind, endlich darauf hinaus, daß AB und AC durch ein gleichförmiges Wachsthum entstehen, wie auch ab und ac, und daß indem AB entsteht, auch ab erzeugt wird, wie auch das AC und ac mit einander zugleich anwachsen, und zugleich die Größe erreichen, welche sie haben.

§. 67. Ist nun aber AC durch eben das gleichförmige Wachsthum entstanden, durch welches AB erzeugt worden, und hat die beyden Linien ac und ab ebenfalls einerley gleichförmiges Wachsthum hervor gebracht, ist über dieses AB entstanden, indem ab erzeugt worden, und ist auch AC mit der ac zugleich angewachsen; so muß allerdings die Verhältniß AC : AB der Verhältniß ac : ab gleich seyn. Man hat bey so gestaltnen Sachen nicht den geringsten Grund, aus welchem man schließen könnte, daß AC in Ansehung der AB größer sey, als ac in Ansehung der ab ist, welcher nicht zugleich dienen könnte, darzuthun, es sey ac in Ansehung der ab größer als AC in Ansehung der AB, welches dem vorigen gerade entgegen gesetzt ist. Denn es ist alles auf einer Seite vollkommen wie auf der andern. Durch die Größe AB wird das gleichförmige Wachsthum bestimmt, durch welches so wohl AB als AC entstehen, und eben so bestimmt ab das Wachsthum, durch welches ab und ac erzeugt wird. Indem dieses geschieht, wächst so wohl AB und ab, als auch AC und ac zugleich an, und ihre Größen werden dadurch bestimmt. Also werden auch die Größen, welche man ihnen geben muß, wenn man sie auf einan-

der

VI. *Wissn.* Der beziehet, durch eben das Wachsthum bestimmt, und weil die Größe AC aus der AB nicht anders entstanden ist, als die Größe ac aus der ab, so kan auch AC sich gegen AB nicht anders verhalten, als sich ac gegen ab verhält.

S. 68. Dieses gleichförmige Wachsthum ist der rechte Grund der Gleichheit zweier Verhältnisse, und man kan auch umgekehret sagen, daß wenn die Verhältniß AC:AB der Verhältniß ac:ab gleich ist, und man stellet sich vor, daß AC und AB durch einerley gleichförmiges Wachsthum entstehen, und ac und ab ebenfalls; und daß AB und ab mit einander zugleich entstehen; auch AC und ac zugleich entstehen werden. Denn wäre dieses nicht, und AC entstünde bey den bestimmten Umständen langsamer als ac, so wäre ohnstreitig AC in Ansehung der AB größer als ac in Ansehung der ab, weil eine kleinere Größe als die AC, die nemlich, welche mit der ac zugleich entstanden, gegen AB sich verhielte, wie sich ac gegen ab verhält.

S. 69. Man siehet auch, daß sich dieser Begriff einer Verhältniß, welchen wir hier zum Grunde legen, mit demjenigen vollkommen reime, welchen wir oben VI, 31. angegeben, da wir gesagt, die Verhältniß der AC zur AB sey die Art und Weise wie AC aus der AB entstehen kan. Nun muß man hier annehmen, daß AC durch ein gleichförmiges Wachsthum erzeugt wird, welches auch die AB bestimmt, und nicht durch die Zusammensetzung der Theile der AB. Denn durch diese Zusammensetzung kan AC bloß in dem Fall entstehen, wenn das Punct C eben in einen Theilungspunct der AB fällt, wenn man nemlich diese Theilchen, so oft es nöthig ist, ausserhalb B fortsetzet. Es fällt aber C nicht nothwendig in einen solchen Theilungspunct, denn wir haben gesehen daß AC von einer solchen Länge seyn könne, daß, man mag AB theilen in so viele gleiche Theile als man wil, und dieser Theile wie man wil von A nach B und so weiter fortsetzen, dennoch niemals das Ende eines solchen Theilchens genau in C falle. VI, 5. Indessen ist der Fall, in welchem C mit einem Theilungspuncte überein kommt, bey welchem Umstande AC aus AB entstehen kan, wie eine ganze Zahl aus einer andern, oder wie eine gebrochene Zahl aus der Einheit, unter dem allgemeinen Begriffe enthalten, welchen wir aus dem gleichförmigen Wachsthum hergenommen haben, und was aus diesem allgemeinen Begriffe wird hergeleitet werden, läffet sich überhaupt auf alle Proportionen anwenden. Doch wollen wir größser Deutlichkeit halber die Beweise, welche nunmehr einzusehen seyn wer-

werden, auch insbesondere auf solche Größen einrichten, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind; welche diejenigen vor allem annehmen können, welche sich alle Größen, als aus gleichen Theilen zusammen gesetzt, vorstellen, indem sie diese Theile, wenn die Zusammensetzung nicht anders geschehen kan, von unendlicher Kleinigkeit annehmen.

VI.
Abshn.

§. 70. Wir werden uns bey diesen Beweisen und sonst zuweilen des Zeichens $>$ bedienen, welches, wenn man es zwischen die Buchstaben setzt, welche gewisse Größen andeuten, allezeit bedeutet, daß dieselige GröÙe, welche an der Spitze des Zeichens bezeichnet ist, kleiner sey als die andere, welche man ihr entgegen gesetzt. $A > B$, oder $B < A$ bedeutet es sey die GröÙe, welche B bedeutet, kleiner als diejenige, welche der Buchstabe A anzeigt, oder es sey die A gröÙer als B. Wir werden auch zuweilen schreiben, wenn $A > = < a$, so ist auch $B > = < b$. In welchem Falle wir anzeigen wollen, daß wenn A gröÙer ist als a, so sey auch B gröÙer als b, und wenn A der a gleich ist, so sey auch B der b gleich, und wenn A kleiner ist, als a, so sey auch B kleiner als b.

§. 71. Es betreffen aber diese Beweise gewisse Regeln, mittelst welcher man aus einer Verhältniß auf andere schließen, und aus einer oder etlichen Proportionen, andere herleiten kan, welche allezeit richtig sind, wenn die ersten ihre Richtigkeit haben. Sie sind von ungemeinen Nutzen und müssen vollkommen bekannt seyn. Dieses ist eben die Ursache, warum wir den Leser so lange bey dieser Sache aufhalten, und uns bemühen alles aus den ersten Gründen herzuleiten.

Regeln zur Verwandlung der Proportion. Die erste.

§. 72. Die erste dieser Regeln ist so natürlich und so leicht, daß sie kaum eines Beweises bedarf. Wenn die vier Größen AC, AB und ac ab proportional sind, und folgendes $AC : AB = ac : ab$; so sind sie auch verkehrt gesetzt proportional, und der Satz welchen diese Zeichnung ausdrucket $AB : AC = ab : ac$, ist ebenfalls richtig. Denn diese beyden Sätze $AC : AB = ac : ab$ und $AB : AC = ab : ac$ zeigen nichts anders an, als daß AB und AC durch einerley gleichförmiges Wachstum entstanden, wie auch die ac und ab, und daß die AB und ab wie auch die AC und ac durch dieses Wachstum zu gleicher Zeit erzeugt worden. VI, 68. Ist nun der erste Satz $AC : AB = ac : ab$

F. 169.
170.

VI. wahr, so sind wirklich AC und AB, wie auch $a c$ und $a b$; durch ein
 Abschnitt gleichförmiges Wachsthum; AC, $a c$ aber, wie auch AB, $a b$ zugleich,
 entstanden: oder haben doch so entstehen können, welches auf eines
 hinaus kommt: also muß auch der andere Satz AB: AC = $a b$:
 $a c$ richtig seyn, welcher eben das, und nichts anders, ausdrucket.

F. 163. §. 73. Bedeuten die Buchstaben A, B, C, D die getheilten Grö-
 ßen der 163 Figur, und ist A: B = C: D, so siehet man eben so leicht,
 daß auch diese Proportion B: A = D: C richtig sey, wenn man sich
 der Gründe bedienen wil, die wir von der Proportion solcher Grö-
 ßen ins besondere angegeben VI, 35. B und D bestehen aus gleich vielen
 Theilen. Aus den Theilen der B ist A zusammen gesetzt, und aus
 den Theilen der D die C, und in A sind so viele Theile als in C. Al-
 so kan man sich auch vorstellen, daß A und C in eine gleiche Zahl
 Theile getheilet seyn, und daß man aus gleichen Zahlen dieser Theile
 B und D zusammen gesetzt, die B nemlich aus den Theilen der A und
 die D aus den Theilen der C. Und wenn man die Sache auf der
 Seite betrachtet, so muß man sagen, es verhält sich B zur A, wie D
 zur C. Doch wem ist es unbekant, daß wenn A in Ansehung der
 B eben so groß ist, als C in Ansehung der D, auch wiederum B in An-
 sehung der A so groß sey als D in Ansehung der C. Dieses aber und
 nichts anders wil man sagen, wenn man aniebet, daß sich die Glie-
 der zweor gleichen Verhältnisse verkehren lassen, das zweyte in die Stel-
 le des ersten, und das erste in die Stelle des zweyten, ohne daß da-
 durch die Gleichheit der Verhältnisse, oder Proportion anhöre.

Die zweyte Regel.

F. 172. §. 74. Die zweyte Regel, welche verschiedene besondere Fälle
 unter sich begreiffet, ist diese. Man setze, daß in der 172 Figur, die
 Verhältniß AB: CD der Verhältniß $a b$: $c d$ gleich sey, wie auch
 daß BC: CD = $b c$: $c d$ diese Bedingungen sind wohl zu bemerken.
 Die hintern Glieder dieser Verhältnisse CD, und $c d$, sind gleich, und
 damit dieses desto deutlicher in die Augen fallen möge, haben wir die-
 se Proportionen unter einander gesetzt:

$$AB: CD = ab: cd$$

BC: CD = bc : cd , die vordern Glieder AB, BC, $a b$, $b c$ aber
 können verschieden seyn. Man mache die Summe der zweyen ersten
 Glieder der Verhältnisse AB + BC, wie auch $a b$ + $b c$, und setze die-
 se Summe an die Stelle der ersten Glieder der Verhältnisse, mit Bey-

behaltung der zweyten, dergestalt $AB + BC : CD = ab + bc : cd$. VI.
Diese Proportion, wie wir sie gesetzt, wird richtig seyn. Abschnitt.

§. 75. Man kan die Richtigkeit aller dieser Sätze mit Zahlen versuchen; und ob es zwar keinen vollständigen Beweis giebet, wenn die Zahlen eintreffen, weil man glauben kan, daß dieses von ohngefehr geschehe: so dienen doch dergleichen Versuche, die Sätze selbst besser einzusehen, und sich zu überführen, daß man sie eingesehen. Zum gegenwärtigen Falle dienen alle Proportionalzahlen, wenn die letztern Glieder der Verhältnisse einerley sind: zum Exempel diese:

$$5 : 2 = 10 : 4$$

$$7 : 2 = 14 : 4$$

Nach dem Satze verhält sich $7 + 5$, das ist 12 zu 2, wie 10 + 14, das ist 24 zu 4, und man siehet leicht, daß dieses richtig sey.

§. 76. Auch hat der Beweis bey Zahlen oder getheilten Größen nicht die geringste Schwierigkeit. Man stelle sich eine solche Verhältniß unter dieser Zeichnung vor, $nA : mA = nB : mB$, wie man allezeit thun kan. Es bedeutet nemlich n die Zahl der Theile in den vorhergehenden zweyen Gliedern der Verhältnisse, welche in der 163 F. 163. Zeichnung 5 ist, A bedeutet einen Theil der Glieder der ersten Verhältniß, und B einen der Theile, aus welchen die Glieder der zweyten Verhältniß bestehen, m aber die Zahl der Theile, welche in den nachfolgenden Gliedern der Verhältnisse enthalten sind, die in der Zeichnung 7 ist. Man nehme noch eine andere Proportion, in welcher die ersten Glieder der Verhältnisse von beliebiger Größe seyn können, die zweyten aber mit den vorigen einerley sind. Diese Proportion sey $sA : mA = sB : mB$, Wenn man nun diese Proportionen unter einander zeichnet,

$$nA : mA = nB : mB,$$

$sA : mA = sB : mB$, und wie der Satz lehret, die Glieder zusammen setzt, so bekommt man $nA + sA : mA = nB + sB : mB$, Man siehet aber leicht, daß diese Proportion richtig sey. Denn die zweyten Glieder mA , mB derselben haben einerley Zahlen von Theilen m , und die ersten Glieder ebenfalls. Denn die Zahl der Theile A in dem ersten Glied $nA + sA$ ist $n + s$, und eben so groß ist auch die Zahl der Theile B in dem dritten Gliede $nB + sB$.

§. 77. Erweget man dieses etwas genauer, so siehet man, daß die

VI. zweyten Glieder der letztern Proportion, nicht eben $m A$ seyn müssen. **Abkürzung.** Man hätte an die Stelle derselben auch ϵA setzen, und so dann alle Glieder, wie sie unter einander stehen, zusammen setzen können. Die Proportion $n A + \epsilon A : m A + \epsilon A = n B + \epsilon B : m B + \epsilon B$ ist ebenfals richtig. Alleine dieses ist nicht unser gegenwärtiger Satz, und er wird auch sonst nicht angemerkt, weil er von geringem Nutzen ist, und in der Anwendung aus den allgemeinen Sätzen leicht gefolgert werden kan.

L. 72. §. 72. Will man aber sich den Beweis allgemein, und dergestalt vorstellen, daß er auch auf die ungetheilten Grössen angewendet werden kan, so muß man wieder die 172 Figur vor sich nehmen und erwegen, daß eben dadurch indem wir gesetzt, daß die Verhältniß $AB : CD$ der Verhältniß $ab : cd$ gleich sey, wir angenommen, daß AB und CD , wie auch ab und cd durch ein gleichförmiges Wachsthum entstanden; und daß AB mit der ab , wie auch CD mit der cd zugleich angewachsen sey VI, 68. Eben so wird auch gesetzt, daß das Wachsthum, durch welches die beiden Grössen BC , CD entstanden sind, gleichförmig sey, wie auch dasjenige, durch welches die zwey $b c$, $c d$ entstanden sind, und daß die BC , und $b c$ durch dieses Wachsthum zugleich entstanden, so woljals CD , $c d$. Denn dieses fließet aus der ebenfals als richtig angenommenen Proportion $BC : CD = b c : c d$. Hieraus aber folget, daß auch das Wachsthum, durch welches die ganze AC entstanden ist, demjenigen gleichförmig sey, durch welches die CD entstanden: wie auch dasjenige, durch welches die ac erzeugt worden, dem Wachsthum, durch welches $c d$ geworden, und daß die erstern dieser Linien AC und ac zugleich angewachsen. Weil nun auch diese letztern Linien CD und $c d$ zugleich entstanden sind: so ist allerdings $AC : CD = ac : c d$. VI, 67. Welches zu erweisen war.

§. 72. Es begreiffet dieser Satz verschiedene andere in sich, welche man als besondere Proportionsregeln ansehen kan. Vor allen Dingen sehen wir, daß er nicht von zweyen Proportionen allein richtig sey, sondern von so vielen als man wil. Der Satz lästet sich dergestalt ausdrücken:

$$\text{Wenn } A : B = C : D, \text{ und } E : B = F : D,$$

so ist $A + E : B = C + F : D$. Man kan diesen Schluß nunmehr als einen bekannten Satz annehmen, und ausser dem setzen, $G : B = H$

H : D, so folget aus beyden, es sey auch $A + E + G : B = C + F + H : D$, und wenn man diesem wieder die Proportion $J : B = K : D$ beisetzt, so kan man aus beiden ferner die nachstehende schließen, $A + E + G + J : B = C + F + H + K : D$, und so immer fort. Man muß demnach sagen, daß wenn man so viele Proportionen annimmt, als man annehmen wil, deren nachfolgende Glieder von einerley Ordnung sind, sich allezeit die Summe aller ersten Glieder zu dem zweyten verhalten werde, wie sich die Summe der dritten Glieder aller dieser Verhältnisse zu dem vierten verhält. Aus den Proportionen $A : B = C : D$

$$E : B = F : D$$

$$G : B = H : D$$

$J : B = K : D$ kan man allezeit schließen $A + E + G + J : B = C + F + H + K : D$, es mögen der angenommenen oder gegebenen Proportionen so viele seyn als man wil.

§. 80. Es verstehet sich, ohne daß wir es erinnern, daß die Richtigkeit der Proportionen, aus welchen eine neue sol geschlossen werden, erst zu erweisen sey, ehe man aus denselben schließet. Im nachfolgenden Falle ist nur von der ersten Proportion notwendig, daß sie erwiesen werde, wenn man nemlich sehet,

$$A : B = C : D \text{ und}$$

$$B : B = D : D, \text{ denn es ist die andere überall richtig:}$$

Hieraus aber folget, wie beständig, $A + B : B = C + D : D$. Und weil also diese Folge bey einer jeden Proportion gemacht werden kan, ohne etwas weiter zum Grunde zu setzen als daß dieselbe richtig sey. So kan man sagen, daß bey einer jeden Proportion $A : B = C : D$ sich die Summe der zwey ersten Glieder $A + B$ zu dem zweyten Gliede B verhalte, wie die Summe der zwey letzteren Glieder $C + D$, sich zu dem letzten Gliede D , verhält. So ist zum Exempel $3 : 2 = 6 : 4$, folgend $3 + 2 : 2 = 6 + 4 : 4$, oder $5 : 2 = 10 : 4$.

§. 81. Wiederum wenn $A : B = C : D$, so kan man diese Proportion wiederholen, und so oft sehen, als man wil

$$A : B = C : D$$

$$A : B = C : D$$

$$A : B = C : D$$

Hieraus folget wieder nach dem allgemeinen Satze $A + A + A : B = C + C + C : D$, das ist in unserm Falle $3A : B = 3C : D$. Und weil man die Proportion so oft

VI. **Wiederholen** kan als man wil, oder so oft, als viele Einheiten in der Zahl, die wir uns unter dem Buchstaben n vorstellen, enthalten sind, so kan man überhaupt sagen, wenn $A : B = C : D$, so sey auch $nA : B = nC : D$. Das ist, wenn man das erste und das dritte Glied einer Proportion durch einerley ganze Zahl multipliciret, so wird dadurch die Proportion selbst nicht aufgehoben. Nämlich die Verhältniß $nA : B$ ist freylich grösser als die Verhältniß $A : B$, aber bey dem allen ist die Verhältniß $nA : B$ der Verhältniß $nC : D$ gleich, gleichwie die Verhältniß $A : B$ der Verhältniß $C : D$ gleich ist. Die Verhältniß $3 : 2$ ist der Verhältniß $6 : 4$ gleich; multipliciret man die ersten Glieder dieser Verhältnisse durch 4, so wird auch: $12 : 2 = 24 : 4$.

§. 82. Und da sich bey einer jeden Proportion die Glieder versetzen lassen, das zweyte in die Stelle des ersten, und das vierte in die Stelle des dritten VI, 72. so siehet man leicht, daß was von dem ersten und dritten Gliede einer Proportion erwiesen worden, auch von dem zweyten und vierten gelten müsse. Nämlich überhaupt, wenn man setzt:

$$B : A = D : C$$

$$B : E = D : F$$

$$B : G = D : H, \text{ so ist auch } B : A + E + G = D :$$

$C + F + H$ VI, 79. Und in einer jeden Proportion $B : A = D : C$ ist $B : A + B = D ; D + C$ VI, 80. wie auch $B : nA = D : nC$ VI, 81.

§. 83. Setzet man aber die beyden letzteren Sätze zusammen und bemerket, daß in einer jeden Proportion man so wohl das erste und das dritte, als auch das zweyte und vierte Glied durch einerley Zahl multipliciren könne, ohne die Proportion aufzuheben; so folget auch, daß wenn man beides zugleich thut, und so wohl das erste und dritte, als auch das zweyte und vierte Glied einer Proportion, durch einerley Zahl multipliciret, die Proportion dennoch bleibe. Und wenn man also hat $A : B = C : D$, so ist allezeit $nA : mB = nC : mD$, was auch n und m vor Zahlen bedeuten mögen.

§. 84. Wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist, und man setzet zu einem dieser Glieder etwas hinzu, so groß oder so klein es auch seyn mag, welches wir E nennen wollen, so können die Verhältnisse $A : B$ und $C : D + E$ ohnmdglich gleich seyn. Denn dasjenige Glied, welchem etwas zugesetzt worden, ist nach Proportion zu groß,

groß, eben deswegen, weil die Proportion ohne diesen Zusatz richtig war. Wenn man nun die Glieder dieser verdorbenen Proportion VI. Abschnitt. eben so durch die Zahlen m und n multipliciret, wie wir in dem vorhergehenden Satze gethan, und schreibet $nA : mB$ und $nC : mD + mE$, so sind diese Verhältnisse wieder nicht gleich, weil die Proportion $nA : mB = nC : mD$ richtig ist, und dem vierten Gliede derselben mE zugesetzt worden. Und es folget hieraus, daß wenn zwey Verhältnisse ungleich sind, und man multipliciret ihre vorhergehende und nachfolgende Glieder durch einerley Zahlen n, m , ohnndöglich gleiche Verhältnisse kommen können. Denn man kan alle ungleiche Verhältnisse ansehen, als ob sie aus gleichen Verhältnissen entstanden wären, indem einem Gliede der gleichen Verhältnisse etwas zugesetzt worden.

S. 85. Hieraus aber folget, daß wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist, und man dividiret das erste und dritte Glied derselben durch einerley Zahl 3 oder n , oder das zweyte und vierte durch die Zahl 2 oder eine jede andere m , auch die Proportion $\frac{1}{2}A : \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}C : \frac{1}{2}D$ richtig seyn werde. Denn man multiplicire wieder das erste und dritte Glied durch die Zahl 3 durch welche man sie vorher dividiret, und das zweyte und vierte durch die Zahl 2 , nach welcher diese Glieder getheilet worden: so kommet $A : B = C : D$ wiederum, und man weiß zum voraus, daß die Proportion der Grössen, welche durch diese Multiplication entstanden sind, richtig sey, weil nemlich dieses eben die Proportion ist, die man zuerst angenommen. Da nun aber durch eine dergleichen Multiplication ohnndöglich eine richtige Proportion kommen kan, wenn nicht auch die Proportion richtig ist, deren Glieder dergestalt multipliciret worden sind VI, 83. so muß man schliessen, daß die Proportion $\frac{1}{2}A : \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}C : \frac{1}{2}D$, oder überhaupt $\frac{1}{n}A : \frac{1}{n}B = \frac{1}{n}C : \frac{1}{n}D$ allerdings richtig sey, wenn die Proportion $A : B = C : D$ richtig ist.

S. 86. Was wir VI, 74. von der Addition angezeigt, ist auch von der Subtraction richtig, und man kan dasjenige, was von dieser Art die Proportion zu ändern zu sagen ist, noch mit dem vorigen unter eine allgemeine Regel bringen. Wenn die Proportion $AC : CD = ab : cd$ richtig ist, aber auch diese: $AB : CD = ab : cd$, und die zweyten Glieder dieser Proportionen CD, cd sind wieder beiderseits einerley. Die ersten, und dritten wie auch die vierten aber sind verschieden; so ist auch diese Proportion richtig: $AC - AB : CD = ac$

VI. $ac : ab :: cd$, oder $BC : CD = bc : cd$, deren erstere Glieder BC , bc nemlich der Unterschied sind der ersten Glieder der vorigen Proportionen AC , AB , und ac , ab , und bey welcher man die zweyten Glieder der vorigen Proportionen an ihren Stellen stehen lassen. So ist es bey den Zahlen:

$$5 : 4 = 15 : 12.$$

$$3 : 4 = 9 : 12, \text{ die Proportion } 5 - 3 : 4 = 15 - 9 : 12,$$

oder $2 : 4 = 6 : 12$ hat ihre Richtigkeit.

S. 87. Und der Beweis bey solchen Zahlen oder Grössen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, ist mit dem vorigen, welchen wir bey der Addition gebrauchet, IV, 76. meist einerley. Es sey $nA : mA = nB : mB$, und $sA : mA = sB : mB$. Die Zahl aber, welche s bedeutet, sey kleiner als die Zahl n , und folgendes $sA < nA$, und $sB < nB$, und man ziehe die kleineren Glieder von den grössern ab, so werden die Unterschiede $nA - sA$, und $nB - sB$, oder $n - sA$, $n - sB$. Man siehet aber leicht VI, 35. daß die Proportion $n - sA : mA = n - sB : mB$ richtig sey. Denn die nachfolgenden Glieder mA , mB bestehen aus der Zahl m der Theile A und B , und die vorhergehenden Glieder $nA - sA$, $nB - sB$ sind beide aus der Zahl $n - s$ eben dieser Theile A und B in gehöriger Ordnung zusammen gesetzt.

S. 88. Es ist aber auch der allgemeine Beweis von dem vorigen gar wenig unterschieden. Weil die Verhältniß $AC : CD$ der Verhältniß $ac : cd$ gleich ist, so kan man sich vorstellen, daß AC und CD durch einerley gleichförmiges Wachsthum entstanden, wie auch ac und cd , und daß AC mit der ac und CD mit der cd zugleich erwachsen. Und weil auch $AB : CD = ab : cd$, so ist AB durch eben das Wachsthum entstanden, welches die CD und AC erzeugt, und ab durch dasjenige, mit welchem cd und ac angewachsen, und AB , ab sind zugleich entstanden. Da nun auch AC , ac zugleich entstanden sind, so ist auch BC mit der bc zugleich entstanden, und es ist also $BC : CD = bc : cd$, welches zu erweisen war.

S. 89. Man kan hieraus wieder schliessen, daß wenn man eine Proportion hat $A : B = C : D$ und die letztern Glieder der Verhältnisse B und D sind kleiner als die erstern, man auch werde sagen können $A - B : B = C - D : D$. Denn es ist allezeit $B : B = D : D$. Wenn man nun zum Grunde setzt $A : B = C : D$, und schliesset aus diesen beiden Verhältnissen, nach dem allgemeinen Satz VI, 88. so bekom-

bekommet man allerdings $A - B : B = C - D : D$. Es sey $6 : 2 = 12 : 4$, so ist nach dem Satz 6 $-2 : 2 = 12 - 4 : 4$, das ist $4 : 2 = 8 : 4$, und die Richtigkeit dieser Proportion ist leicht einzusehen.

S. 90. Versetzt man die Glieder dieser Verhältnisse, und schreibt $B : A = D : C$, und $B : A - B = D : C - D$ VI, 72. so bekommt man eine neue Regel, welche von der vorigen kaum unterschieden ist. Man kan sagen, wie das erste Glied einer Proportion B zu dem Unterschied des zweyten und des ersten $B - A$; so das dritte zu dem Unterschied des dritten und des vierten $D - C$. Man siehet leicht, daß man durch die Versetzung der Glieder auch noch andere Proportionen auf eben den Grund bauen könne. Weil aber dieses gar etwas leichtes ist, und in der Anwendung keine Schwierigkeit macht, so wollen wir uns dabey nicht aufhalten.

S. 91. Und weil also bey den Bedingungen, welche wir angenommen, weder die Addition noch die Subtraction der vorhergehenden Glieder der Verhältnisse die Proportion ändert, so folget, daß wenn man hat:

$$A : B = C : D, \text{ und}$$

$$E : B = G : D, \text{ und}$$

$$H : B = J : D, \text{ und so weiter wenn man wil,}$$

und setzet sodann die erstern Glieder mit ihren Zeichen zusammen, oder subtrahiret einige der in zwey gleichen Verhältnissen vorhergehenden Glieder, als E und G , von der Summe der übrigen; es folget sage ich, daß auch die Proportion $A - E + H : B = C - G + J : D$ richtig seyn werde.

S. 92. Wir können noch eine Regel unter diese bringen, deren Beweis von demjenigen, dessen wir uns bisher bedienet, nicht verschieden ist, und welche auch aus dem bereits erwiesenen folget. Es sey die Proportion $AC : CD = ac : cd$ richtig, und BC sey so groß als CD , wie auch $bc = cd$. So werden AC, CD durch einerley gleichförmiges Wachsthum erzeugt, wie auch ac, cd , und AC, ac , wie auch CD, cd entstehen zugleich. Demnach entstehen auch $BC = CD$, und $bc = cd$ zugleich, und folgendes auch AB und ab , aber auch AD und ad . Und demnach ist die Proportion richtig $AD : AB = ad : ab$. Wil man aber die Glieder derselben aus den Gliedern der zum Grunde gelegten Proportion $AC : CD = ac : cd$ ausdrücken, so ist $AD = AC + CD$, und $AB = AC - BC$, oder weil $BC = CD$, so

ist

F. 172.

VL ist $AB = AC - CD$. Eben so ist $ad = ac + cd$, und $ab = ac - cd$, und wenn man diese Benennungen an die Stelle der einfachen in der Proportion $AD : AB = ad : ab$ setzt, so bekommt man $AC + CD : AC - CD = ac + cd : ac - cd$. Diese Proportion läßt sich demnach allezeit aus der Proportion $AC : CD = ac : cd$ herleiten, und man kan bey einer jeden Proportion sagen, wie die Summe der ersten zwey Glieder, zu ihrem Unterschiede, so die Summe der zwey letzten Glieder zu ihrem Unterschiede, oder wenn man die Glieder versetzet, wie den Unterschied zur Summe, so der Unterschied zur Summe. Zum Exempel, man hat $7 : 3 = 14 : 6$, so ist $7 + 3 : 7 - 3 = 14 + 6 : 14 - 6$, das ist $10 : 4 = 20 : 8$.

§. 93. Von getheilten Gröſſen ist dieser Beweis wieder gar leicht. Wenn man hat $nA : mA = nB : mB$, und man machet $nA + mA : nA - mA = nB + mB : nB - mB$, oder welches auf eines hinaus kommt $n + m.A : n - m.A = n + m.B : n - m.B$, so siehet man leicht daß das erste Glied, aus der Zahl $n + m$ der Theile A bestehe, und daß das dritte aus eben so vielen Theilen von der Gröſſe B zusammen gesetzt sey, wie auch daß das zweyte Glied die Zahl $n - m$ der Theile A, und das vierte eben die Zahl $n - m$ der Theile B enthalte. Es sind demnach die Glieder der beiden Verhältnisse $n + m.A : n - m.A$ und $n + m.B : n - m.B$ aus gleichen Theilen zusammen gesetzt, und die vorbergehenden Glieder derselben bestehen aus gleich vielen Theilen, wie auch die nachfolgenden. Demnach hat es mit der Gleichheit dieser Verhältnisse seine Richtigkeit VI, 35.

§. 94. Wir hätten auch diesen Satz auf eine allgemeinere Art ausdrucken können als wir gethan haben. Wir vermeiden dieses aber nach dem Exempel derjenigen, welche uns in diesen Wissenschaften vorgegangen sind, weil die Sätze von einem gar sehr weitläufigen Inbegriffe nicht allezeit so sehr an Nützbarkeit zunehmen, als schwer sie anzuwenden werden. Und wir erinnern dieses hier nur deswegen, damit unsere Leser nicht aufgehalten werden, wenn sie bey genauerer Ueberlegung finden, daß aus unseren Beweisen etwas allgemeineres flusse, als wir aus denselben hergeleitet. Man darf nemlich nicht eben BC der CD gleich annehmen, wenn nur $BC : CD = bc : cd$, und außer dem $AC : CD = ac, cd$, so ist auch $AD : AB = ad, ab$, das ist $AC + CD : AC - BC = ac + cd : ac - bc$.

§. 95. Will man aber diese Regel, nach welcher man aus $A : B = C : D$ schließt $A + B : A - B = C + D : C - D$ aus den bereits erwiesenen Regeln herleiten, so kan man also verfahren. Weil $A : B = C : D$, so ist $A + B : B = C + D : D$, VI, 80. und $A + B : 2B = C + D : 2D$, VI, 82. Nimmet man aber hier den Unterschied der Glieder der zwei Verhältnisse, und beziehet die vorhergehende Gleichheit auf denselben VI, 90. so erhält man $A + B : A + B - 2B = C + D : C + D - 2D$, das ist; $A + B : A - B = C + D : C - D$, und diese ist die Proportion, deren Richtigkeit wir erweisen sollten.

Die dritte Regel.

§. 96. Die dritte Proportionsregel, nach unserer Einrichtung, ist nicht schwerer einzusehen, als die zweyte, wenn wir dieselbe auf dasjenige gründen, so gleichfalls angemerkt worden, indem wir den allgemeinen Begriff der Proportion anzugeben bemühet gewesen: daß nemlich, wenn man die zweyten Glieder zweyer gleichen Verhältnisse in gleich viele gleiche Theile theilet, und diese Theile fort trägt, bis sie die ersten Glieder der Verhältnisse übertreffen, die äußerste Gränzen dieser ersten Glieder zwischen gleichnähmigte Theilungspuncte fallen müssen, und daß hinwiederum, wenn das letzte geschieht, auf die Gleichheit der Verhältnisse zu schließen sey VI, 57. Es sey die Verhältnisse $AC : AB$ der Verhältnisse $a c : ab$ gleich; man setze die ersten Glieder dieser Verhältnisse zusammen, und mache $AC + a c$, man setze auch die zweyten Glieder eben dieser Verhältnisse zusammen, und mache $AB + ab$. Die Verhältnisse der ersten Summe gegen die letzte $AC + a c : AB + ab$ wird der Verhältnisse $AC : AB$ oder der Verhältnisse $a c : ab$ gleich seyn. Dieses ist unsere dritte Regel, welche aber noch etwas zu erweitern seyn wird, und wieder verschiedene besondere Regeln unter sich begreiffet. Man siehet leicht, daß hier AC und $a c$, und folgendes auch AB und ab Größen von einerley Art seyn müssen, weil sie sich sonst nicht zusammen setzen lassen.

§. 97. Den Beweis derselben einzusehen, theile man die zweyten Glieder der gleichen Verhältnisse $AC : AB$, und $a c : ab$, nemlich AB und ab in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und wenn die ersten Glieder der AC , $a c$ grösser sind als die zweyten, wie in der 173 Figur, so trage man die Theilchen der AB , ab fort, bis man AD , ad erhalten, welche die AC , $a c$ unmittelbar übertreffen: so fallen die Puncte C , c

VI. zwischen solche Theilungspuncte der AD , ad , welche von A , a an um ~~Wohnst.~~ eine gleiche Zahl von Theilchen entfernt sind. In der 173 Figur fällt C , in das fünfte Theilchen der AD , und c in das fünfte Theilchen der ad und in der 174 Zeichnung liegt C so wol als c in dem dritten Theilchen, der AB oder ab , und dergleichen geschieht immer, man mag der AB und der ab so viele Theilchen geben als man will. Wenn dieses nicht wäre, so könnten die Verhältnisse $AC:AB$, und $ac:a$ einander nicht gleich seyn VI, 57. Nun setze man erstlich AB und ab zusammen, aber, um die Sache, welche wir erweisen sollen, einzusehen, verfare man in dieser Zusammensetzung auf eine besondere Art. Weil nemlich in AB so viele Theilchen sind als in ab , so setze man immer einen Theil der AB zu einem Theile der ab , und mache auf die Art wieder gleiche Theile, deren jedes die Summe ist eines Theilchens der AB und eines Theilchens der ab . Mit einem Worte, wenn die Zahl der Theilchen in AB und in ab durch m angedeutet wird, und folgendes $\frac{1}{m} AB$ ein Theilchen der AB , und $\frac{1}{m} ab$ ein Theilchen der ab bedeutet, so mache man $\frac{1}{m} AB + \frac{1}{m} ab$ zu einem der neuen Theilchen, und setze aus diesen Theilchen die Größe EF zusammen, welche demnach alle Theilchen der AB , zusamt allen Theilchen der ab , enthalten, und in so viele gleiche Theile abgetheilet seyn wird, als viele der Theile in AB und ab sind. Nun trage man die übrigen Theilchen der AD , ad aus F auf eben die Art weiter fort, bis man EH erhält, welche aus den erwähnten Gründen so groß seyn wird als $AD + ad$. Folgendes ist EH größer als $AC + ac$, und wenn man EG so groß machet als $AC + ac$, so siehet man, daß das Punct in unserer 173 Figur ebenfalls in das fünfte Theilchen der AH fällt, wie C in das fünfte Theilchen der AD , und c in das fünfte Theilchen der ad gefallen. Man siehet dieses aller mit geometrischen Augen, wenn man alles, was hier gesagt worden überleget, aber noch deutlicher, wenn man sich selbst die Mühe giebet, die Linien nach dieser Anweisung zu theilen und zusammen zu setzen, und alles genau erweget, was bey dieser Arbeit vorkommet. Man übersiehet zugleich alle Fälle und machet den unstreitigen Schluß, daß dieses bey einer jeden Zahl der Theile der AB und ab richtig eintreffen müsse, und daß demnach, wenn man $EF = AB + ab$ in so viele Theile theilet, als viele Theile man der AB oder der ab gegeben, und trägt diese Theile bis in H fort, bis nemlich EH größer wird als $EG = AC + ac$, das Punct G jederzeit zwischen die Theilungspuncte fallen müsse, welche denjenigen gleichnamig sind, zwischen welche C in AD , und

und c in ad fällt. Demnach ist die Verhältniß $EG : EF$, das ist VI. $AC + ac : AB + ab$ der Verhältniß $AC : AB$, oder der Verhältniß $ac : ab$ gleich, welches wir erweisen sollten.

S. 98. Wenn man diesem Beweise etwas nachdenket, so findet man bald, daß er sich auch vor die Subtraction schicke: wenigstens kan man dadurch auf die Gedanken kommen, daß wenn die Verhältniß $EG : EF$ der Verhältniß $AC : AB$ gleich ist, und man subtrahiret die kleineren Glieder dieser Verhältnisse von den größern, in der Ordnung in welcher sie stehen, und machet $EC - AC$, und $EF - AB$, die Verhältniß dieser Ueberbleibseln $EG - AC : EF - AB$ einer jeden der vorigen Verhältnisse $EG : EF$, und $AC : AB$ gleich seyn werde. Und so ist es auch, wie man finden wird, wenn man sich die Sache umständlich vorstellt.

S. 99. Denn man theile EF in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und gebe der AB eben so viele Theile. Man setze die Theilchen der EF , wenn es nöthig ist, fort, bis man EH bekommet, welche unmittelbar größer ist als EG , und eben dieses thue man auch bey AD ; so haben EH und AD eine gleiche Zahl von Theilen, VI. 57. und die Punkte G und C fallen zwischen gleichnamigte Theilungspuncte. Wäre dieses nicht, so könnte die Verhältniß $EG : EF$ der Verhältniß $AC : AB$ ohnmöglich gleich seyn. Nun subtrahire man einen jeden Theil der AB von einem jeden Theile der EF , welcher ihm nach der Ordnung zugesetzt worden, den ersten von dem ersten, den zweyten von dem zweyten, und so fort, und aus den gleichen Ueberbleibseln setze man die Größe ab zusammen, welche demnach so viele gleiche Theile haben wird, als EF oder AB . Eben diese Größe ab aber wird auch der Unterschied seyn der beyden Größen EF und AB , weil sie entstanden ist, indem man alle Theile der kleinern von allen Theilen der größern abgezogen. Man fahre in dieser Arbeit weiter fort, (wenn nemlich wie in der 173 Figur EG größer ist als EF , sonst hat man dieses nicht nöthig) und mache auf eben die Art $ad = EH - AD$, und $ac = EG - AC$, so siehet man wieder, daß a d so viele Theile bekommet als deren in EH oder AD anzutreffen, und daß c zwischen diejenigen Theilungspuncte fällt, welche von a um so viele Theilchen entfernt sind, als viele der Theilchen sind, um welche die Theilungspuncte zwischen welchen G lieget von E , oder die Theilungspuncte, zwischen welchen C lieget, von A entfernt sind. Demnach ist die Verhältniß $ac : ab$ der Verhältniß $AC : AB$, oder der Verhältniß $EG : EF$ gleich.

VI. Und da nun $ac = EG - AC$, und $ab = EF - AB$, so ist allezeit die
 Verhältniß $EG - AC : EF - AB$ der Verhältniß $EG : EF$ oder $AC : AB$ gleich, wenn die erste dieser Verhältnisse $EG : EF$ der zweiten $AC : AB$, gleich ist.

S. 100. Man siehet leicht, daß diese Beweise, wie sie da stehen, ohne überflüssige Weitläufigkeit, auch auf die Verhältniß solcher Größen angewendet werden können, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind. In diesem Falle können die Punkte C und D, c und d, wie auch G und H zusammen fallen, das übrige aber bleibet einerley. Will man sich etwas anders ausdrücken, so kan man den Beweis von der gleichen Größen auch folgender gestalt fassen. Die Verhältniß $nA : mA$ ist der Verhältniß $nB : mB$ gleich, und alle gleiche Verhältnisse solcher Größen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, lassen sich dergestalt ausdrücken. Man setze die ersteren wie auch die letzteren Glieder dieser Verhältnisse zusammen, und mache $nA + nB$, wie auch $mA + mB$. So siehet man daß $nA + nB$ so viel sey als $n.A + B$, und heraus komme, wenn man die Summe der Theile $A + B$ durch die Zahl n multipliciret. Und eben so ist $mA + mB = m.A + B$. Stellet man sich nun die Verhältniß $n.A + B : m.A + B$ vor, so siehet man ferner, daß dieselbe der Verhältniß $nA : mA$ oder $nB : mB$ gleich sey, weil in allen diesen Verhältnissen einerley Gröſſe A oder B, oder $A + B$ durch die Zahl n multipliciret worden, um das erste Glied zu erhalten, und durch m , wodurch das zweyte Glied heraus gekommen. VI, 35. Eben so siehet man, daß die Verhältniß $nA - nB : mA - mB$, das ist $n.A - B : m.A - B$ von der Verhältniß $nA : mA$, oder $nB : mB$ nicht verschieden sey.

S. 101. Zum Exempel: die Verhältniß $9 : 3$ ist der Verhältniß $6 : 2$ gleich. Addiret man die Glieder dieser Verhältnisse in der Ordnung, so kommet die Verhältniß $15 : 5$, von welcher leicht zu sehen ist, daß sie jeder der vorigen gleich sey; weil in allen diesen Verhältnissen das erste Glied dreymal so groß ist als das zweyte. Subtrahiret man aber die kleinern Glieder von den größern; so kommt die Verhältniß $3 : 1$, welche ebenfalls der gegebenen gleich ist.

S. 102. Also verändert weder die Addition der Glieder gleicher Verhältnisse, noch die Subtraction derselben, die Verhältniß. Es ist dieses genugsam erwiesen, wenn man nur zwö gleiche Verhältnisse annimmt. Daß es aber auch mit so vielen gleichen Verhältnissen angehe,

gehe, als man annehmen wil, siehet man daraus, weil, wenn die Verhältniß nicht verändert wird, wenn man die Glieder zweier gleicher Verhältnisse dergestalt zusammen setzet, sie auch nicht verändert werden kan, wenn man die Glieder der dritten Verhältniß, welche dem vorigen gleich ist, zu der Summe der Glieder setzet, welche dergestalt heraus gebracht worden sind: Eben dieses ist auch zu sagen, wenn man sich an statt der Addition der Subtraction bedienet. Die Sache wird am deutlichsten, wenn wir sie durch Zahlen erläutern. Es sey $6:3=4:2=8:4=14:7$. Setzet man die Glieder der ersten zwei gleichen Verhältnisse $6:3$ und $4:2$ zusammen, so kommet die Verhältniß $10:5$, welche von der ersten oder von der zweiten, und folgendes auch von der dritten $8:4$ nicht verschieden ist. Und wenn man demnach die Glieder dieser dritten Verhältniß $8:4$ von den Gliedern der Verhältniß $10:5$, welche wir dergestalt heraus gebracht haben, abziehet, so kommet die Verhältniß $2:1$, welche noch der vorigen, und folgendes auch der vierten Verhältniß $14:7$ gleich ist, deren Glieder sich demnach wieder zu den Gliedern dieser letzten Verhältniß addiren, oder von denselben subtrahiren lassen, ohne daß in der Verhältniß etwas geändert werde, und es sind demnach die Verhältnisse $16:8$ und $12:6$ noch mit einer jeden der gegebenen einerley.

§. 103. Eben so ist es auch, wenn man setzet, $A:a=B:b=C:c=D:d$, und machet $A+B+C+D:a+b+c+d$, oder $A-B+C-D:a-b+c-d$, oder verknüpfet sonst die ersten Glieder A, B, C, D mit den Zeichen $+$ und $-$ wie man wil, und giebet den letztern Gliedern eben dieser Verhältnisse a, b, c, d , welche zu den erstern gehören, eben die Zeichen. Es ist allezeit $A+B+C+D:a+b+c+d=A+B-C-D:a+b-c-d=A-B+C+D:a-b+c+d=A:a=B:b$, und so fort.

§. 104. Hieraus ist zu schließen, daß, wenn man setzet, $A:a=A:a$, und so ferner, so oft als man wil, die Verhältniß $A+A:a+a$, oder $A+A+A:a+a+a$, das ist, $2A:2a$, oder $3A:3a$, oder $4A:4a$, und so überhaupt $nA:na$ von der Verhältniß $A:a$ nicht verschieden seyn werde. Es sind hier die Glieder der Verhältniß $A:a$ durch einerley ganze Zahl n multipliciret worden, und man kan demnach sagen, daß wenn man zwei Größen A und a durch einerley ganzen Zahl n multipliciret, die Verhältniß der multiplicirten Größen $nA:na$ mit der Verhältniß der Größen selbst $A:a$ einerley seyn werde. So ist bey Zahlen die Verhältniß $3:2$ der Verhältniß $4 \times 3:4 \times 2$

oder

VI. oder 12:8 gleich. Wir haben dieses bereits bey der Multiplication
 Abschnitt. gesehen, I, 101. denn wir haben gezeigt, daß 3 aus 2 eben so entstehe,
 wie das Product 3×4 oder 4×3 aus dem Producte 2×4 oder 4×2
 entstehet.

§. 105. Hieraus aber schließet man ferner, daß auch die Division
 zweier Gröſſen A, B durch einerley ganze Zahl m die Verhältniß nicht
 ändern könne, sondern daß die Verhältniß A:B der Verhältniß
 $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B$ gleich sey, was auch m vor eine ganze Zahl bedeutet. Denn
 man nehme die Verhältniß $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B$ zuerst an, und multiplicire beyde
 Glieder derselben durch die Zahl m . Wir wissen schon, daß dadurch
 die Verhältniß nicht geändert werde, es kommt aber durch diese
 Multiplication nichts anders als A und B. Denn weil in $\frac{1}{m}A$ die
 Gröſſe A in Theilchen getheilet ist, deren Zahl m vorstellet, so kom-
 met das ganze A wiederum, wenn man ein solches Theilchen so oft
 nimmt, als oft die Einheit in der Zahl m enthalten ist, das ist, wenn
 man $\frac{1}{m}A$ durch m multipliciret. Eben so ist es mit $\frac{1}{m}B$. Demnach ist
 $\frac{1}{m}A : \frac{1}{m}B = A : B$. Als 3:2=6:4, da die erstern Zahlen kommen,
 wenn man die letztern durch 2 theilet. Dieses ist schon oben VI, 48.
 berührt worden, als wir gewiesen, wie man eine Verhältniß, die in
 Zahlen gegeben ist, durch die kleinste Zahlen ausdrucken sol, welche
 dieselbe ausdrucken können.

§. 106. Und hieraus folget weiter, daß auch die Verhältniß $\frac{m}{1}A :$
 $\frac{m}{1}B$ der Verhältniß A:B gleich seyn müsse. Denn es wird $\frac{m}{1}A$ aus
 A , wenn man A durch die Zahl m multipliciret, und das Product
 durch m dividiret; und eben so wird $\frac{m}{1}B$ aus B. Da nun aber we-
 der die Multiplication noch die Division der Gröſſen A, B durch einer-
 ley Zahl die Verhältniß A:B ändert, so muß auch diese Verhältniß
 ungeändert bleiben, wenn man diese Gröſſen A, B beyde erstlich durch
 m multipliciret, und so dann das Product durch m dividiret. So ist
 es bey den Zahlen $\frac{7}{1}12$ ist = 8, und $\frac{7}{1}9$ ist = 6, und 12 verhält sich zu 9,
 wie 8 zu 6. Der Name der einen dieser Verhältnisse so wohl als der
 andern ist $\frac{7}{1}$.

Die

Die vierte Regel.

VI.
Abschnitt.

§. 107. Aus diesem letzten Satze schließen wir nun die vierte Proportionsregel, welche ist, daß bey einer jeden Proportion man die zwey mittlern Glieder vertauschen könne, das zweyte in die Stelle des dritten, und das dritte in die Stelle des zweyten, ohne die Proportion aufzuheben. Wenn die Proportion $A:B = C:D$ richtig ist, so ist auch allezeit diese Proportion richtig, $A:C = B:D$. Man siehet leicht, daß hier zum Grunde geleyet werde, die Größen A und C seyn von einerley Art. Wäre dieses nicht, so hätten sie gar keine Verhältniß gegen einander, VI, 23. und man könnte also nicht im rechten und eigentlichen Verstande sagen, es verhalte sich A zur C, wie B zur D. Sind aber die Größen A und C von einerley Art, so sind alle vier Größen A, B, C, D von einerley Art. Denn A und B, wie auch C und D sind gewiß von einerley Art.

§. 108. Die Richtigkeit aber des Satzes erhellet folgender gestalt.

Es sey $A:B = C:D$, so ist auch $A:C = B:D$, wie wir letzters VI, 106. gesehen haben. Nun haben wir oben angemerket, daß wenn das erste Glied einer Proportion größer ist als das dritte, auch das zweyte größer sey als das vierte, und daß wenn das erste Glied dem dritten gleich ist, auch das zweyte dem vierten gleich sey, und wenn das erste Glied kleiner ist als das dritte, auch das zweyte kleiner sey als das vierte. VI, 27. Und wenn demnach in dem gegenwärtigen Falle

$A > C$, so ist auch $B > D$. Denn dieses bedeutet nichts anders als was wir eben mit Worten ausgedrucket. VI, 70. Wir haben aber auch VI, 61. gesehen, daß aus demjenigen, so wir eben durch Zeichen ausgedrucket, fließe, daß die Proportion $A:C = B:D$ richtig sey. Wenn man nemlich einen beliebigen Bruch $\frac{m}{n}$

der Größen C und D annehmen kan, und $\frac{m}{n}C$ ist größer als A, wenn $\frac{m}{n}D$ größer ist als B, oder $\frac{m}{n}C$ ist so groß als A, wenn $\frac{m}{n}D$ so groß ist als B, oder $\frac{m}{n}C$ ist kleiner als A, wenn $\frac{m}{n}D$ kleiner ist als B, so sind allezeit die Verhältnisse $A:C$ und $B:D$ einander gleich, und die Pro-

Abb

por

VI. **Abchnitt.** portion $A : C = B : D$ hat ihre Richtigkeit. Und es muß demnach diese Versetzung der mittleren Glieder, durch welche aus der Proportion $A : B = C : D$ diese andere $A : C = B : D$ heraus gebracht wird, überall statt haben.

§. 109. Bey Zahlen und solchen Größen die aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, ist die Sache noch leichter einzusehen. Wie wir öfters gesehen, so kan $nA : mA = nB : mB$ eine jede solche Proportion ausdrücken. Versetzt man aber die mittleren Glieder, so kommet man $nA : nB$ und $mA : mB$, da man denn leicht siehet, daß diese Verhältnisse gleich seyn. Denn die Verhältniß $nA : nB$ so wohl als die Verhältniß $mA : mB$ ist der Verhältniß $A : B$ gleich, wie ohne viele Worte sichtlich ist. VI, 104. Man hat $5 : 7 = 10 : 14$, also ist nach der Regel $5 : 10 = 7 : 14$, man siehet aber die Richtigkeit dieser Proportion auch vor sich ein.

§. 110. Dieses ist das meiste so wir von den Proportionen zum voraus setzen mußten, ehe wir in unsern Geometrischen Betrachtungen weiter gehen konten. Es ist noch etwas von der Zusammensetzung der Verhältnisse übrig, welches wir aber an einen anderen Ort versparen wollen, da wir es unmittelbar brauchen werden. Wir hoffen daß es so dann leichter werde einzusehen seyn, wenn man sich das gegenwärtig abgehandelte erst durch die Anwendung desselben recht wird bekant gemacht haben. Wir wollen nur noch, ehe wir uns wieder zur Geometrie wenden, die Aufgaben welche bey Proportionalzahlen vorkommen, auflösen. Der Grund dieser Auflösungen ist nachfolgender.

Zu zwey oder drey Proportionalzahlen, die dritte oder vierte zu finden.

§. 111. Alle Zahlen welche einerley Verhältniß gegen einander haben, lassen sich folgender gestalt ausdrücken, $nA : A = nB : B$ und diese Zeichnung kan eine jede Proportion, die in Zahlen gegeben ist, bedeuten, es mögen die Zahlen ganz oder gebrochen seyn, nur muß es frey seyn, sich unter n eine ganze oder gebrochene Zahl vorzustellen. Denn es ist n der Name so wohl der ersten Verhältniß $nA : A$, als auch der zweyten $nB : B$, weil in beyden Verhältnissen die ersten Glieder nA , nB durch die Multiplication der zweyten in die Zahl n entstanden sind. VI, 33. Man nehme also $nA : A = nB : B$ vor eine jede dergleichen Proportion an, und stelle sich vor, daß man die äußeren Glieder

Glieder derselben so wohl als die mittleren in einander multipliciren VI. Abschnitte.
 wolle, um zu sehen was dadurch vor Producte kommen. Man multiplicire erstlich das erste Glied n . A durch das vierte B. Da das erste Glied ein Product ist aus dem Namen der Verhältniß n und aus A, so wird das Product aus dem ersten und letzten Gliede $n \cdot A \cdot B$ aus dem Namen der Verhältniß aus A und aus B bestehen, oder diese drey Zahlen werden durch ihre Multiplication das erwähnte Product der äusseren Glieder der Proportion heraus bringen. Man multiplicire auch das zweyte Glied in das dritte, und mache $n \cdot B \cdot A$, so siehet man, daß dieses Product zu erhalten, ebenfalls das Product $B \cdot A$ durch den Namen der Verhältniß n müsse multipliciret werden wie vorher. Und da also beyde Producte durch die Multiplication des Namens der Verhältniß n in das Product $A \cdot B$ entstehen, so kan man nicht anders schliessen, als daß das Product aus den äusseren Gliedern einer Proportion, dem Producte der mittleren gleich sey. Es sey die Proportion in Zahlen $5:2=10:4$, so ist das Product der äusseren Glieder $5 \times 4=20$, und eben so viel beträgt auch das Product der mittleren 2×10 . Eben so ist es auch bey dieser Proportion $7:5=3:2\frac{1}{2}$. Das Product der mittleren Glieder 3×5 ist $=15$, und das Product der äusseren ist $14\frac{1}{2}=15$. Der Name der Verhältniß ist hier $\frac{1}{2}$, und also ist das erste Glied 7×5 , und das dritte $7 \times 2\frac{1}{2}$, das ist $7 \times \frac{5}{2}$. Und die Proportion stehet so: $7 \times 5:5=7 \times \frac{5}{2}:\frac{5}{2}$. Dem-

nach ist das Product der äusseren Glieder $7 \times 5 \times \frac{5}{2}$, das ist $\frac{7 \times 5 \times 15}{7 \times 5}$, und das Product der mittleren Glieder ist $5 \times 7 \times \frac{5}{2}$, das ist wieder $\frac{7 \times 5 \times 15}{7 \times 5}$, das eine so wohl als das andere glebet 15.

§. 112. Gehet die Proportion in einem fort, und ist also das zweyte Glied derselben dem dritten gleich, VI, 55. so wird das Product der mittlern Glieder eine Quadratzahl. Das übrige bleibet; das Product der äussern Glieder ist dem Product der mittleren auch hier gleich, und folgendes ist dasselbe ebenfalls eine Quadratzahl. Zum Exempel bey der Proportion, welche die erwähnte Beschaffenheit hat $5:7=7:9\frac{1}{2}$ ist das Product der mittlern Glieder die Quadratzahl 49, und eben so groß ist auch das Product der äussern $45\frac{1}{2}=49$.

§. 113. Wenn nun aufgegeben wird, zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte zu finden, welche die Proportion voll machet, dergestalt, daß

VI. man sagen kan, wie die erste der gegebenen Zahlen zu der zweiten, so die dritte zu derjenigen, welche gefunden werden sol: so kan man ohne sonderliche Schwierigkeit aus denjenigen, so eben gezeigt worden, die Weise dieses zu verrichten, herleiten. Man kan sich vorstellen, daß die drey Zahlen, welche gegeben sind durch „A, A, „B ausgedrucket werden, und die vierte welche gesucht wird durch B. Denn da alle Proportionen in Zahlen sich dergestalt ausdrucken lassen, so kan diejenige deren drey erste Glieder gegeben sind und deren viertes Glied gesucht wird, hievon nicht ausgenommen seyn. Also ist bloß zu untersuchen wie in der Proportion „A : A = „B : B. aus den drey erstern Gliedern das vierte könne gefunden werden. Man siehet aber dazu verschiedene Regeln aus dieser Bezeichnung ein, welche alle in der Anwendung auf eines hinaus kommen. Aus den zwey ersten Gliedern „A, A findet man den Namen der Verhältniß „, wenn man das erste Glied „A durch das zweyte A dividiret. Mit dieser Zahl „ dividire man nun ferner das dritte Glied „B, so bekommet man das vierte, B. Als es seyn die drey Zahlen gegeben 8, 4, 12, zu welchen die vierte Proportionalzahl zu finden ist: so dividire ich 8 durch 4, der Quotient ist $2 = \text{„}$. Mit diesem „ dividire ich nun ferner die dritte gegebene Zahl 12, so ist der Quotient 6, und die Proportion ist richtig $8 : 4 = 12 : 6$.

S. 114. Diese Regel scheint von derjenigen, welche gemeinlich gegeben wird sehr verschieden zu seyn: sie kommt aber in der Anwendung mit derselben auf eins hinaus. Es seyn die Zahlen 5, 2, 7 gegeben, zu welchen die vierte Proportionalzahl zu finden ist. Nach der Regel ist die erste dieser Zahlen durch die zweyte zu dividiren. Der Quotient wird $\frac{1}{2}$, und auf die Art kan man sich denselben allezeit vorstellen. Nunmehr ist ferner mit diesem Quotienten die dritte Zahl 7 zu dividiren, und dadurch wird die vierte Proportionalzahl erhalten, welche man suchet. Wil man dieses thun so kan man nur die Glieder des Bruchs $\frac{1}{2}$ durch welchen die Zahl 7 dividiret werden sol, verkehret setzen, den Nenner an die Stelle des Zehlers, und den Zehler an die Stelle des Nenners, also $\frac{2}{1}$, und mit diesem Bruche die Zahl

7 multipliciren. II, 43. Das Product $\frac{2 \times 7}{1}$ welches auf die Art erhalten wird, ist der gesuchte Quotient, und folgender die gesuchte vierte Proportionalzahl, und so kan man allezeit verfahren. Gleich-

wie die vierte Proportionalzahl zu den dreyen 5, 2, 7 ist $= \frac{2 \times 7}{5}$ so ist

über-

Überhaupt, wenn man sich drey gegebene Zahlen unter den Buchstaben A, B, C, vorstellt, die vierte, welche die Proportion voll macht, VI.

der, $= \frac{B \times C}{A}$ oder bey einer jeden Proportion $A : B = C : D$ ist $D = \frac{B \times C}{A}$.

S. 115. Und es wird demnach die vierte Proportionalzahl auch aus den drey ersten heraus gebracht, wenn man die zwei mittlern, die zwote nemlich B und die dritte C, in einander multipliciret, und das Product derselben $B \times C$ durch die erste Zahl A dividiret. Dieses ist die gemeine Regel, deren Richtigkeit man auch anders einsehen kan.

S. 116. Es seyn die Zahlen 5, 2, 7 nochmals gegeben, und zu denselben die vierte Proportionalzahl zu finden. Wir wollen diese Zahl z nennen, welche also von der Größe seyn muß, daß dieser Ausdruck $5 : 2 = 7 : z$ der Wahrheit gemäß sey. Ist aber dieses, so muß auch das Product der äusseren zwey Glieder 5 und 7, dem Producte der mittlern 2 und 7 gleich seyn. Das ist $2 \times 7 = 5 \times z$. VI, III. Man hat also, nicht zwar die gesuchte Zahl z ins besondere, sondern ein Product welches aus derselben entstanden ist, indem sie durch eine bekante Zahl multipliciret worden; und man weiß in dem vorgelegten Beispiele, daß 2×7 oder 14 so groß sey als die annoch unbekante Zahl z fünfmal genommen. Ist es nun schwer die Zahl z zu finden; da man weiß wie viel sie fünfmal genommen beträgt? Man siehet leicht, daß dieses zu erhalten, man bloß $5 \times z$ oder 14 durch 5 dividiren dürfe.

Dadurch wird $z = \frac{2 \times 7}{5}$; das ist $\frac{14}{5}$ wie vorher. Und so ist es allezeit. Wenn zu den drey Zahlen A, B und C die vierte D zu finden, welche die Proportion $A : B = C : D$ voll mache, so sind die Producte $A \times D = B \times C$ notwendig gleich, und es ist also das Product $A \times D$ bekant, denn $B \times C$ ist bekant, weil die Zahlen B und C bekant sind, und aus denselben das Product leicht zu machen ist. Ueber dieses aber ist auch der eine Factor A des Products $A \times D$ bekant. Wenn aber bey einem bekanten Producte $A \times D = B \times C$, ein Factor A bekant ist, so findet man den andern Factor D leicht, wenn man das Product durch den bekanten Factor A dividiret, dadurch kommet der andere Factor D, und wird der Quotient. Und demnach ist $D = \frac{B \times C}{A}$.

S. 117. Es bedeutet also $\frac{B \times C}{A}$ allezeit die vierte Proportionalzahl zu den
B b b 2 dem

VI. den dreyen A, B und C, und man kan, wie auch gemeiniglich geschle-
 Abschnitt. het, eben so eine jede vierte Proportionalgröße zu drey gegebenen Größen
 A, B und C bezeichnen, ob zwar diese Größen keine Zahlen sind. Es
 seyen A, B und C Linien, so ist zwar wahr, daß man nicht eigentlich sa-
 gen kan, man müsse die Linie B durch die Linie C multipliciren, und
 durch die Linie A dividiren, um eine neue Linie $\frac{B \times C}{A} = D$ zu erhal-

ten, welche mit den drey ersteren die Proportion $A:B=C:D$ voll ma-
 chen wird; wenigstens können wir bey diesen Redensarten keinen rech-
 ten Verstand haben, da wir sie bloß in arithmetischem Verstande ge-
 brauchen, ob sie sich zwar dergestalt erklären lassen, daß sie nichts wi-
 derständliches enthalten. Allein dieses hindert nicht, daß wir nicht die
 vierte Proportionallinie zu A, B und C mit $\frac{B \times C}{A}$ bezeichnen solten.

Denn dergleichen Zeichen sind eigentlich ganz willkürlich; man thut
 aber allezeit wohl, wenn man so viel möglich eine vollkommene Ueber-
 einstimmung bey denselben beobachtet.

§. 118. Es wird aber durch diese Regel nicht nur diejenige vierte
 Proportionalzahl zu drey gegebenen gefunden, welche wirklich in der
 Ordnung die vierte ist: sondern man kan nach derselben überhaupt
 aus jeden drey Zahlen einer Proportion, der ersten zum Exempel, der
 dritten und der vierten, die noch übrige finden, welche hier die zwote ist.
 Denn man kan die Glieder der Proportion allezeit so versetzen, daß die
 gesuchte Zahl die vierte werde. Man stelle sich die Proportion vor
 $5:z=3:4$. Die zwote Zahl an deren Stelle z stehet, ist unbekant,
 und sol gefunden werden. Man setze $3:4=5:z$, und mache nach der

Regel $z = \frac{4 \times 5}{3} = 6\frac{2}{3}$, so ist $5:6\frac{2}{3}=3:4$. Man nehme eine andere
 Proportion, $z:3=7:4$ bey welcher die erste Zahl unbekant ist, und ge-
 funden werden sol: so kan man wieder versetzen $4:7=3:z$, wodurch
 die gesuchte Zahl z in der Ordnung die vierte wird, und demnach
 wird $z = \frac{7 \times 3}{4} = 5\frac{1}{4}$, und die Proportion $5\frac{1}{4}:3=7:4$ ist voll und
 richtig. Es sey drittens $3:5=z:2$, so versetze man die Glieder der

Verhältniß wieder, und mache $5:3=2:z$, so ist $z = \frac{3 \times 2}{5} = 1\frac{2}{5}$, und
 demnach $3:5=1\frac{2}{5}:2$.

§. 119. Auf eben diese Art wird auch zu zwei gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl gefunden, wenn nemlich die Proportion in einem fort gehet und stetig oder zusammenhangend ist. Man siehet dieses leicht. Es sey $2:5=5:z$, so hat man, die z zu finden, bloß wie sonst überall, die zweite Zahl in die dritte zu multipliciren. Das Product wird hier eine Quadratzahl, welches aber in dem übrigen nichts an-

dert. Demnach bedeutet $\frac{B \times B}{A} = C$ nichts anders, als daß C die dritte Proportionalzahl zu den zweien A und B sey, und daß die Proportion $A:B=B:C$ ihre Richtigkeit habe. Eben diese Zeichnung kan die dritte Proportionallinie zu zwei Linien A und B , und überhaupt eine jede Grösse C bedeuten, welche mit den zwei A und B die Proportion $A:B=B:C$ voll macht.

§. 120. Die Weise aber aus den zwey äusseren Gliedern einer solchen Proportion A und C das mittlere Glied B zu finden, stellet man sich folgender gestalt vor. Wenn man die äussern Glieder A und C in einander multipliciret, so wird das Product $A \times C$ die Quadratzahl des mittleren Gliedes B , VI, 112. und also ist B die Quadratwurzel dieses Products, und man hat also, wenn man das mittlere Glied aus den äusseren finden wil, nur diese äusseren Glieder in einander zu multipliciren, und aus ihrem Product $A \times C$ die Quadratwurzel zu ziehen. Diese ist das mittlere Glied B . Zum Exempel, man stellet sich die Proportion $3:z=z:27$ vor, und z sey zu finden, so mache man $3 \times 27 = 81$, und nehme die Quadratwurzel von 81, dieses ist 9 und $=z$. Demnach ist die Proportion welche man ergänzen sollte: $3:9=9:27$.

§. 121. Man siehet nach einer kleinen Ueberlegung, daß man nicht immer das mittlere Glied genau werde schaffen können, weil nicht eine jede Zahl eine Quadratwurzel hat, welche ausgesprochen werden könnte. III, 40. In diesem Falle muß man sich begnügen, daß man sich der mittleren Proportionalzahl so viel als nöthig ist, nähere, welches eben so geschieht, wie man einer unaussprechlichen Quadratwurzel nach und nach näher kommet. III, 50. Es sey zwischen den Zahlen 2 und 10 die mittlere Proportionalzahl zu setzen, so ist das Product dieser Zahlen 20. Die Wurzel von 20 fänget sich an mit 4, 47, und eben diese Zahl ist auch der mittlern Proportionalzahl zwischen 2 und 10 ziemlich nahe.

Sie:

Siebender Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

Die Gründe dieser Lehre.

§. 1.

F. 175.

San sagt, daß zwei Figuren einander ähnlich sind, wenn die Winkel derselben einander gleich sind wie sie in der Ordnung auf einander folgen, und die Seiten, welche die gleiche Winkel dergestalt einschließen, daß sie auch zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen, gegen einander einerley Verhältniß haben. Oder deutlicher, wenn in den beyden Vierecken ABCD, abcd, der Winkel A dem Winkel a gleich ist, und B dem b, C dem c, D dem d, und wenn über dieses sich AB zur AD so verhält, wie ab zur ad, und eben diese Gleichheit der Verhältniß bey allen übrigen Seiten vorkommet, welche die gleichen Winkel einschließen, so daß auch $AB:BC=ab:bc$, und $BC:CD=bc:cd$ und so ferner; so werden die Figuren einander ähnlich genannt.

§. 2. Dieses ist der gemeine Begriff von der Aehnlichkeit, wie man dieselbe bey körperlichen oder andern ausgedehnten Dingen antrifft; man wendet aber bey solchen Dingen den Begriff der Aehnlichkeit in dem allereigentlichsten Verstande an. Sollen zwey Portraits, deren eines, wenn man wil, groß, das andere klein gezeichnet ist, einander ähnlich seyn, so müssen alle Linien in beyden Gemälden auf einerley Art liegen, und einerley Verhältniß gegen einander haben. Sobald dieses ist, so sind die Gemälde einander ähnlich, und weiter wird zur Aehnlichkeit nichts erfordert. Man siehet aber, daß die gleichen Lagen der Linien in den Gemälden gleiche Winkel ausmachen, und ist also der Begriff, welchen man gemeinlich von der Aehnlichkeit hat, mit dem geometrischen vollkommen einerley.

§. 3. Man kan aber dasjenige, so wir von der Proportion der Seiten bey ähnlichen Figuren gesagt haben, auch so verstehen, daß sich

sich eine jede Seite der ersteren Figur, zu der Seite der zweiten, welche in dieser Figur zwischen Winkeln liegt, die denjenigen gleich sind, zwischen welchen die erstere Seite liegt, verhalte, wie eine jede andere dergleichen Seite der ersten Figur zu einer dergleichen Seite der andern. Denn dieses fließet aus dem ersteren, und aus diesem fließet wieder das erstere. Setzet man $AD:AB=ad:ab$, und

$$AB:BC=ab:bc, \text{ wie auch}$$

$$BC:CD=bc:cd, \text{ und}$$

$$CD:DA=cd:da, \text{ so erhält man, wenn}$$

man die Glieder dieser Verhältnisse wechselt, wie allezeit geschehen kan, VI, 103.

$$AD:ad=AB:ab, \text{ und}$$

$$AB:ab=BC:bc, \text{ wie auch}$$

$$BC:bc=CD:cd, \text{ und}$$

$$CD:cd=AD:ad, \text{ und man sieht, daß}$$

diese Verhältnisse alle einander gleich sind. Denn die erste $AD:ad$ ist gleich der zweiten $AB:ab$, und diese ist gleich der dritten $BC:bc$, und so fort. Man sieht aber auch, daß wenn man diese letztere Proportionen als richtig angenommen hätte, man aus denselben leicht und durch die bloße Verwechslung, die erstere hätte heraus bringen können.

§. 4. Und hieraus folgt ferner, daß in allen ähnlichen Figuren sich die ganzen Umkreise gegen einander verhalten, wie sich jede zwei Seiten derselben die zwischen gleichen Winkeln liegen gegen einander verhalten, und daß demnach in den zwei Figuren, deren wir uns hier bedienen, welche einander ähnlich zu seyn gesetzt werden, sich der Umkreis $ABCD A$ zu dem Umkreise $abcd a$ verhalte, wie AB zur ab , oder wie $BC:bc$. Denn wir haben eben gesehen, daß die Verhältnisse

$$AB:ab$$

$$BC:bc$$

$$CD:cd$$

$DA:da$ einerley seyn. Wenn man nun die Summe aller ersteren und aller letzteren Glieder derselben machet, so wird die Verhältniß dadurch nicht geändert, VI, 103. sondern diese Summen verhalten sich gegen einander eben so, wie sich jede zwei Linien, die einander entgegen stehen, gegen einander verhalten, das ist, die erste Summe verhält sich zu der zweiten wie $AB:ab$, oder wie $BC:bc$ und so ferner. Nun ist die erste Summe $AB+BC+CD+DA$ nichts anders als der Umkreis $ABCD A$, und die zweite Summe $ab+bc+cd$

Ecc

+ da

VII. **Abschnitt.** + da ist der Umkreis der zwoten Figur $abcd a$. Derohalben verhält sich der Umkreis $ABCD A$ zu dem Umkreise $abcd a$, wie $AB:ab$, oder wie BC zur bc , und so fort. Eben dieses ist auch von solchen Theilen der Umkreise richtig, welche sich in den beyden Figuren mit den Spitzen gleicher Winkel anfangen und endigen: wie man leicht siehet.

S. 5. Es sind alle reguläre Figuren einander ähnlich, die einerley Zahl der Seiten haben. Das ist, ein jedes gleichseitiges Dreyeck ist einem jeden andern gleichseitigen Dreyecke ähnlich; ein jedes Quadrat einem jeden andern Quadrate, ein jedes reguläres Fünfeck einem jeden andern regulären Fünfecke, und so fort. Wir wollen, um dieses vollkommen einzusehen, uns zwey Quadrate vorstellen, und dieselbe etwas genauer erwegen, wodurch das übrige alles deutlich werden wird. Es ist ein jeder Winkel des einen Quadrats einem jeden des andern gleich, denn die Winkel der Quadrate sind alle gerade. Und wie sich zwey Seiten gegen einander verhalten, die einen Winkel in einem Quadrate einschließen, so verhalten sich auch zwey Seiten gegen einander, die den Winkel des andern Quadrats einschließen. Denn diese letzteren Seiten sind einander so wohl gleich als die ersteren. Derowegen sind jede zwey Quadrate einander ähnlich. Man kan aber dergleichen Schlüsse bey allen regulären Figuren anbringen. Es sind zwar die Winkel derselben nicht gerade, aber sie sind doch einander allezeit gleich, in was Ordnung man sie auch nehmen wil, und die Seiten welche einen Winkel in einer dieser Figur einschließen, sind den Seiten, welche einem Winkel in einer andern regulären Figur, die eben so viele Winkel hat als jene, proportional, weil jene so wohl als diese einander gleich sind.

S. 6. Dieses ist es so wie uns gleich Anfangs überhaupt von allen ähnlichen Figuren vorstellen können, da wir kein anderes Kennzeichen der Aehnlichkeit hatten, als die Gleichheit aller Winkel der Figuren, und die gleiche Verhältniß aller Seiten, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen. Wenn man die Figuren ins besondere betrachtet, so kan man auch aus wenigern dieser Gründe die Aehnlichkeit schließen, weil einige derselben in den andern liegen, und sobald zum Exempel die Gleichheit der Winkel statt hat, die gleiche Verhältniß der Seiten nothwendig da ist. Wir haben nunmehr zu betrachten, auf was Art und Weise diese Dinge von einander bey den Figuren abhängen. Wir fangen billig wieder von den einfachsten Figuren, das

das ist, von den Dreyecken an: aus demjenigen so von diesen etwiesen VII.
werden kan, folget das Uebrige alles.

Abchnitt

S. 7. Ehe wir uns aber zu denselben wenden, müssen wir vor allen Dingen, um ein Kennzeichen bekümmert seyn, aus welchem wir die gleiche Verhältniß der geraden Linien schliessen können, welches sich unmittelbar anwenden läset, und dieses lieget im folgenden allgemeinen Satz. Wenn man in der geraden Linie AB das Punct C nach Belieben annimmt, und ziehet durch die Puncte A, B und C die geraden Linien AD, CE und BF einander parallel, welche sich gegen die AB neigen können wie man wil, und mit derselben Winkel von beliebiger Grösse einschliessen, und man ziehet so dann von einer der äussersten dieser Parallellinien AD an die andere BF die gerade Linie ab ebenfalls nach Belieben, welche von der CE in c geschnitten wird, so wird die Verhältniß AC:AB der Verhältniß ac:ab gleich seyn, und die Proportion $AC:AB = ac:ab$ wird ihre Richtigkeit haben.

F. 176.

177.

178.

179.

S. 8. Dieser Satz wird gar leicht eingesehen. Man theile AB in eine beliebige Zahl gleicher Theile, und bezeichne die Theilungspuncte mit G, H, I, K, durch alle diese Theilungspuncte ziehe man gerade Linien mit der AD parallel, welche folgendes auch der CE und der BF parallel lauffen, und weder einander noch eine von den Linien CE, BF jemals schneiden werden. IV, 191. Es theilen aber eben diese Parallellinien auch die Linie ab in gleiche Theile in den Puncten g, h, i, k, wie wir in der Abhandlung von den Parallellinien IV, 196. gezeigt haben, und demnach ist ab in so viele gleiche Theile getheilet, als viele gleiche Theile man der A B gegeben hat. Es fällt aber auch das Punct c in der ab zwischen die Theilungspuncte h, i, welche den Theilungspuncten H, I in der Linie AB in der Ordnung gegen über stehen, und das Theilchen h i ist von dem Puncte a um so viele Theilchen der a b entfernt, als viele der Theilchen der AB sind, um welche das Theilchen HI, in welches C fällt, von A entfernt ist. Wäre dieses nicht, so müßten die Parallellinien, welche wir gezogen, einander irgendwo kreuzen, damit das Punct c über h hinauf oder unter i herunter käme, indem C zwischen H, I liegen bleibt, welches ohnmöglich ist. Man siehet also, daß den Linien AC, AB und ac, ab das Kennzeichen zukommet, woraus die Gleichheit der Verhältnisse allezeit geschlossen werden kan. VI, 60. Denn daß dasjenige, so wir von einer Theilung der AB gezeigt, richtig sey, man mag AB in so viele gleiche Theile theilen als man wil, erhellet aus dem Beweise, welchen wir gegeben haben, so gleich. Derselbe ist nicht

Ecc 2

auf

VII. auf eine gewisse Zahl von Theilen eingeschränket, sondern gilt von jedem Theil der A B.

§. 9. Aus eben dem Beweise siehet man auch, daß die nachstehende Proportionen:

$$AB:AC=ab:ac,$$

$$AC:CB=ac:cb,$$

$$CB:AB=cb:ab$$

alle richtig sind, wie wohl dieselben auch aus dem vorigen durch die Proportionsregeln leicht hergeleitet werden können. Denn ist $AC:AB=ac:ab$, so ist auch umgekehret VI, 72. $AB:AC=ab:ac$. Aus dieser Proportion, $AB:AC=ab:ac$ fließet, VI, 89. $AB-AC:AC=ab-ac:ac$, das ist $CB:AC=cb:ac$, welche, wenn man sie verkehrt setzt, die Proportion $AC:CB=ac:cb$ giebet. Eben die Proportion $AB:AC=ab:ac$ giebet auch VI, 90. $AB:AB-AC=ab:ab-ac$, das ist $AB:CB=ab:cb$, oder $CB:AB=cb:ab$. Man kan aber auch diese Proportionen alle in einen allgemeinen Satz verfassen, wenn man sagt, daß diejenigen Theile der Linie A B, welche zwischen den Parallellinien A D, C E, B F auf gewisse Art liegen, und die Theile der Linie a b die zwischen eben den Parallellinien auf eben die Art liegen, einerley Verhältniß gegen einander haben. Man muß aber unter den Theilen der A B auch A B selbst verstehen, und unter den Theilen der a b, die a b selbst. Die Beschaffenheit der Sprache zwinget uns öfters auf die Art zu reden. Es liegen aber zum Exempel B C und A B zwischen den Parallellinien A D, C E, B F auf eben die Art wie b c und a b zwischen eben diesen Parallellinien liegen: also ist die Proportion B C: A B = b c: a b richtig.

§. 10. Man siehet leicht, daß man auch sagen könne, $AC:ac=AB:ab$, und $AC:ac=CB:cb$, wenn man nemlich die mittleren Glieder der Proportion verwechselt, wie allezeit geschehen kan. VI, 107. Denn dieses ist eine von den gegebenen Proportionsregeln.

§. 11. Wenn die zwei gerade Linien A B, a b so gezogen sind, daß sie einander schneiden, oder in einem Puncte zusammen stoßen, und eine der drey Parallellinien A D, C E, B F gehet durch dieses Punct wie bey der 178 und 179 Figur: so ist diese Parallellinie in der That unnütze, denn sie bezeichnet keine andere Puncte, als sie bezeichnen würde, wenn sie weg wäre, und man brauchet demnach in diesem Falle nur zwei Parallellinien, so daß man nachfolgenden Satz aus unserm allgemeinen formiren kan: Wenn zwei gerade Linien A B und a b

ab in dem Puncte A oder C zusammen kommen, oder einander schneiden, und man ziehet nach Belieben zwei Parallellinien CE, BF in der 178 Figur, oder AD, BF in der 179, welche die erst genannte Linien in C, c, B, b, oder A, a, B, b schneiden, so ist $AC:AB=ac:ab$, und das übrige so wir in den vorhergehenden Sätzen angegeben.

§. 12. In der 178 Figur ist ABb ein Dreieck und mit der Seite Bb desselben die Linie Cc parallel gezogen. Man kan demnach sagen: wenn man in einem Dreiecke ABb mit einer Seite Bb eine andere gerade Linie Cc parallel ziehet, so erlange man allezeit die Proportion. $AC:AB=ac:ab$, und die übrigen, welche angegeben worden. Und dieses ist der Satz, von welchem man gemeinlich die gegenwärtige Lehre anzufangen, und aus welchem man das übrige, so wir gleich Anfangs zugleich erwiesen, herzuleiten pfleget.

§. 13. Hieraus kan man nun eine Anweisung ziehen, zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden, welche pur geometrisch ist, und mit Zahlen gar nichts zu schaffen hat. Es seyen die gegebenen drey Linien ab, bc, und ad, zu welchen man die vierte Proportionallinie finden sol, so ziehe man eine gerade Linie von genugsamer Länge, und bringe auf dieselbe $AB=ab$, und ferner $BC=bc$, ziehe so dann von A noch eine andere gerade Linie, welche mit der vorigen einen Winkel machet, von was Grösse man wil, und trage auf diese Linie aus A die dritte der gegebenen Linien $AD=ad$; so dann ziehe man B und D, mit der geraden Linie BD zusammen, und durch C ziehe man eine andere gerade Linie der BD parallel, welche die verlängerte AD in E schneide: so ist DE die gesuchte vierte Proportionallinie. Denn es verhält sich allerdings vermöge des eben erwiesenen Satzes $AB:BC$ wie $AD:DE$, das ist $ab:bc$ wie $ad:DE$.

§. 14. Man hätte auch die zweite der gegebenen Linien aus A anfangen können, aber in diesem Falle hätte man den Anfang der vierten ebenfalls in A nehmen müssen. Gesezt es wäre zu den Linien AB, AC, und AD die vierte Proportionallinie zu suchen gewesen, so hätte man dieselbe sehen können, wie die Figur ausweist. Die Linie CE, so auch hier der BD parallel zu ziehen, würde das Ende E der vierten Proportionallinie AE, bezeichnet haben. Denn es ist auch $AB:AC=AD:AE$.

VII.
Abschnitt.

§. 15. Wäre die zwote Linie bc der dritten ad gleich gegeben worden, so hätte man die vierte Proportionallinie auch eben nach der Anweisung finden können, ohne die geringste Aenderung. In diesem Falle gehet die Proportion $ab:bc=ad:DE$, oder $AB:BC=AD:DE$ in einem fort, weil die zwey mittlere Glieder BC, AD einerley Grösse haben, und man also sagen kan $AB:BC=BC:DE$: Es wird also zu einer solchen Proportion das dritte Glied eben so gefunden, wie zu einer andern, deren mittlere Glieder verschieden sind, das vierte Glied gefunden wird.

§. 16. Weil $\frac{B \times C}{A}$ überhaupt die vierte Proportional-Grösse ausdrückt, zu den dreyengegebenen Grössen A, B und C VI, 17. so folgt, daß wenn A die Linie ab , oder AB , B die Linie bc , oder BC und C die Linie ad oder AD bedeutet, so dann $\frac{B \times C}{A}$ nichts anders bedeuten könnte, als die Linie DE , und in diesem Verstande muß man diese Zeichnung $\frac{B \times C}{A}$ allezeit nehmen, wenn von geraden Linien die Rede ist. Man zeichnet auch zuweilen so $\frac{B}{A} \times C$, welches von dem vorigen nichts verschiedenes bedeutet.

§. 17. Sonst theilet man aus eben dem Satze eine gerade Linie in Theile, welche sich gegen einander und gegen die ganze Linie eben so verhalten, wie sich in einer andern gegebenen geraden Linie, so in Theile zertheilet ist, diese Theile gegen einander und gegen die ganze Linie, deren Theile sie sind, verhalten. Es geschiehet die Sache eben so wie wir VI, 63. gewiesen eine gerade Linie in so viele gleiche Theile zu theilen, als viele der Theile sind, in welche eine andere gerade Linie getheilet ist, und wir thun hier überhaupt nichts, als daß wir dasjenige, so gleich Anfangs von der Theilung gerader Linien durch Parallellinien gesagt worden ist, erweitern.

F. 181. §. 18. Es sey die gerade Linie AB in C, D und E getheilet: man sol eine andere gegebene gerade Linie $a b$ eben so theilen wie AB getheilet ist, mit Verbehaltung nemlich der Verhältnisse der Theile gegen einander und gegen die ganze Linie: so bringe man die gegebene Linie $a b$ an AB unter einen beliebigen Winkel, das ist, man mache $AB = ab$

ab, ziehe so dann durch die äussersten Punkte dieser Linien B und b die gerade Linie Bb, und mit dieser ziehe man durch alle Theilungspunkte C, D und E Parallellinien Ee, Dd und Cc, welche die Linie Ab in c, d, e schneiden, so ist die Theilung verrichtet. Denn es ist allerdings $AC:CD = Ac:cd$, und $CD:DE = cd:de$, und $AB:EB = Ab:eb$, und so ferner, wie es die Aufgabe erforderte VII, 9. VII. Abschnit:

§. 19. Wir können den Satz, welchen wir bis anher betrachtet haben, noch nicht verlassen. Man kan dasjenige, so von der Proportion der Seiten in einem Dreyecke mit dessen Seite man eine Parallellinie gezogen VII, 12. gesagt worden ist, umkehren, und sagen, daß wenn in der Seite AB eines Dreyeckes ABC, die AD nach Belieben angenommen, und so dann zu den drey Linien AB, AC und AD die vierte Proportionallinie AE gesucht, und diese aus A auf AC gesetzt worden ist; auch die gerade Linie DE, welche die zwey Punkte D und E mit einander verknüpft; der Seite des Dreyeckes BC parallel seyn werde. Denn weil die vierte Proportionallinie AE zu den drey gegebenen AB, AC und AD gefunden wird, indem man durch D eine gerade Linie DE mit der BC parallel ziehet VII, 14. so ist die gerade Linie, welche durch die Punkte D und E gehet, diejenige, welche mit der BC parallel lauffet, indem sie zugleich durch das Punct D gehet. F. 182.

§. 20. Sollte noch einiger Zweifel übrig seyn, so bedenke man, daß wenn man sehen wolte DE wäre nicht mit der BC parallel, man doch ohnmöglich leugnen könnte, daß durch das Punct D mit der Seite BC eine Parallellinie könne gezogen werden. Ist diese nicht DE, so ist es eine andere, zum Exempel DF. Ist aber DF mit der BC parallel, so muß man die Proportion $AB:AC = AD:AF$ nothwendig zugeben, weil diese aus demjenigen so VII, 14. erwiesen worden ist, folgt. Da man aber auch angenommen, daß folgende Proportion richtig sey, $AB:AC = AD:AE$, so ist aus beiden zusammen ferner zu schließen, daß AF der AE gleich sey. Denn die drey ersten Glieder in beiden Proportionen sind einerley, und also können die vierten nicht verschieden seyn. Weil man angenommen $AB:AC = AD:AE$, und geschlossen, daß auch $AB:AC = AD:AF$, so muß man zugeben, daß auch die Verhältnisse $AD:AE$ und $AD:AF$, welche einer dritten Verhältniß $AB:AC$ gleich sind, einander selbst gleich seyn, $AD:AF = AD:AE$, woraus die Gleichheit der AF und AE allerdings fließet VI, 22. Nun aber ist es ohnmöglich, daß AE der AF

VII. *Wfschnitt.* AF gleich sey, wenn die Linie DF, welche man durch D der BC parallel gezogen, ausser DE fällt, und nichts ist leichter zu sehen, als dieses, also kan diese Parallellinie nicht ausser DE fallen, und ist also die Linie DE selbst diese Parallellinie, wie wir erweisen solten.

S. 21. Ausser dem, daß dieser Satz eine neue Anweisung geben kan, wie mit einer jeden geraden Linie eine andere parallel zu ziehen, wird er auch bey Erweisung anderer Sätze vielen Nutzen haben. Das letztere wird sich nächstens zeigen: Das Ziehen der Parallellinie aber kan auf folgende oder auf eine gleichgültige Weise geschehen. *F. 183.* AB ist die gerade Linie, welcher eine andere parallel zu ziehen, und C ist das Punct durch welches die Parallellinie gehen sol. Man ziehe durch C eine gerade Linie nach Belieben, welche sich in der AB endiget, wo man wil, als in D, man mache CE so groß als CD, und ziehe ferner aus E eine andere Linie EF an AB wie man wil, diese theile man mit G in zwey gleiche Theile, so kan man durch C und G die verlangte Parallellinie ziehen. Denn weil EC und EG die Helften sind von ED und EF, so hat man VI, 85. die Proportion $ED:EC = EF:EG$, und ist demnach CG der AB parallel.

S. 22. Man siehet leicht, daß man aus eben dem Grunde noch verschiedene andere kleine Aufgaben auflösen könne, welche wir aber der Uebung überlassen, als welche dergleichen Kleinigkeiten, wenn sie mit einigem Nachdenken verknüpft ist, gar leicht selbst lehret. Und wir beschliessen also hiermit dasjenige, so wir zum Grunde setzen müssen, ehe wir uns zur Betrachtung der Aehnlichkeit der Dreyecke wenden konten.

Von der Aehnlichkeit der Dreyecke.

S. 23. Es sind aber zwey Dreyecke ähnlich, erstlich, wenn sie zwey gleiche Winkel haben, wie man diese nehmen wil. Denn weil aus der Gleichheit zweyer Winkel in den Dreyecken auch die Gleichheit des dritten Winkels folget, so siehet man leicht, daß dieser Satz eigentlich sage, diejenigen Dreyecke seyn einander ähnlich; deren Winkel alle gleich sind; und da hat man freylich kein Auslesen, welche Winkel man in dem einen Dreyecke nehmen und mit den Winkeln des andern vergleichen wolle.

F. 184. S. 24. Es sey nemlich in dem Dreyecke ABC der Winkel A, dem Winkel a des Dreyeckes a b c gleich, und der Winkel B dem Winkel b, woraus dann fließet, daß auch der Winkel C dem Winkel c gleich

gleich sey: so ist das Dreyeck ABC dem Dreyecke abc ähnlich, und VII.
hat dasjenige, so zur Aehnlichkeit der Figuren ausser der Gleichheit der Abschnitte,
Winkel erfordert wird, nemlich es haben auch die Seiten beyder Dreye-
ecke, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, einerley Verhältniß gegen
einander VII, 1. und es ist demnach:

$$AB:BC = ab:bc, \text{ oder } AB:ab = BC:bc.$$

$$AC:BC = ac:bc, \text{ oder } AC:ac = BC:bc.$$

$$AB:AC = ab:ac, \text{ oder } AB:ab = AC:ac.$$

welche dritte Proportion aber auch aus den zwey ersteren herfließet.
Denn in derselben sind die Verhältnisse $AB:ab$, und $AC:ac$ beide
der Verhältniß $BC:bc$ gleich, und müssen demnach nothwendig auch
selbst einander gleich seyn, wie dieses in der dritten Proportion ausge-
drückt wird.

§. 25. Die Richtigkeit aller dieser Proportionen einzusehen, frage
man die Seite bc des kleineren Dreyecks aus B in D auf die Seite
des grösseren BC, welche zwischen den Winkeln B und C liegt, die den
Winkeln b und c, zwischen welchen bc enthalten ist, gleich sind, und
man mache also $BD = bc$. Ferner ziehe man durch D die gerade Li-
nie DE mit der CA parallel. Weil nun dadurch der Winkel D dem
Winkel C gleich wird; IV, 187. Dieser Winkel C aber dem Winkel c
gleich ist, so ist auch der Winkel D dem Winkel c gleich. Und da fer-
ner auch der Winkel B dem Winkel b gleich ist, so ist das Dreyeck
EBD dem Dreyecke abc in allem gleich, das ist, der Winkel E ist dem
Winkel a gleich, $BE = ba$, und $DE = ca$. Denn diese Gleichheit
folget aus der Gleichheit der Seiten BD, bc, und der zweyen Winkel
die daran liegen, jederzeit IV, 126. Und man kan also das Dreyeck
EBD selbst vor das Dreyeck abc halten, welches man in den Winkel B
eingeschoben, und was von den Seiten dieses Dreyeckes EBD bewiesen
wird, ist auch von den Seiten des Dreyeckes abc richtig. Nun folget
daraus, daß DE der CA parallel lieget ohne Weitläufigkeit VII, 12.

$AB:BE = BC:BD$, oder $AB:BC = BE:BD$,
das ist $AB:ab = BC:bc$, oder $AB:BC = ab:bc$, und dieses ist
die erste Proportion, welche wir erweisen solten.

§. 26. Man siehet aber auch leicht, daß der Winkel B vor den
übrigen keinen Vorzug habe, und daß, gleichwie man das kleine
Dreyeck in das grosse mit dem Winkel b schieben kan, dieses auch auf
eben die Art angehen werde, wenn man dasselbe mit seinem Winkel a

VII. in den Winkel A des grossen Dreieckes schiebet. Man stelle sich vor, **Abchnitt.** daß dieses geschehen, so hat man aus eben dem Grunde, weil nemlich wegen der Gleichheit der Winkel C und c, nachdem der Winkel a in A eingeschoben worden, so der Seite BC nothwendig parallel fallen muß, die Proportion zu schliessen, $AB : a b = AC : a c$ oder $AB : AC = a b : a c$, welche die dritte in der Ordnung war, VII, 24. und auf eben die Art folget auch die zwote, wenn man dieselbe nicht aus dieser und der vorigen machen wil. Denn sie lästet sich aus denselben machen. Weil nemlich

$$AB : a b = AC : a c, \text{ wie auch}$$

$AB : a b = BC : b c$, das ist, weil die zwei letzteren Verhältnisse einer dritten $AB : a b$ gleich sind, so müssen sie auch unter sich gleich seyn, und es ist, $AC : a c = BC : b c$, oder $AC : BC = a c : b c$, welches eben die zwote Verhältniß des Satzes ist.

§. 27. Man siehet hieraus, wenn man in einem Dreiecke ABC mit einer Seite AC eine Linie ED wie man wil parallel zieht, daß ausser den oben VII, 12. angezeigten Verhältnissen man auch noch diese habe $BC : BD = CA : DE$, oder $BC : CA = BD : DE$, wie auch $BA : BE = AC : ED$, oder $BA : AC = BE : ED$. Denn die Dreiecke ABC und EBD werden dadurch, daß ED der AC parallel ist, nothwendig gleichwinklicht. Ja es ist dieses auch richtig, wenn zwei gerade Linien AB, CD einander in E schneiden, und man schneidet sie ferner mit den Parallellinien AF, BG. Es ist nemlich $AE : EB = AF : BG$, oder $AE : AF = EB : BG$, wie auch $EF : EG = AF : BG$, oder $EF : AF = EG : BG$.

§. 28. Der zweyte Grund der Aehnlichkeit zweyer Dreiecke ist die Gleichheit eines Winkels derselben, und die gleiche Verhältniß der Seiten, welche denselben Winkel in beiden Dreiecken einschliessen. **F. 184.** Es sey in den Dreiecken ABC und abc der Winkel B dem Winkel b gleich, und es verhalte sich AB zur BC, wie sich ab zur bc verhält, oder welches eben das ist, es sey $AB : ab = BC : bc$, so sind die Dreiecke ebenfalls ähnlich, und haben alles übrige so zur Aehnlichkeit erfordert wird, nemlich die Gleichheit der Winkel C und c, wie auch A und a, welche auf einerley Art in den beiden Dreiecken liegen: und die gleiche Verhältniß der übrigen Seiten, welche an den gleichen Winkeln liegen. Es ist nemlich auch $AB : AC = ab : ac$, oder $AB : ab = AC : ac$, wie auch $BC : AC = bc : ac$ oder $BC : bc = AC : ac$

a c. Und dieses beweisen wir fast auf eben die Art, wie wir unsern VII. Abschnitt.

§. 29. Man trage bc aus B auf die Seite BC , welche jener in der Proportion gegenüber stehet, und mache $BD = bc$, und eben so verfare man mit der ba : Man lege sie auf BA , dergestalt, daß $BE = ba$. Da nun also die Seiten BD , BE an den Seiten bc , ba keine verschiedene Grösse haben, so wird man in der Grund-Proportion $BA:BC = ba:bc$, an die Stelle der zwei letztern Linien und ihrer Verhältniß, die Verhältniß $BE:BD$ setzen können, woraus denn die Proportion $BA:BC = BE:BD$ entstehet. Aus dieser Proportion aber siehet man ein, daß die gerade Linie DE der Linie AC parallel lauffe. Denn wie wir VII, 19. gesehen, so fließet diese Lage der Linien DE , AC eben so wohl aus der angezeigten Proportion, als die Proportion selbst aus dem Parallelen Stande der Linien folget. Und hieraus sind nun die nachstehende Proportionen, welche VII, 23. allezeit statt haben, wenn in einem Dreyecke mit einer Seite eine Parallel-Linie gezogen wird, welche die übrigen Seiten schneidet, leicht geschlossen, $BA:AC = BE:ED$

$$BC:AC = BD:ED.$$

Von der Gleichheit der Winkel D und C , wie auch E und A , ist vielleicht nicht einmal nöthig, etwas zu sagen, weil sie aus der Parallelen Lage der Linien AC und DE unmittelbar fließet. Weil aber die zwey Dreyecke EBD , abc bey B gleiche Winkel haben, und weil man die Seite BD der bc , und BE der ba gleich gemacht, so sind auch nach dem bekannten Satze von der Gleichheit der Dreyecke IV, 112., die Seiten DE und ac , wie auch die Winkel E und a , einander gleich, und der Winkel D ist $= c$, derowegen gi't von dem Dreyecke abc , und von seinen Seiten und Winkeln dasjenige, so von dem Dreyecke EBD , und seinen Seiten und Winkeln gewiesen worden; und es sind demnach auch die Winkel a und A , wie auch C und c einander gleich, und nachstehende Proportionen haben ebenfalls statt:

$$BA:AC = ba:ac, \text{ oder } BA:ba = AC:ac,$$

$$BC:AC = bc:ac, \text{ oder } BC:bc = AC:ac.$$

§. 30. Wir wenden uns nunmehr zu dem dritten Grunde der Aehnlichkeit der Dreyecke. Dieser ist die gleiche Verhältniß aller Seiten in zweyen Dreyecken. Wenn in zweyen Dreyecken ABC und abc von nachstehenden Proportionen

$$Ddd \ 2$$

$$AB:$$

VII.
Abschnitt.

$AB:BC = ab:bc$, oder $AB:ab = BC:bc$.

$AB:AC = ab:ac$, oder $AB:ab = AC:ac$.

$BC:AC = bc:ac$, oder $BC:bc = AC:ac$.

zwo richtig eintreffen, so sind die Dreyecke ähnlich. Wir sehen, daß nur zwo eintreffen dürfen, denn wenn wir diese Verhältnisse mit einander zu vergleichen uns die Mühe geben, so sehen wir leicht, daß aus jeden zweyen derselben die dritte folge. Denn es kommt in jeden zwo Proportionen einerley Verhältniß zweymal vor, welcher zwo andere gleich zu seyn gesetzt werden, und wie in der ersten und zwoten Proportion die Verhältniß $AB:ab$ zweymal stehet, so ist es bey allen übrigen, und man hat also der angezeigten Proportionen nur zwo zu nennen, die dritte wird dadurch zugleich mit eingeschlossen.

§. 31. Daß aber aus zweyen dieser Verhältnisse die Aehnlichkeit der Dreyecke folge, wird nachfolgender massen erwiesen. Man lege wieder bc auf BC , welche letztere Linie der erstern in der Proportion gegenüber stehet, und mache solchergestalt $BD = bc$, man bringe auch ba auf BA in BE , und ziehe sodann die gerade Linie DE . So ist nunmehr gar leicht einzusehen, daß die Dreyecke ABC und EBD einander ähnlich sind. VII, 29. Nun ist aber wieder das Dreyeck EBD dem Dreyecke abc nach allen Seiten und Winkeln gleich, und dieses wird also erwiesen. Es ist gesetzt worden, daß $AB:AC = ab:ac$. Aus der Aehnlichkeit aber der Dreyecke ABC und EBD folget $AB:AC = EB:ED$, und es sind in diesen zwo Proportionen die drey ersten Glieder gleich, denn die allerersten AB , und die zweyten AC sind beiderseits vollkommen einerley, und EB ist der ab mit Fleiß gleich gemacht worden, also müssen auch die dritten Glieder ac und ED einander gleich seyn. Nun ist auch $BD = bc$, derowegen sind alle drey Seiten des Dreyecks EBD den drey Seiten des Dreyecks abc gleich, und folgendes sind die Dreyecke gänzlich von einer Größe, IV, 139. und man kan sich vorstellen, daß EBD nichts anders sey, als das in den Winkel bey B eingeschobene Dreyeck abc . Da nun also erwiesen, daß das Dreyeck EBD dem Dreyecke ABC ähnlich ist, so muß dieses auch von dem Dreyecke abc wahr seyn, und ist demnach der Winkel a dem Winkel A , der Winkel b dem Winkel B , und c dem C gleich, denn diese Winkel liegen in beiden Dreyecken zwischen solchen Seiten, welche gleiche Verhältniß gegen einander haben.

§. 32. Wir haben noch den vierten Grund der Aehnlichkeit zweyer Dreye-

Dreypcke übrig, aber dieser ist etwas mehr eingeschränkt als die vorigen. Zwey Dreypcke haben einen gleichen Winkel, und es sind die Seiten proportional, welche einen andern Winkel einschließen. Es ist möglich, daß bey diesen Umständen die Dreypcke ähnlich sind, sie können aber auch unähnlich seyn. Doch sind sie gewiß ähnlich, wenn diejenigen Seiten, welche den Winkeln entgegen stehen, von welchen gesetzt worden, daß sie einander gleich sind, grösser sind als diejenige Seiten, welche an den gedachten Winkeln anliegen. ABC , abc sind zwey Dreypcke, wir setzen, der Winkel C sey dem Winkel c gleich, und es verhalte sich AB zu BC , wie sich a zu b verhält; aber es sey auch AB grösser als BC , und folgendes a grösser als b : es werden bey diesen Bedingungen die Dreypcke ABC , abc ähnlich einander seyn. VII. Abschnitt. F. 184.

§. 33. Denn man bringe wieder die Linie bc auf die Linie BC , welche jener in der Proportion gegenüber steht, und mache $BD = bc$, und ziehe sodann durch D die gerade Linie DE der CA parallel: so folget hieraus nothwendig, daß der Winkel bey D dem Winkel C gleich sey. Und da man zum Grunde genommen, daß der Winkel C dem Winkel c gleich sey, so muß auch der Winkel D dem Winkel c gleich seyn. Ferner folget aus eben der Parallel Lage der geraden Linien CA und DE nachstehende Proportion: $BC : BA = BD : BE$, VII, 12. Nun hat man auch diese Proportion als richtig angenommen: $BC : BA = bc : ba$, und wenn man diese zwey Proportionen mit einander vergleicht, so findet man, daß die drey ersten Glieder derselben gleich sind. Denn die zwey allerersten sind vollkommen einerley, und BD hat man mit bc genommen. Es müssen demnach auch die vierten Glieder BE , ba einander gleich seyn. Und also haben wir zwey Dreypcke bac , BDE , welche einen gleichen Winkel haben $D = c$, und deren Seiten, welche denselben Winkel nicht einschließen, beiderseits gleich sind, $BE = ba$, und $BD = bc$, so doch, daß die Seite ba , die dem Winkel c entgegen steht, grösser ist, als die Seite bc , welche an demselben liegt. Alles dieses ist theils als bekannt angenommen, theils erwiesen worden; und hieraus folget IV, 257., daß das Dreypck EBD dem Dreypcke abc vollkommen und nach allen Seiten und Winkeln gleich sey, und daß man sich wieder vorstellen könne, daß das Dreypck EBD selbst das Dreypck abc sey, welches man in den Winkel B des Dreypcks ABC eingeschoben. Nun ist aus dem, so wir öfters gesagt, klar genug, daß das Dreypck EBD

VII. dem Dreyeck ABC ähnlich sey, und man darf nur darauf acht haben, Abschnitt. daß DE der AC Parallel laufe, um dieses einzusehen, derowegen muß auch das Dreyeck abc dem Dreyecke ABC ähnlich seyn, und alles haben, was zur Aehnlichkeit erfordert wird, nemlich: Die Winkel B, b , wie auch A, a müssen einander gleich, und die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportional seyn.

§. 34. Ist in solchen Dreyecken der Winkel bey C gerade oder stumpf, so ist nothwendig die Seite AB , welche demselben Winkel entgegen gesetzt ist, grösser als die Seite BC , welche an demselben liegt, IV, 258. und es sind also alle geradewinklichte Dreyecke, wie auch alle stumpfwinklichte unter den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich die Winkel C, c gleich, und die Seiten $BA:BC$ den Seiten $ba:bc$ proportional sind, einander ähnlich. Bey geradewinklichten Dreyecken hat man nicht einmal nöthig zu setzen, daß die geraden Winkel C, c gleich seyn sollen, denn weil sie gerade sind, verstehet sich dieses von selbst. Und man kan also bey geradewinklichten Dreyecken den Satz kurz dergestalt abfassen: Alle geradewinklichte Dreyecke, bey welchen zwey Seiten einerley Verhältniß haben, sind einander ähnlich. Es mögen nemlich diese zwey Seiten den geraden Winkel einschließen, wie in dem 28. Satze dieses Abschnittes angenommen worden ist, oder nicht.

F. 186. §. 35. Wenn man diese Sätze von der Aehnlichkeit der Dreyecke wiederholtet und erweget, so siehet man, da in jeden zwey Dreyecken, welche man vergleichen mag ABC und abc , diese sechs Dinge vorkommen,

$$A = a$$

$$B = b$$

$$C = c$$

$$AB:BC = ab:bc$$

$$AB:AC = ab:ac$$

$$AC:BC = ac:bc$$

drey Winkel nemlich, und drey Verhältnisse der Seiten: Daß, wenn man zwey dieser Dinge gleich zu seyn setzt, auch die übrigen alle gleich seyn, nur muß man die einzige Bedingung unsers letzten Satzes nicht aus den Augen setzen, so oft als man in denselben fällt. Der Verstand ist dieser: Setzet man $A = a$, und $B = b$, so ist auch $C = c$, $AB:BC = ab:bc$, und so ferner mit allen übrigen. Setzet man $A = a$

$A = a$, und $AB:BC = ab:bc$, so ist wieder $B = b$, $C = c$, und VII. $AB:AC = ab:ac$, und so weiter. Es ist keine Ausnahme dabei, Abschnit. als daß, wenn man setzt, daß $C = c$, und $AB:BC = ab:bc$, auch AB größer seyn muß als BC , wenn das übrige alles ebenfalls gleich seyn soll, sonst, wenn AB kleiner wäre als BC , folget das übrige nicht nothwendig.

§. 36. Siehet man aber diese Sätze der Aehnlichkeit der Dreyecke noch auf einer andern Seite an, und vergleicht sie mit denjenigen, so wir gleich im Anfange von der Gleichheit der Dreyecke uns vorgestellt haben; so findet man, daß sie mit jenen gar sehr genau verwandt sind, ja es sind jene Sätze alle unter diesen begriffen. Man schließet, daß zwey Dreyecke gleich sind, und gleiche Seiten und Winkel haben, wenn in denselben gleiche Winkel von gleichen Seiten beschloffen werden. Man schließet auch, daß zwey Dreyecke ähnlich sind, und gleiche Winkel, und eine gleiche Verhältniß der Seiten haben, wenn in denselben gleiche Winkel von Seiten beschloffen werden, welche sich auf einerley Art gegen einander verhalten. Man schließet, daß zwey Dreyecke gleich sind, wenn sie zwey gleiche Winkel haben, und eine gleiche Seite: Man schließet ebenfalls aus der Gleichheit zweier Winkel die Aehnlichkeit derselben, ob zwar sie keine gleiche Seiten haben. Man schließet, daß zwey Dreyecke gleich sind, aus der Gleichheit aller Seiten derselben; Man schließet auch die Aehnlichkeit der Dreyecke aus der gleichen Verhältniß ihrer Seiten. Man schließet in einigen Fällen die Gleichheit der Dreyecke aus der Gleichheit zweier Seiten und eines Winkels, welcher von diesen Seiten nicht beschloffen wird, und in eben diesen Fällen schließet man auch die Aehnlichkeit der Dreyecke aus der Gleichheit eben desselben Winkels, und aus der gleichen Verhältniß dieser Seiten.

§. 37. Hieraus kan man den allgemeinen Satz ziehen, daß, wenn man zwey Dreyecke zu verfertigen ähnliche Dinge annimmt, (gleiche Winkel, oder Seiten, welche gleiche Verhältnisse gegen einander haben) und machet aus diesen Dingen die zwey Dreyecke aus, so werden dieselben ähnlich. Man muß nur solche Dinge annehmen; aus welchen das Dreyeck ganz und gar determiniret wird, so, daß nicht mehr als einerley Dreyeck aus denselben gemacht werden kan. Zum Exempel aus einem Winkel und den zwey Seiten, welche den Winkel einschließen, wird ein Dreyeck, und nicht mehr als eines, verfertiget. Wenn

VII. Wenn man demnach zu zweyen Dreyecken einerley Winkel A und ^a nimmt, und Seiten an dieselbe leget, welche gleiche Verhältnisse gegen einander haben, so daß $AB : AC = ab : ac$, so werden die Dreyecke ABC, abc, welche man dergestalt verfertiget, einander ähnlich.

S. 38. Der Satz ist richtig, ja er ist allgemein. Alle Figuren welche aus ähnlichen Dingen auf einerley Art zusammen gesetzt oder erzeugt werden, sind einander ähnlich, und dieses hat etliche bewogen, daß sie diesen Satz brauchen, alles so von der Aehnlichkeit nicht allein der Dreyecke, sondern aller Figuren überhaupt zu sagen ist, zu erweisen. Ohnfehlbar können diese Beweise richtig seyn, aber der Satz selbst ist kein wahrer Geometrischer Grundsatz. Es fehlet ihm diese Deutlichkeit, und die Ueberzeugung welche ein Geometrischer Grundsatz so gleich hervor bringet, so bald man ihn höret. Figuren die einander decken können sind einander gleich. Dieses ist ein wahrhaftig Geometrischer Grundsatz. Man vergleiche ihn mit dem, von welchem wir reden, und sehe ob man von diesem eben so sehr überzeuget werde als von jenem? Ja wir können uns nicht anders vorstellen, als daß viele wirklich an der Wahrheit dieses allgemeinen Satzes der Aehnlichkeit zweifeln werden, wenn wir bedenken, wie viele Mühe es uns gekostet, ihn erstlich recht zu verstehen, und zum zweyten uns von der Wahrheit desselben zu überführen. Und eben dieses, daß er unrichtig verstanden werden, und dadurch zu vielen Fehlern Anlaß geben könne, ist eine neue Ursach, warum wir ihn als einen Grund der Geometrischen Beweise nicht gebrauchen wolten. Man suchet in der Geometrie nicht nur eine gewisse Wahrheit, welche auch die Erfahrung, und zuweilen das Zeugniß anderer geben kan; sondern man suchet in dieser Wissenschaft den höchsten Grad der Ueberzeugung, welchen man die Evidenz nennet, und welche darin bestehet, daß man aus dem Begriffen der Sache selbst, nachdem man sich versichert, daß in demselben nichts widersprechendes liege, dasjenige herzuleiten fähig ist, so von den Dingen, welche diese Begriffe vorstellen, gesagt wird.

S. 39. Wäre dieses nicht, und man hätte nicht alle Undeutlichkeit und Zweydeutigkeit in dieser Wissenschaft so sorgfältig zu vermeiden, so wäre es nicht ohnmöglich noch manchen dergleichen Satz in die Geometrie zu bringen, als der gegenwärtige ist, und wir glauben, daß wir Exempel von solchen Sätzen gegeben, und noch ferner zu geben im Stande seyn werden, welche zwar in einem oder andern Falle einen leichten Beweis machen können, aber deswegen nicht in die Geometrie
als

als Grundfäße gebracht werden dürfen, weil wieder Fälle vorkommen können, da die Anwendung derselben mit einiger Undeutlichkeit verknüpft wäre. VII. Abschnitt.

§. 40. Man kan noch verschiedene andere Eigenschaften der Seiten und Winkel der Dreyecke aus diesen Sätzen herleiten. Wir können uns aber mit einer einzigen begnügen, welche diese ist. Wenn man in einem Dreyecke ABC einen beliebig angenommenen Winkel A in zween gleiche Winkel BAD und DAC schneidet, und verlängert die Linie AD welche den Winkel schneidet, bis sie auch die Seite BC, die dem Winkel BAC entgegen gesetzt ist, in D theile: so verhalten sich diese Theile gegen einander, wie die Seiten des Dreyeckes ABC, an welchen sie liegen, und man hat $BD : DC = AB : AC$. Denn man ziehe durch C die gerade Linie CE mit der AD parallel, und verlängere die BA, bis sie diese CE in E schneide: So ist der Winkel DAC dem Winkel ACE gleich, weil die Parallellinien AD, EC beyde von der Linie AC geschnitten werden, und dadurch diese Winkel DAC, ACE entstehen. Weil aber auch BE eben diese Parallellinien AD, EC, schneidet, so ist auch $BAD = AEC$. Und da demnach die Winkel ACE und AEC, zween gleichen Winkeln DAC, BAD gleich sind, so sind sie auch selbst gleich, $ACE = AEC$. Folgender ist das Dreyeck AEC gleichschenkligh, und $AE = AC$ IV, 129. Weil aber auch in dem Dreyecke EBC, die AD mit der Seite CE parallel lauffet, so hat man, VII, 9. $BD : DC = AB : AE$. Man setze an die Stelle der AE die ihr gleiche AC, so kommet die Proportion $BD : DC = AB : AC$, deren Richtigkeit wir erweisen solten.

F. 187.

Von der Aehnlichkeit der übrigen Figuren.

§. 41. Mit den übrigen Figuren, welche mehr als drey Seiten haben, giebet es bey weiten nicht so viele Weitläufigkeit, wenn wir nur dasjenige betrachten wollen, so hauptsächlich nützlich ist. Sie mögen so viele Seiten haben als sie wollen, wenn sie nur einander ähnlich sind, so lassen sie sich in ähnliche Dreyecke zertheilen, indem man Querlinien durch die Spitzen derjenigen Winkel ziehet, welche einander gleich sind, und diese Querlinien verhalten sich so dann gegen einander, wie jede zwo Seiten der Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen. Dieses ist das hauptsächlichste, so wir von solchen Figuren zu bemerken haben, und der Beweis davon ist gar leicht.

§. 42. Gesezet es seyen die Figuren ABCDE und abcde einander

F. 188.

E e e

ander

VII. ander ähnlich, so müssen erstlich die Winkel der einen Figur, wie für Abschnitt. in der Ordnung auf einander folgen, den Winkeln der andern Figur gleich seyn: und zweitens müssen die Seiten, welche in beiden Figuren zwischen den gleichen Winkeln liegen, einerley Verhältniß gegen einander haben. VII, 1. Wir setzen daß diejenigen Winkel gleich sind, welche wir mit einerley Buchstaben gezeichnet haben, so sind die Verhältnisse

$$AB : ab$$

$$BC : bc$$

$$CD : cd$$

$$DE : de$$

$$EA : ea, \text{ alle gleich, und jede zwei mit einander}$$

verknüpft, geben eine Proportion. Nun ziehe man die Querslinien BE und be, zwischen den gleichen Winkeln $B=b$, und $E=e$. Es ist so gleich einzusehen, daß weil die Winkel A, a gleich sind, und die Seiten welche sie einschließen, einerley Verhältniß gegen einander haben, auch die Dreiecke ABE, abe ähnlich seyn, und BE zur be eben die Verhältniß haben werde, welche AB : ab hat, VII, 28. daß demnach diese Verhältniß BE : be den vorigen gleichen Verhältnissen wird können beygesetzt werden. Also ist von diesen erstern Querslinien gezeigt, daß ihre Verhältniß der Verhältniß jeder Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, gleich sey. Da nun aber die erwiesene Aehnlichkeit der Dreiecke ABE und abe auch die Gleichheit der übrigen Winkel in sich begreiffet, nemlich $ABE = abe$, und $AEB = aeb$, die Winkel aber EBC und ebc übrig bleiben, wenn man von den gleichen Winkeln ABC und abc die Winkel ABE und abe wegnimmt, so müssen auch diese Winkel EBC und ebc gleich seyn, als die durch den Abzug gleicher Winkel von gleichen entstehen. Sind aber, wie gezeigt worden, diese Winkel EBC und ebc einander gleich, und ist ferner die Verhältniß EB : eb der Verhältniß BC : bc gleich, wie wir dieses ebenfalls erwiesen, so ist wiederum das Dreieck EBC, dem Dreiecke ebc ähnlich, und die Verhältniß der Querslinien EC : ec ist mit der Verhältniß der Seiten BC : bc, und folgender Verhältniß jeder andern zwei Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, einerley: Und auf diese Art kan man ferner fortfahren die Gleichheit der Verhältnisse der Querslinien mit den Verhältnissen der Seiten der Figuren, die zwischen gleichen Winkeln liegen, und die Aehnlichkeit der Dreiecke, in welche die Figuren durch diese Querslinien zertheilet worden sind,

zu zeigen. Man siehet leicht, daß dieses angehen werde, es mag die Figur aus so vielen Dreyecken bestehen als sie wil.

VII.
Abschnitt.

S. 43. Da wir nun gezeigt haben, daß die ganzen Umkreise jeder zwey ähnlichen Figuren sich gegen einander, wie jede zwey Seiten der Figuren, die zwischen gleichen Winkeln liegen, verhalten, VII, 4. gegenwärtig aber erwiesen ist, daß die Verhältniß jeder dergleichen Seiten der Verhältniß der Querlinien, welche die Spitzen gleicher Winkel mit einander verknüpfen, gleich sey, so wird man schließen müssen, daß bey jeden ähnlichen Figuren die ganzen Umkreise sich wie solche Querlinien verhalten; und daß demnach in denjenigen Figuren, welche wir bis anhero betrachtet haben, die Verhältniß des Umkreises $ABCDEA$ zu dem Umkreise $abcdea$ der Verhältniß der Querlinie BE zur be , wie auch der Verhältniß der CE zu ce gleich sey. Nimmet man solche Theile des Umkreises, welche in den beyden Figuren zwischen den Spitzen gleicher Winkel liegen als $ABCD$, $abcd$, so verhalten sie sich, der erstere zu dem zweyten gleichfalls wie AB zur ab , oder wie $BE : be$ wie aus dem Beweise, den wir VII, 4. gegeben haben, erhellet.

S. 44. Man kan diesen Satz umkehren und sagen, daß wenn man zwey Figuren aus ähnlichen Dreyecken zusammen setzet, deren Seiten nemlich alle einerley Verhältniß gegen einander haben, und bey welchen diejenige Seiten gleich seyn, welche in der Figur zusammen fallen sollen; die also zusammen gesetzte Figuren ebenfalls einander ähnlich seyn werden: Nur muß man sich in Acht nehmen, daß man die Dreyecke in der einen Figur nicht anders lege, als sie in der andern liegen. Wir setzen, daß die Figuren $ABCDE$ und $abcde$ dergestalt aus ähnlichen Dreyecken zusammen gesetzet sind, und daß das Dreyeck ABE , dem Dreyecke abe ähnlich sey, und EBC dem ebc und so weiter, und sagen, es werde auch die Figur $ABCDE$ der Figur $abcde$ ähnlich seyn: das ist, es werden die Winkel der ersteren Figur den Winkeln der zwoten, wie sie in der Ordnung auf einander folgen, gleich, und die Seiten, welche die gleiche Winkel einschließen, proportional seyn.

S. 45. Das letztere, daß die Seiten der beyden Figuren, welche auf einerley Art liegen, alle einerley Verhältnisse gegen einander haben, ist ohne Weitläufigkeit klar, weil man dergleichen Dreyecke angenommen; deren Seiten, die zwischen einerley Winkel und folgendes auf einerley Art liegen, gleiche Verhältniß gegen einander haben,

VII. ben, und diese Seiten in der Figur wiederum auf einerley Art gelegt.
 Abschnitt. Es ist nemlich vermöge dieser Ähnlichkeit $AB : ab = BE : be$ und

$$BC : bc = BE : be, \text{ also}$$

sind die ersteren zwei Verhältnisse einer dritten gleich, und demnach ist auch $AB : ab = BC : bc$, und so rings herum. Diese gleiche Verhältniß der Seiten der Dreyecke, welche man zusammen gesetzt, liegt in dem Begriffe der Ähnlichkeit derselben. Was aber die Winkel der Figuren $ABCDE$, $abcde$ anlangt, so sind diese aus gleichen Winkeln der Dreyecke zusammen gesetzt: denn eben der Begriff der Ähnlichkeit der Dreyecke schließet die Gleichheit der Winkel, welche in denselben auf gleiche Art liegen, in sich, und diese gleiche Winkel der Dreyecke sind in den Figuren auf gleiche Art zusammen gesetzt, und machen die Winkel der Figuren theils selbst und alleine, theils durch ihre Zusammensetzung aus. In dem ersten Falle, da die Winkel der Figur selbst die Winkel der Dreyecke sind, wie A, a , ist nicht weiter nöthig zu zeigen, daß diese Winkel der Figur einander gleich sind; in dem zweyten Falle aber entstehen die Winkel ABC, abc durch die Zusammensetzung gleicher Winkel $ABE =$ und abe , und $EBC = ebc$, und sind also ebenfalls einander gleich.

§. 46. Man kan nach diesen Sätzen eine geradelinichte Figur beschreiben, welche einer gegebenen geradelinichten Figur ähnlich ist. Es sey die Figur $ABCDE$ gegeben und man sol eine Figur machen, welche ihr ähnlich sey. Es sey auch eine Seite ab gegeben, welche der Seite AB der erstern Figur gegenüber stehen, und mit jener zwischen gleichen Winkeln liegen soll; denn man muß eine dergleichen Seite haben, und wenn sie nicht gegeben ist, muß man sie nach Belieben nehmen. So theile man die Figur $ABCDE$ nach Belieben in Dreyecke, und setze auf die Seite ab das Dreyeck abe , so dem Dreyecke ABE ähnlich ist, und da ferner in der ersten Figur auf BB das Dreyeck EBC stehet, so setze man auch auf be das Dreyeck ebc , welches dem Dreyecke EBC ähnlich ist, und so fahre man in Zusammensetzung der Dreyecke fort, bis man in die Figur $abcde$ so viele Dreyecke gebracht hat, als viele derer in $ABCDE$ anzutreffen sind.

§. 47. Diese Anweisung begreiffet verschiedene besondere Arten, eine geradelinichte Figur einer andern ähnlich zu machen, unter sich, welche man in der Ausübung gebrauchen kan. Denn man kan auf die Seite ab nach gar verschiedenen Gründen ein Dreyeck abe setzen, wel-

welches dem Dreyecke ABE ähnlich ist, und eben dieses ist von einem jeden andern der übrigen Dreyecke zu sagen. Man kan den Winkel a dem Winkel A gleich und die Seiten ab, ac den Seiten AB, AE proportional machen. Man kan den Winkel a dem Winkel A, und abe dem Winkel ABE gleich machen. Man kan aber auch die drey Seiten des Dreyecks abe den drey Seiten des Dreyecks ABE proportional machen, so wird immer das Dreyeck abe dem Dreyecke ABE ähnlich, und eben dieses ist auch von den übrigen Dreyecken allen zu sagen. Man bedienet sich in der Ausübung bey einem jeden Dreyecke derjenigen Zusammensetzung, welche nach den besondern Umständen die leichteste zu seyn scheint. Ist zum Exempel die Linie ab halb so groß als die Linie AB, so müssen auch die übrigen Seiten und Querlinien der Figur $abcde$ die Helften seyn, der Seiten und Querlinien der Figur ABCDE welche jenen gegenüberstehen, und mit jenen auf einerley Art liegen. Es sind demnach die Seiten und Querlinien der Figur $abcde$ in diesem Falle aus den Seiten und Querlinien der Figur ABCDE leicht zu finden; und aus diesen lästet sich hernach die Figur $abcde$ selbst zusammen setzen. Eben dieses ist auch zu sagen, wenn ab ein Drittel, ein Viertel, u. s. f. der AB ist, oder wenn ab zwey, drey, vier mal so groß ist als AB. Dergleichen Vortheile fallen einem in der Uebung gar leichte bey.

§. 48. Auf eben die Art kan man auch verfahren, wenn man eine gebrochene Linie $abcde$ einer andern gebrochenen Linie ABCDE ähnlich machen soll. Denn man kan auch dergleichen Linien ähnlich nennen, wenn ihre Theile aus welchen sie bestehen, wie sie auf einander folgen, gleiche Verhältnisse gegen einander haben und gleiche Winkel einschließen. Das ist, wenn die Verhältnisse AB: ab , BC: bc , CD: cd , DE: de so wohl als die Winkel ABC, abc , wie auch BCD, bcd , und CDE, cde einander gleich sind, so kan man sagen, daß die gebrochene Linien ABCDE, und $abcde$ einander ähnlich sind, und es ist leicht einzusehen, daß was von solchen Linien richtig ist, auch in dem Falle statt haben müsse; wenn sie sich schließen, und Umkreise der Figuren abgeben, welche Figuren so dann ähnlich werden, in welchem Falle der gegenwärtige Begriff mit dem ersten, welchen wir von der Aehnlichkeit der Figuren gegeben, überein kommet. Weil aber die Betrachtung solcher gebrochenen Linien angewendet werden wird, verschiedene andere nützliche Sätze zu erweisen, so wollen wir uns die Weise, eine solche Linie einer andern ähnlich zu machen, noch von einer andern Seite vorstellen.

F. 189.

VII. **Wfschnitt.** §. 49. Es sey die gebrochene Linie $ABCDE$, diejenige, welcher eine andere ähnlich zu machen ist. Man nehme ein Punct F wo man wil, entweder in der Linie selbst, oder ausser derselben auf dieser oder jener Seite, und ziehe von diesem Puncte F gerade Linien an alle Ecken der Figur, und an die äussersten Puncte derselben FA, FB, FC, FD, FE . Nachdem dieses geschehen ist, setze man die Dreyecke afb, bfc und so weiter, welche den Dreyecken, deren Spitzen an F fallen AFB, BFC und so ferner, ähnlich sind, eben so zusammen, wie die Dreyecke AFB, BFC , &c. an einander liegen. Man kan anfangen wo man wil, in der Mitte oder von einem oder dem andern der äussersten Dreyecke: aber es muß eine Seite des ersten Dreyeckes entweder gegeben seyn, oder man muß sie selbst nach Willkühr bestimmen. Aus derselben wird so dann die Grösse aller übrigen gefunden, eben so, als wie dieses in der vorigen Anweisung VII, 47. geschehen. Und es schicket sich der Beweis welcher von der Richtigkeit jener Anweisung gegeben worden ist, auch vor die gegenwärtige, als die von jener im Grunde nicht verschieden ist. Man betrachte nur $BCDEF$ und $bcd ef$ als Figuren, welche aus ähnlichen Dreyecken zusammen gesetzt sind; so siehet man so gleich, daß man schliessen müsse, der Winkel EDC sey dem Winkel edc , und DCB dem $dc b$, wie auch CBF , dem cbf , gleich: und die Verhältniß der Seiten $DE: de$ den Verhältnissen $CD:cd$ und $BC:bc$, wie auch $BF:bf$. Und solte man bey den letzten Seiten AB, ab und dem Winkel ABC Schwierigkeit finden, so wird diese leicht gehoben werden, wenn man betrachtet, daß, weil auch die Dreyecke ABF, abf einander ähnlich sind, die Verhältniß $AB:ab$ der Verhältniß $BF:bf$, und folgendes allen übrigen $BC:bc, CD:cd$ und so fort, ebenfalls gleich seyn müsse: wie auch, daß, weil in eben diesen Dreyecken ABF und abf die Winkel ABF und abf einander gleich seyn, aber auch die Winkel CBF, cbf einerley Grösse haben, wie wir vorher geschlossen: auch die Winkel ABC, abc gleich seyn müssen, weil sie beyderseits nach Abzug der kleineren der besagten gleichen Winkel CBF, cbf von den grösseren ABF, abf übrig bleiben.

§. 50. Man kan sich hieraus einen gar bequemen Handgrif vorstellen, eine Figur zu verfertigen, welche einer anderen Figur ähnlich ist, oder auch nur einen Theil des Umkreises einer Figur, einem Theile des Umkreises einer andern, ähnlich zu machen, wenn sonst weiter nichts gefordert wird, und die verfertigte Figur oder Linie liegen darf, wie man wil. Es sey die gebrochene Linie $ABCDE$ gegeben, und man

man sol eine andere Linie machen, welche ihr ähnlich ist: so ziehe man durch alle äusserste Punkte der Theile, aus welchen sie besteht, die gerade Linien AF, BF, CF und so ferner, nach einem beliebig angenommenen Punkte F, und verlängere diese Linien, wenn man wil über dieses Punkt: nehme aber hernach in denselben die Punkte a, b, c, und so weiter, dergestalt daß die Verhältnisse AF:Fa, BF:Fb, CF:Fc, DF:Fd, EF:Fe alle von einerley Grösse werden, welches man sich vorstellen kan daß es geschehe, indem Fa halb so groß genommen wird, als FA, Fb halb so groß als FB, und so rings herum, oder was man sonst vor eine Weise erwehlen wil, die Linien Fa, Fb, Fc, den Linien FA, FB, FC proportional zu machen. So bald dieses geschehen ist, und man dergestalt die Punkte a, b, c, d, e gefunden hat; so kan man durch dieselbe die gebrochene Linie abcde ziehen, welche der gegebenen ABCDE ähnlich seyn wird. Denn es ist klar daß die Dreyecke AFB und aFb einander ähnlich sind, weil ihre Winkel bey F einander gleich sind, und man den Seiten an diesen Winkeln einerley Verhältniß gegen einander gegeben hat. VII, 28. Eben dieses ist auch von allen übrigen Dreyecken BFC, bFc, CFD, cFd zu sagen, und hieraus erfolgt die Aehnlichkeit der gebrochenen Linien ABCDE und abcde nach dem, so eben erwiesen worden.

§. 51. Es verhält sich aber die gebrochene Linie ABCDE zu der andern abcde, welche ihr ähnlich ist, wie AF:Fa, oder wie BF:Fb. Denn wir haben gesehen, daß sich ABCDE zu abcde verhalte wie AB:ab oder BC:bc &c. weil man diese gebrochene Linien als Theile der Umkreise zweyer ähnlichen Figuren betrachten kan, deren Seiten AB, BC, CD, DE und ab, bc, cd, de sind. VII, 4. Die Verhältniß aber AB:ab ist der Verhältniß AF:Fa gleich. Denn die Dreyecke ABF, abF sind ähnlich genommen. Eben so ist es rings herum.

Von der Aehnlichkeit der Theile der Cirkel.

§. 52. Wir können dieses auf die Cirkelbogen anwenden, und daraus zeigen, in welchen Umständen dergleichen Bogen ähnlich sind. Es seyn um den Mittelpunct F zween Bogen AE, ae beschrieben, welche beide zwischen einerley Halbmessern AFa und EFe oder AaF und EeF liegen, und mit denselben Ausschnitte ausmachen, deren Winkel an den Mittelpuncten F gleich sind: so sind die Bogen AE und ae einander ähnlich. Denn man ziehe von dem in dem einen Bogen beliebig angenommenen Punkte B, den Halbmesser BF, und verlängere ihn wenn

F. 192.
193.

VII. wenn es nöthig ist bis an den andern Bogen. Gleichwie man nun
 Abschnitt. bey der gebrochenen Linie ABCDE in den unmittelbar vorhergehenden
 Zeichnungen, die Aehnlichkeit derselben mit der abcde daraus geschlossen, daß die Verhältniß $AF : aF$ der Verhältniß $BF : bF$, und diese wieder der Verhältniß $CF : cF$ gleich sey, und so fort: so folget ebenfals die Aehnlichkeit der Bogen AE und ae daraus, wenn man das Punct B in dem Bogen ABE nach Belieben nehmen kan, ohne daß jemals die Verhältniß $AF : aF$ der Verhältniß $BF : bF$ ungleich werde. Man siehet aber leicht, daß diese Verhältnisse niemals ungleich seyn können; weil BF, bF so wol als AF, aF immer halbe Durchmesser der Bogen sind; und also nicht einmal die Glieder derselben verschiedene Größen haben können.

§. 53. Es haben demnach auch solche Bogen gegen ihre Halbmesser einerley Verhältniß: das ist, wie sich der Bogen AE gegen seinen Halbmesser AF verhält, so verhält sich auch der Bogen ae gegen seinen Halbmesser aF, VII, 51. oder wenn wir uns der gewöhnlichen Zeichen bedienen, $AE : AF = ae : aF$; und hieraus folget durch die Verwechselung $AE : ae = AF : aF$.

§. 54. Die Halbmesser sind die Helften der Durchmesser, und die Helften jeder Größen verhalten sich allezeit wie die ganzen Größen. Oder 2 AF ist der Durchmesser des Eirkels, welcher entsteht, wenn man den Bogen AE ergänzt, und 2aF ist der Durchmesser des Eirkels, von welchem der Bogen ae ein Theil ist. Da nun die Proportion $AE : ae = AF : aF$ richtig ist, so wird auch die nachfolgende $AE : ae = 2AF : 2aF$ ihre Richtigkeit haben: VI, 103. und zween dergleichen Bogen, deren Winkel an dem Mittelpuncte einander gleich sind, werden sich auch gegen einander wie die Durchmesser der Eirkel verhalten. Wir haben dieses und das folgende desto deutlicher einzusehen, eine andere Figur gezeichnet, in welcher zween Eirkelkreise AEG, F. 194. aeg um einerley Mittelpunct F beschrieben sind, und nach dieser muß die letzte Proportion also ausgedrucket werden $AE : ae = EG : eg$, oder mit verwechselten Gliedern dergestalt $AE EG = ae : eg$.

§. 55. Man siehet auf eben die Art, daß auch die Verhältniß des halben Umkreises EAG zu dem halben Umkreise eag der Verhältniß der Durchmesser $EG : eg$, oder der Verhältniß der Halbmesser $EF : eF$, gleich sey; und mit der Verhältniß des ganzen Umkreises EAGE zu dem Umkreise eage ist es eben so beschaffen. Man kan dieses auch
 der

dergestalt schließen. Nicht nur die Ausschnitte EFA , eFa , sondern auch die Ausschnitte AFG , aFg haben an ihrem Mittelpunkte gleiche Winkel. Gleichwie also die Verhältniß $EA:ea$ der Verhältniß $EF:eF$ gleich ist, so ist auch die Verhältniß $AG:ag$ eben dieser Verhältniß $EF:eF$ gleich, und demnach $EA:ea=AG:ag$. Man setze die Glieder dieser gleichen Verhältnisse zusammen, und mache $EA+AG$, $ea+ag$, das ist EAG und eag . Die Verhältniß wird dadurch nicht geändert, VI, 102. und es bleibet also auch $EAG:eag=EF:eF=EG:eg$. Wie sich aber der halbe Umkreis EAG zu dem halben Umkreise eag verhält, so verhält sich auch der ganze Umkreis $EAGE$ zu dem ganzen Umkreise $eage$.

§ 57. Und da also so wohl die Verhältniß der ganzen Umkreise jeder zweier Cirkel, als auch die Verhältniß zweier Bogen dieser Cirkel, deren Halbmesser gleiche Winkel einschließen $EA:ea$, der Verhältniß ihrer Durchmesser gleich ist, oder da $EAGE:eage=EG:eg$, und $EA:ea=EG:eg$, so folget, daß auch die Verhältniß der Umkreise $EAGE:eage$, der Verhältniß der gedachten Bogen $EA:ea$ gleich sey, oder daß $EAGE:eage=EA:ea$, woraus ferner folget $EAGE:EA=eage:ea$, wenn man nemlich die mittleren Glieder verwechselt, wie allezeit geschehen kan. Nemlich, jede zweien Bogen zweier Cirkelkreise, deren äußerste Halbmesser AF und EF , wie auch aF und eF bey dem Mittelpunkte F gleiche Winkel einschließen, verhalten sich gegen einander, wie die ganzen Umkreise, zu welchen sie gehören. Der Bogen EA verhält sich zu seinem Umkreise $EAGE$, wie sich der Bogen ea zu seinem Umkreise $eage$ verhält.

§ 58. Man kan sich auch folgender gestalt ausdrücken, wenn man bis auf die Begriffe der Verhältnisse getheilte Größen VI, 31. zurück gehen wil, welche wir bey dem allerlehten Satz $EA:EAGE=$

§§

$ea:$

VII. **ea; eage** anwenden wollen. Wenn man die Umkreise **EAGE** und **Wassn** **eage** in eine gewisse Zahl gleicher Theile theilet, und zum Exempel einen jeden derselben 360 gleiche Theile giebet, so läßt sich der Bogen **EA** aus den gleichen Theilen des Umkreises **EAGE** eben so zusammen setzen, wie der Bogen **ea** aus den Theilen des Bogens **eage** zusammen gesetzt wird, und wenn zum Exempel **ea** 72 Theile hält, deren 360 den Umkreis **eage** ausmachen, so besteht auch **EA** aus 72 solchen Theilen, deren 360 in dem ganzen Umkreise **EAGE** enthalten sind.

§. 59. Und dieses ist auch von der Helfte, oder dem vierten Theile des Umkreises richtig. Die Verhältniß des ganzen Umkreises **EAGE** zu dem ganzen Umkreise **eage**, ist der Verhältniß des halben Umkreises **EAG** zu dem halben Umkreise **eag** gleich, wie auch der Verhältniß des vierten Theiles des Umkreises **EAGE** zu dem vierten Theile des Umkreises **eage**. Da nun die Verhältniß des Bogens **EA** zu dem Bogen **ea**, der Verhältniß der Umkreise **EAGE**: **eage** gleich ist; so wird eben diese Verhältniß **EA:ea** auch der Verhältniß der halben Kreise **EAG:eag**, und der Verhältniß der vierten Theile der Umkreise gleich seyn: oder die Proportion **EAG:eag** wird ihre Richtigkeit haben, wie auch die folgende **EAG:eag** entstehen, wenn man die mittleren zwei Glieder **EAG:eag** dieser letzteren Proportion in den Eirkelkreise **EAG** und **eag** set, auch die Bogen **EA** und **ea** enthalten werden. VI, 31. Man nehme, daß noch kleinere Theilchen, in Ansehung des Ganzen, in keine Betrachtung kommen können. VI. 8.

§. 60. Es ist leicht einzusehen, daß alles was von der Ähnlichkeit der Bogen gesagt worden, von solchen Bogen alleine gelte, welche zu zwei Ausschnitten gehören, deren Winkel an dem Mittelpuncte gleich sind; und daß die Bogen solcher Ausschnitte, deren Winkel an dem Mittelpuncte verschiedene Größen haben, ohnmöglich ähnlich seyn können. Und wenn man demnach auf zwei gerade Linien **AB**, **ab** aus **C** und **c** die halben Eirkelkreise **ABD**, **abd** beschreibt, und theilet dieselbe in **D** und **d**, dergestalt, daß sich **AD** zum **ADB** verhalte, wie sich **ad** zum **adb** verhält; so müssen die Winkel **ACD** und **acd** einander gleich seyn. Denn weil dasjenige, so von der Ähnlichkeit zweier Bogen und von ihren gleichen Verhältnissen in den ganzen oder halben

den Umkreisen gefaget worden, nur in dem Falle statt finden kan, wenn VII.
die Winkel an den Mittelpuncten gleich sind, und weil sich demnach in ~~Winkel~~
unserer Figur AD zur ADB ohnwendig so verhalten kan, wie sich
 ad zum adb verhält, wenn nicht der Winkel ACD , dem Winkel
 acd gleich ist; so folget, daß weil man die Verhältnisse $AD:ADB$,
und ad zum adb von einerley GröÙe gemacht, diese Winkel ACD ,
 acd einander nothwendig gleich seyn müssen.

§. 61. Wenn man also den halben Cirkel ADB in eine gewisse
Zahl gleicher Theile theilet, was man vor eine annehmen wil, zum
Exempel 120, und theilet adb in eben so viele gleiche Theile, giebet her-
nach dem Bogen AD eine gewisse Zahl der Theile des halben Umkrei-
ses ADB und dem Bogen ad eben so viele Theile seines halben Um-
kreises adb , und ziehet die Halbmesser DC , dc ; so werden die Win-
kel ACD , acd von einerley GröÙe. Und eben dieses ist richtig, man
mag sonst wie man wil die Verhältnisse $AD:ADB$ und $ad:adb$
einander gleich machen. Wir werden dieses so gleich noch auf eine
andere Art erweisen.

§. 62. Der Satz, welchen wir hierzu gebrauchen, und welcher
auch an sich nützlich ist, ist nachfolgender: Jede zween Winkel ABC F. 196.
und ABD verhalten sich gegen einander, wie sich die Bogen AC und 197.
 AD gegen einander verhalten, welche aus ihren Spitzen B mit einerley
Öffnung des Cirkels beschrieben worden, und es ist allezeit $ABC:$
 $ABD = AC:AD$. Wir haben in der Figur die zween Winkel an ei-
ner Seite AB dergestalt geleyet, daß auch ihre Spitzen in B zusammen
fallen: man siehet aber leicht, daß, was von dergestalt gelegeten
zween Winkeln richtig ist, auch alsdann gelten müsse, wenn sie von
einander abgesondert sind. Die Richtigkeit aber der angegebenen Pro-
portion einzusehen, hat man nur den Bogen AD in eine beliebige Zahl
gleicher Theile zu theilen, und so oft es nöthig ist, diese Theilchen bis
über C fortzusetzen, welches vermittelst der Punete E, F, G, H &c. ge-
schehen kan, sodann aber die gerade Linien EB, FB, GB, HB und die
übrigen nach dem Mittelpunct zu ziehen. Es werden dadurch die ein-
zelnen Winkel um B , ich meyne $ABE, EBF, \dots GBH, \dots$ alle
gleich, V. 3. und ist demnach der Winkel ABD in so viele gleiche
Winkel getheilet worden, als viele der Theile des Bogens AD sind.
Hieraus aber ist unser Satz klar, ohne daß es nöthig ist, dabey viele
Worte zu machen. Denn man siehet leicht, daß das Punct C , in
das Theilchen des Bogens GH falle, welches von dem ersten Theil-

VII. theil EA um so viele Theile abtheilet, als viele Winkel zwischen dem ersten ABE und dem Winkel GBH stehen, in welchen die Linie CB fällt. Nämlich gleich wie GH in der 196 Figur das vierte der gleichen Theile des Bogens AD ist, so ist auch GBH das vierte der gleichen Theile des Winkels ABD, und gleich wie in der 197 Zeichnung das Punct C in das siebente Theilchen des Bogens ADH fällt, so fällt auch CD in das siebende Theilchen des Winkels ABH: Und so ist es allezeit, man mag den Bogen, und mit demselben den Winkel in so viele gleiche Theile theilen, als man wil. Wenn aber dergleichen bey allen Theilungen zutrifft; so haben wir gesehen, VI. 60. daß sich AC zum AD verhalte, wie sich ABC zum ABD verhält.

§. 63. Oder man erwäge, daß indem der Radius AB, sich um das Punct B drehet, und mit seinem äußersten Puncte A den Bogen AC, und so dann auch AD, mit gleichförmiger Bewegung beschreibt; durch eben diese Bewegung auch die Winkel ABC, ABD mit dem Bogen zugleich erzeugt werden, und gleichförmig anwachsen. Denn indem die gleichen Theile des Bogens AE, EF ... GH entstehen, entstehen auch die gleichen Winkel ABE, EBF, ... GBH. Und hieraus ist wieder klar, daß $AC:AD = ABC:ABD$. VII, 62.

§. 64. Ist nun der Winkel ABD gerade, so ist AD ein Quadrant, V, 10. und es verhält sich demnach ein jeder Winkel ABC zu einem geraden Winkel ABD, wie sich der Bogen, der innerhalb des Winkels AC aus seiner Spitze beschrieben worden, zu dem Quadranten AD verhält. Und man kan demnach durch diese Verhältnisse der Bogen einen jeden Winkel anzeigen. Wenn man weiß, wie sich AD zum AC verhält; so kan man allezeit schließen. $AD:AC = ABD:ABC$, und da das dritte Glied bekannt ist, nämlich der rechte Winkel, so kan das vierte Glied oder der Winkel ABC nicht unbekant seyn. Es ist leicht einzusehen, daß dieses richtig sey, es mag der Winkel ABC kleiner oder größer seyn als ein rechter Winkel, und folgendes AC kleiner oder größer als ein Quadrant.

§. 65. Und es können demnach durch dergleichen Verhältnisse der Bogen alle Winkel angegeben werden, aber man muß zum voraus sehen, daß man einen Bogen in so viele gleiche Theile theilen könne als man wil, wenn die Verhältnisse des Quadranten zu dem Bogen des Winkels, dessen Größe man anzeigen wil, durch Zahlen gegeben ist, damit man nämlich den Quadranten in so viele gleiche Theile theilen könne

könne, als erfordert wird, damit man aus einer gehörigen Anzahl VII. solcher Theile hernach den andern Bogen zusammen setzen könne. Oder, Abschnitt. wenn die Verhältniß des Bogens AC zu dem Quadranten AD durch gerade Linien ausgedruckt wird, so muß man wissen zu diesen zwei geraden Linien, und zu dem Quadranten AD die vierte Proportional-Größe zu finden. Dieses letztere zu wissen, ist nicht in der Macht der Geometrie, das erstere kan man zwar ohne sonderlichen Fehler thun, weil man einen jeden Bogen in so viele gleiche Theile theilen kan als man wil, wie wir gelehret V, 79. Es ist aber dieses eine mechanische und keinesweges eine geometrische Arbeit.

S. 66. Indessen pfleget man deswegen, weil, so bald die Verhältniß des Bogens eines Winkels zu einem Quadranten bekannt ist, auch der Winkel bekannt wird, den Bogen, welcher aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, das Maasß des Winkels zu nennen. Zwar kan man nicht sagen, daß ein Bogen jemals einen Winkel messe, wenn man recht eigentlich reden wil. Denn das Maß, wenn man das Wort im eigentlichen Verstande nimmt, muß allezeit, wenn es wiederhohlet wird, oder wenn seiner Theile eines oder etliche genommen werden, dasjenige ausmachen, so gemessen werden sol. Man misset eine Länge durch Ellen, oder durch Ruthen und Schuhe, das ist nach anderen Längen, und nicht nach Pfunden, und die Gewichte der Dinge misset man durch andere Gewichte, und nicht durch Ellen. Ein Bogen aber mag getheilet und wiederhohlet werden wie man wil, so wird dadurch kein Winkel, und kan demnach der Bogen ohnmöglich das eigentliche Maß des Winkels seyn. Es ist demnach bloß dieses die Ursache, warum man den Bogen das Maß des Winkels nennet, mit welchem er den Ausschnitt eines Cirkels ausmachet, weil der Bogen mit dem Winkel zugleich anwächst, so daß immer gleiche Theile des Bogens mit gleichen Theilen des Winkels zugleich entstehen. Woraus folget, daß so bald als die Verhältniß eines Bogens zu einem Quadranten gegeben wird; eben dadurch die Verhältniß des Winkels zu einem rechten Winkel bekannt wird. Wodurch dann der Winkel selbst gegeben wird, weil die Größe des rechten Winkels allezeit bekannt ist. Es giebet also die Verhältniß eines Bogens zu dem Quadranten an, wie sich der Winkel desselben Bogens aus dem rechten Winkel, aus welchem die Größe der Winkel bestimmt zu werden pfleget, und welcher so zu reden, als der Maßstab der Winkel angesehen wird, ausmessen lasse, eben so wie

VII. eine Zahl anzeigen kan, wie oft eine Elle in einer andern Länge enthalten ist. Und in dem Verstande, in welchem man öfters die Zahl der Ellen, Ruthen oder Schuhe, so in einer gewissen Länge enthalten sind, das Maß dieser Länge nennet, wird auch der Bogen das Maß des Winkels genennet.

§. 67. Es können bey ähnlichen Bogen noch einige Kleinigkeiten angemerket werden, welche aus dem besageten gar leicht fließen.

F. 198. Ähnliche Bogen verhalten sich wie ihre Sehnen; das ist, wenn die

199. Cirkelbogen ABC und abc einander ähnlich sind, so ist nachstehende Proportion richtig, $ABC : abc = AC : ac$. Und dieses ist fast ohne weiterem Beweis klar, wenn man nur betrachtet, daß diese Sehnen AC und ac in den ähnlichen Bogen auf einerley Art gezogen sind. VII, 38. Oder, wenn man die Sache deutlicher einsehen will, so ziehe man nach den Mittelpuncten der Bogen D, d die Halbmesser AD, CD , wie auch ad, cd . Weil nun die Bogen ABC und abc ähnlich sind, so sind die Winkel bey D, d einander gleich. VII, 60. Und da ferner die Verhältnisse $AD : DC$ der Verhältnisse $a d : dc$ gleich ist, müssen in beyden die vorhergehenden Glieder den nachfolgenden gleich sind: so sind VII, 28. die Dreyecke ADC, adc ähnlich, und die Verhältnisse $AD : a d$ ist der Verhältnisse $AC : ac$ gleich. Da nun aber die erstere dieser Verhältnisse $AD : a d$ der Verhältnisse der ähnlichen Bogen $ABC : abc$ gleich ist, VII, 53. so muß auch die letztere $AC : ac$ eben dieser Verhältnisse der ähnlichen Bogen gleich seyn, und man hat demnach $ABC : abc = AC : ac$.

§. 68. Vergleichene Abschnitte ABC, abc , deren Bogen einander ähnlich sind, sind auch selbst einander ähnlich. Nichts ist leichter einzusehen als dieses; wenn wir nur dasjenige im Gedächtniß haben, so wir oben von den ähnlichen Figuren überhaupt gesagt, VII, 44. aus welchen es auf mehr als eine Art fließet. Doch es ist genug daß wir betrachten, daß diese Abschnitte aus den ähnlichen Ausschnitten $ABCD, abcd$ entstanden sind, indem man von diesen beyderseits die ähnlichen Dreyecke ACD, acd weggenommen, oder zu denselben hinzugesetzt. Wir haben aber gesehen, daß überhaupt alle Figuren ähnlich sind, welche übrig bleiben, wenn man von ähnlichen Figuren nach und nach ähnliche Dreyecke wegnimmt, oder zu denselben hinzu setzt. Wenigstens ist dieses durch unsere Beweise VII, 44. klar worden.

Die

Die Verhältniß verschiedener geraden Linien, so einen VII.
Cirkel schneiden oder berühren. *Propos.*

S. 69. Wir haben nunmehr bey dieser Materie nichts mehr übrig, als daß wir noch einige Proportionen bey solchen geraden Linien betrachten, welche den Umkreis eines Cirkels schneiden oder berühren. Es wird sich dieses alles auf einen einzigen Hauptsatz bringen lassen. Dieser betrifft zwey gerade Linien, welche von einem nach Belieben angenommenen Puncte beiderseits so lange fortgezogen werden, bis sie den Umkreis des Cirkels erreichen. Die Theile dieser Linien zwischen dem Umkreise und dem beliebig angenommenen Puncte sind einander proportional.

S. 70. Man nehme innerhalb oder außerhalb des Umkreises eines Cirkels ein Punct A wo man wil, und ziehe durch dasselbe zwey gerade Linien, welche den Umkreis des Cirkels in B und C; D und E schneiden, oder schneiden würden, wenn man sie verlängerte, so sind die vier Theile dieser Linien dergestalt proportional, daß man sagen kan $BA:AE = AD:AC$, und welches aus diesem fließet $BA:AD = AE:AC$; und diese Proportion ist zu erweisen. Man ziehe zu dem Ende BE und DC; so siehet man leicht, daß die Winkel an dem Umkreise bey B und C beide auf dem Bogen BD stehen. Da nun alle Winkel an dem Umkreise eines Cirkels, die auf einem Bogen stehen, einander gleich sind V. 57. so sind auch diese Winkel BED und BCD einander gleich. Es sind aber auch die einander bey A entgegen stehende, oder in einen zusammenfallende Winkel gleich, und haben demnach die Dreyecke CAD und EAB zweyen gleiche Winkel, nemlich die bey A, und so dann $ACD = AEB$. Also sind diese Dreyecke ACD, AEB einander ähnlich VII. 23. und ihre Seiten, die zwischen gleichen Winkeln liegen, sind proportional. Es ist also $BA:AD = AE:AC$, oder $BA:AE = AD:AC$, denn diese Seiten liegen zwischen den gleichen Winkeln.

S. 71. Wir wollen die Folge des ersten Falles dieses Satzes betrachten, da A innerhalb des Cirkels fällt, ehe wir weiter gehen. Wenn eine der beiden Linien in A in zwey gleiche Theile getheilet ist, sam Exempel wenn $AD = AE$, so gehet die Proportion $BA:AD = AE:AC$ in einem fort, und ist zusammenhangend. Denn man kan hier vor das dritte Glied AE, die ihm gleiche Linie AD setzen, wodurch die Proportion wird $BA:AD = AD:AC$, und dadurch steht

VII. het man, was gesagt worden ist, deutlich. Dieses kan uns eine Anweisung geben, wie zwischen zwey gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden ist. Gesezt die zwey gegebenen geraden Linien wären BA und AC, und man wolte die mittlere Proportionallinie zwischen denselben haben, so müste man nur, nachdem man einen Cirkelkreis durch B und C nach Belieben gezogen, hernach die Linie DAE in denselben durch das Punct A so legen, daß die Theile derselben DA und AE gleich würden, so wäre ein solcher Theil AD oder AE die mittlere Proportionallinie.

S. 72. Diese Lage aber der Linie DE, in welcher sie von dem Puncte A in zwey gleiche Theile geschnitten wird, bekommt man am leichtesten, wenn man BAC vor den Durchmesser annimmt, und so dann DAE durch das Punct A auf denselben perpendicular ziehet, V. 19. wodurch die Auflösung der Aufgabe, zwischen zwey gegebenen geraden Linien eine mittlere Proportionallinie zu finden, gar leicht wird. Es seyen die zwey gegebenen geraden Linien BA, AC: Denn man muß vor allen Dingen diese Linien dergestalt an einander setzen, daß sie mit einander eine gerade Linie BC ausmachen. Diese Linie BC nehme man vor den Durchmesser eines Cirkelkreises an, welchen man beschreibet, indem man nemlich, wie bekannt genug ist, BC in zwey gleiche Theile theilet, und dadurch den Mittelpunct und den Radius findet. Ist der Cirkel beschrieben, so ziehe man nunmehr auf BC durch A die Sehne DE perpendicular, so ist DA oder EA die gesuchte mittlere Proportionallinie, und man kan sagen $BA:AD = AD:AC$; oder $BA:AE = AE:AC$. Es ist aus dem so wir gesagt die Richtigkeit dieser Auflösung gar leicht einzusehen, und fast kein weiterer Beweis nöthig. Nach dem allgemeinen Satze ist $BA:AD = AE:AC$. Weil aber auf die Sehne EAD der Durchmesser BAC perpendicular gezogen ist, so wird ED in A in zwey gleiche Theile getheilet V. 19. und ist $AD = AE$. Wenn man demnach in dieser Proportion vor AD die AE setzt, so wird allerdings $BA:AE = AE:AC$, oder auch $BA:AD = AD:AC$.

S. 73. Man siehet leicht, daß in der Ausübung man die eine Helfte des Cirkelkreises nicht brauchet, und daß man so gleich die mittlere Proportionallinien zwischen zwey geraden Linien BA, AC findet, wenn man auf BC den halben Cirkel BEC beschreibet, und so dann auf den Durchmesser BC an das Punct A die Perpendicular-
linie

Linie AE aufrichtet, und sie bis an den Eirkelkreis in E verlängert. VII. Es ist so dann AE die gesuchte mittlere proportionallinie. Und man kan dieses in Form eines Satzes dergestalt verfassen: wenn man auf den Durchmesser eines Eirkels BC eine Perpendicularlinie AE setzt, welche bis an den Umkreis reicht, so ist diese die mittlere Proportionallinie zwischen den Theilen des Durchmessers BA und AC, und man kan sagen $BA:AE=AE:AC$.

§. 74. Es gehet auch in dem andern Falle wenn A ausser dem Eirkel genommen ist, die Proportion $AB:AD=AE:AC$ in einem fort, wenn AD der AE gleich wird. Dieses kan nicht geschehen so lange ADE den Eirkel wirklich schneidet, denn da ist allezeit A E grösser als AD. Da aber die Proportion $AB:AD=AE:$

Linien AC, AD gezogen seyn, wie sie antreffen, so wird dieselbe auch AE sich von der AC immer weiter der Theil derselben ED immer kleinerlich gar verlieret, indem die Punkten. Dieses geschieht in dem Falle: In diesem Falle fällt kein Theil der Punkte D und E fallen zusammen, Man wird demnach auch in diesem formiren können, und sagen, $AB:AD=AE:$ so kan man eines vor $n AB:AD=AD:AC$.

F. 201.

203.

F. 203.

§. 75. Woraus erhellet, daß die Berührungslinie aus dem Punkte A, nemlich AD die mittlere Proportionallinie sey zwischen den Theilen AB und AC einer andern Linie ABC, welche aus einem Punkte A der Berührungslinie dergestalt gezogen ist, daß sie den Umkreis des Eirkels in einem Punkte B schneidet, und sich ferner in C in dem Umkreise endiget. Und dieses kan eine neue Anweisung geben zwischen zw. geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden. Es seyen die gegebene Linien AB und AC, deren kleinere man auf die grössere, aus dem Punkte A gelegt. Man beschreibe einen Eirkelkreis durch die beiden Punkte B und C, und ziehe durch A eine gerade Linie AD, welche diesen Eirkel berühre: Diese ist die gesuchte mittlere Proportionallinie. Die Anweisung ist leicht zu begreifen, aber die Ausübung ist etwas schwerer als die vorige, und erfordert

VII. außer dem bereits beschriebenen Cirkel, noch die Beschreibung eines andern Cirkels, vermittelst welchen man das Punct DE findet, an welches die Berührungslinie AD zu ziehen ist V. 73.

F. 203. S. 76. Sollte man aber bey dem gegebenen Beweise, daß $AB:AD = AD:AC$ Schwierigkeit finden, so ziehe man wie in der 201 Figur, aus welcher die gegenwärtige 203 gestossen, die Linien DC und BE: so ist der Winkel BDA, welchen die Berührungslinie DA mit der Sehne DB macht, gleich dem Winkel DCB, der bey C an den Umkreis stößet, und auf eben dem Bogen BD steht, welchen die Sehne BD abschneidet V. 61. Da nun auch der Winkel A den beiden Dreiecken ADB, ACD gemeinschaftlich ist, so sind zweyen Winkel des erstern dieser Dreiecke ABD, nemlich A und ADB gleich zweyen Winkeln des andern ACD, nemlich dem A und dem DCA. Demnach sind VII. 23. diese Dreiecke ähnlich, und es verhält sich in dem kleineren BA zur AD, wie sich in dem grösseren AD zur AC verhält, und also ist die Proportion $AB:AD = AD:AC$ richtig.

S. 77. Wenn bey dieser Figur DC durch den Mittelpunct gehet, und also ein Durchmesser des Cirkels ist, so wird die Erfindung der mittleren Proportionallinie nach dieser Art viel leichter. In diesem Falle ist der Winkel ADC, welchen die Berührungslinie AD mit dem Durchmesser DC macht, gerade, V. 47. und EBC ist ebenfalls ein gerader Winkel, denn er steht in dem halben Cirkel DBC, V. 68. Demnach ist ADC ein rechtwinklichtes Dreieck, und aus der Spitze des rechten Winkels D ist auf die entgegen gesetzte Seite AC die Perpendicularlinie DB gefallen, die Seite aber AD ist die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC.

F. 204. S. 78. Man pfleget dieses indgemein auf eine andere Art zu beweisen, und wir wollen diesen Beweis mit beybringen, weil er uns die Sache deutlicher machen kan. Wir haben in dem halben Cirkel ADC das rechtwinklichte Dreieck ADC beschrieben, und aus der Spitze des rechten Winkels D die gerade Linie DB auf die entgegen gesetzte Seite, das ist auf den Durchmesser AC, perpendicular gezogen: es ist zu beweisen, daß die Proportion richtig sey: $AB:AD = AD:AC$. Es giebet sich aber dieser Beweis gar leicht, wenn man betrachet, daß in den beiden rechtwinklichten Dreiecken ADC, ABD die Winkel bey A gemeinschaftlich sind. Denn daraus folget, daß diese Dreiecke ADC, ABD, einander ähnlich sind, weil zweyen Win-

Es des einen ADC und A zweien Winkeln des andern, ABD und A , VII. gleich sind. Es sind also die Seiten dieser Dreiecke proportional, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, und demnach verhält sich in dem Dreiecke ABD die Seite AB zu der Seite AD , wie sich in dem Dreiecke ADC die Seite AD zur Seite AC verhält. Kurz es ist $AB:AD = AD:AC$.

§. 79. Man sieht leicht, daß man auf eben die Art erweisen könne, daß auch das Dreieck BDC dem Dreiecke ADC ähnlich sey. Denn auch das Dreieck DBC hat bey B einen rechten Winkel, und der Winkel C ist demselben und dem Dreieck ADC gemeinschaftlich. Also kan man auch sagen $BC:CD = CD:AC$. Es ist aber dieser Satz von dem

§. 80. U
lichkeit dieser
Wir bemerken
Proportionalli
sey. Nachdem
 AC geleyet: fi
halben Cirkel

diget, setze man BD auf AC perpendicular, welche den Umlreis in D schneiden wird. Die Linie AD , welche nunmehr leicht kan gezogen werden, ist die mittlere Proportionallinie, welche man suchte.

§. 81. Weil das Dreieck ABD so wohl, als das Dreieck DBC , dem Dreiecke ADC ähnlich ist; so sind auch diese Dreiecke ABD , DBC einander ähnlich. Nemlich weil in den Dreiecken ABD , ADC die rechten Winkel ABD und ADC gleich sind, und $A = A$, so ist auch $ADB = C$, und folgendes sind in den zwey rechtwinklichten Dreiecken ABD , DBC , außer den geraden Winkeln bey B , auch die Winkel ADB und C gleich; und demnach diese Dreiecke einander ähnlich. Vergleicher man nun wieder in diesen Dreiecken die Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, so verhält sich in dem Dreiecke ABD die Seite AB zu der Seite BD , wie in dem Dreiecke DBC sich die Seite DB zur Seite BC verhält, das ist, es ist $AB:BD = BD:BC$. Denn diese Seiten liegen in beiden Dreiecken zwischen gleichen Winkeln. Dieses ist der Satz, welchen wir oben VII, 73. auf eine andere Art heraus gebracht haben.

§. 82.

Uch

Achter Abschnitt.

Von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

S. 1.

So weit konnten wir in der Geometrie kommen, indem wir blos die einfache Verhältnisse zum Grund legeten. Das übrige kommt grossen Theils auf zusammengesetzte Verhältnisse an, welche wir demnach was ebenfalls bekannt machen wollen, ehe wir weiter gehen, damit so dann alles in einem unzerrissenen Zusammenhang abgehandelt werden könne. Es steht uns nemlich noch die Betrachtung der Oberflächen und Körper vor, nachdem wir von den geraden Linien und dem Eirkelkreise alle diejenige Eigenschaften betrachtet haben, welche einem angehenden Geometra zu wissen nöthig sind. Und diese sind es bey deren Vergleichung das meiste auf die zusammengesetzte Verhältnisse ankommt.

Begriffe von der Zusammensetzung der Verhältnisse.

S. 2. Wir müssen uns vor allen Dingen einen Begriff davon machen, was diese Zusammensetzung der Verhältnisse eigentlich heisse, und dieses wird am leichtesten geschehen können, wenn wir die Sache zuerst durch Zahlen erläutern, und so dann auch auf die ungetheilte Grössen übergehen. Die Verhältniß der Zahl 5 zu 3 ist die Art und Weise wie die Zahl 5 aus der 3 entstehet VI, 31. Man kan aber 5 unmittelbar aus der 3 machen. Man theile zu dem Ende diese letztere Zahl 3 in ihre Einheiten, und setze deren fünf zusammen, so hat man die erstere Zahl 5. Stellet man sich dieses vor, so hat man einen Begriff von der Verhältniß 5: 3, und man siehet diese Verhältniß als einfach an. Man kan aber auch die 5 aus der 3 durch einen oder etliche Absätze erhalten, folgender gestalt: Man mache aus der Zahl 3 erstlich die 30, indem man nemlich diese Zahl durch 10 multipliret; und diese Zahl 30 theile man durch 6, so kommet wieder die Zahl 5. Indem man sich vorstellet, daß die Zahl 5 auf diese Art aus der Zahl 3 entstehen könne, so stellet man sich zwar ebenfalls die Verhältniß der 5 zu 3 vor: aber man betrachtet diese Verhältniß nicht als

einfach. Man machet die 5 nicht unmittelbar aus der 3, sondern man VIII.
machet aus der 3 erstlich eine andere Zahl 30, und indem man betrach- Abschnitt.
tet, wie diese Zahl 30 aus der 3 entstehe, so stellet man sich die Ver-
hältniß 30:3 vor. Aus der ersteren dieser Zahlen 30 machet man so-
dann die 5, welches wieder nicht geschehen kan, wenn man sich nicht
die Art und Weise, wie 5 aus der 30 wird, das ist, die Verhältniß
5:30, vorstellt. Und man machet sich also in dem Falle, welchen wir
betrachten, einen Begriff von der Verhältniß 5:3, indem man die zwei
Verhältnisse 30:3 und 5:30 betrachtet. Dieses will man andeuten,
wenn man saget, man setze die Verhältniß 5:3 aus den zwei Verhält-
nissen 5:30 und 30:3 zusammen.

§. 3. Eben so ist es, zu
schreiben, nach Belieben, ein

Man kan sich vorstellen, 5
legten 3 werde, wenn man
weil man hier die Zahl 9 u
sich die Verhältniß 9:3 ab
weiter die Zahl 12 machen
man $\frac{1}{3}$ der 9 annimmt. Es
letzten 3 gemacht. Dehn
aus der 3, und aus der 9
allerdings diese 12 endlich
sich die Art vor, wie 9 au
hat man allerdings eben da
wie 12 aus der 3 wird: in
12:3 dadurch vor, wenn u
stellt.* Eben dadurch aber, weil man sich die Verhältniß 12:3 nicht
auf einmal, sondern durch zwei Verhältnisse 9:3 und 12:9 vorstellt,
so setzet man die Verhältniß 12:3 aus den ebenerwähnten 9:3 und 12:9
zusammen. Gehet man weiter, und betrachtet, daß man aus der Zahl
12 wieder die Zahl 10 machen könne, wenn man $\frac{2}{3}$ der erstern Zahl 12
annimmt, so stellet man sich wieder die Verhältniß 12:10 auf einmal
vor, und als einfach. Sehen wir aber zum Voraus, daß man auch
die Verhältnisse 12:9 und 9:3 wisse, so bekommt man eben dadurch,
indem man sich auch die Verhältniß 10:12 vorstellt, einen Begriff
von der Verhältniß 10:3. Aber diese Verhältniß 10:3 ist nunmehr
aus den drei Verhältnissen 9:3, 12:9 und 10:12 zusammen gesetzt,

VIII. als von welchen allen man Begriffe haben muß, wenn man sich die Verhältnisse vorstellen soll. Stellet man sich nun ausser der vorigen auch die Verhältnisse $5:10$ vor, so erlanget man auch einen Begriff von der Verhältniß $5:3$, denn man siehet, wie 5 aus der 3 entstehen könne. Allein weil man 5 aus der 3 nicht unmittelbar gemacht, sondern durch vier Absätze, indem man nemlich aus der 3 erstlich 9 , sodann aus der 9 die Zahl 12 , aus dieser wieder 10 , und sodann erst aus 10 die 5 heraus gebracht; und weil man sich die vier Verhältnisse $9:3$, $12:9$, $10:12$ und $5:10$ alle vorgestellet, indem man sich einen Begriff von der Verhältniß $5:3$ machen wollen, so setzet man die Verhältniß $5:3$ aus den besagten vier Verhältnissen zusammen.

Verhältnisse vorstellen will.

§. 5. Und zwar ist es gänzlich willkührlich, was man vor eine Zahl zwischen die Glieder einer Verhältniß setze, wenn man dieselbe aus zwei Verhältnissen zusammen setzen will; und was man vor zwei Zahlen zwischen die Glieder einer Verhältniß bringe, wenn man die Verhältniß aus dreien zusammen setzen will; wie auch, was vor drei Zahlen man wöhle, um sie zwischen die Glieder einer Verhältniß zu setzen, wenn man sich dieselbe, als aus vier Verhältnissen zusammen gesetzt, vorstellen will. Die Verhältniß $3:2$ wird aus den groen $3:n$ und $n:2$ zusammen gesetzt; was auch n vor eine Zahl bedeute, wenn nur ihre Größe bekannt ist, und eben die Verhältniß $3:2$ wird auch aus den dreu Verhältnissen $3:n$, $n:m$ und $m:2$ zusammen gesetzt, wie auch aus diesen viereu $3:n$, $n:m$, $m:p$, $p:2$, und auch hier kan man

man sich unter den Buchstaben *n, m, p*, jede beliebige Zahlen vorstellen, VII. sie mögen gleich oder ungleich seyn, wie man will. Abschnitt:

§. 6. Man darf aber die Verhältnisse, aus welchen man eine andere zusammen setzt, durch jede Zahlen ausdrücken, welche sie ausdrücken können. Der Begriff der Verhältniß wird dadurch nicht geändert, ja er wird zuweilen dadurch erleichtert, wenn man nemlich kleinere Zahlen annimmt,

durch größere ausgedrückt
niß $12:2$ sey aus der 6

Man kan aber auch diese
drücken, die erstere $12:$

und sodann sagen: Die
hältnisse $2:1$ und $3:1$

Zusammenfügung
griffe nichts andere. Die

selbe eine Zahl setzen will
man keine andere Zahl

$6:2$ der Verhältniß $3:1$ gleich ist. Und wenn man weiter vor 6 wieder eine andere Zahl setzen will; welche sich zu der 6 verhält, wie 2 zu 1,

so kan dieses wieder keine andere Zahl seyn als die 12,
und man kommt also auf eben die Zahl 12, wenn man

eine andere, nach den Verhältnissen $3:1$ und $2:1$, nimmt
man kommt, wenn man aus 2 eine Zahl nach den 100

und $12:6$ heraus bringet. Ein mehreres wollen wir
so wir hier gesagt, nicht verstanden wissen.

§. 7. Sind aber die 100 Verhältnisse
zusammen gesetzt ist, einander gleich,

man gesetzte Verhältniß im Lateinischen
stift, und ist eine Verhältniß aus drey

man gesetzet, so sagt man; diese gleiche
get, und dadurch die zusammen gesetzte

worden. Einem teutschen Leser können d
schwerlich gefallen. Wir werden also

Mund-Art etwas gemächlicher folgendergesta
ten 27, 9, 3 ist die Verhältniß 27 zu 3 aus

und $9:3$ zusammen gesetzet, und diese W
der Verhältniß $3:1$ gleich. In Diesem und Vergleichem wollen wir aus-

drücken,

VIII. drücken, indem wir sagen, die Verhältniß 27:3 bestehe aus der Verhältniß 27:9, oder 9:3, oder 3:1 zweymal genommen, oder die Verhältniß 27:3 sey aus der Verhältniß 3:1 zweymal genommen, zusammen gesetzt. Und da bey den Zahlen 81, 27, 9, 3 die Verhältniß 81 zu 3 aus den drey Verhältnissen 81:27, 27:9, 9:3 zusammen gesetzt ist, und diese Verhältnisse einander, und der Verhältniß 3:1 wieder gleich sind, so wollen wir dieses dadurch ausdrücken, wenn wir sagen, die Verhältniß 81:3 bestehe aus der Verhältniß 81:27, oder 27:9, oder 9:3, oder 3:1, dreyimal genommen, oder sie sey aus der Verhältniß 3:1 dreyimal genommen, zusammen gesetzt. Eben so ist bey den Zahlen 81, 27, 9, 3, 1 die Verhältniß 81:1 aus der Verhältniß 3:1 viermal genommen, zusammen gesetzt worden, oder sie bestehe aus der Verhältniß 3:1, viermal genommen.

S. 8. Man kan dieses beides sich durch Zeichen folgendergestalt vorstellen, wenn A, B, C, D &c., und M, N, O, P &c. beliebige Zahlen bedeuten, und es ist

$$A:B = M:N$$

$$B:C = O:P$$

$$C:D = Q:R$$

$$D:E = S:T$$

so sagt man, die Verhältniß A:C sey aus den zwey Verhältnissen M:N und O:P zusammen gesetzt, welche den zwey Verhältnissen A:B und B:C gleich sind: und die Verhältniß A:D sey aus den drey Verhältnissen M:N, O:P, Q:R zusammen gesetzt, welche den drey Verhältnissen A:B, B:C, C:D gleich sind, und die Verhältniß A:E sey aus den vier Verhältnissen M:N, O:P, Q:R, S:T zusammen gesetzt, welche den vier Verhältnissen A:B, B:C, C:D, D:E gleich sind, und so fort. In den ersteren Verhältnissen A:B, B:C, und so weiter, kommt jedes Glied zweymal vor, ausser dem ersten und dem letzten, und stehet einmal vorne in der Verhältniß, das andere mal hinten.

S. 9. Sind aber die Verhältnisse M:N, O:P und so fort, einander gleich, und kan man also eine derselben vor die übrigen alle setzen, und folgendes schreiben:

$$A:B = M:N$$

$$B:C = M:N$$

$$C:D = M:N$$

$$D:E = M:N$$

so bestehet die Verhältniß $A : C$ aus der Verhältniß $M : N$, zweymal genommen; die Verhältniß $A : D$ bestehet aus eben der Verhältniß $M : N$, dreymal genommen, und die Verhältniß $A : E$ ist aus der Verhältniß $M : N$, viermal genommen, zusammen gesetzt.

§. 10. Dieses alles ist nunmehr gar leicht auch auf ungetheilte Grössen anzuwenden; nur muß man, wenn man auch hier bis auf die ersten Gründe zurücke gehen will, sich vorstellen, daß die erste der Grössen A, B aus der andern, so werde, wie wir VI, 69. gezeigt haben, daß eine jede Grösse aus einer andern werden kan, indem nemlich die erstere A durch eben das gleichförmige Wachsthum entsteht, durch welches B erzeugt wird. Doch hat man eben nicht nöthig, so weit zurücke zu gehen. Man kan bey dem anfangen, so wir eben gezeigt haben, und sehen, daß A, B, C , wie auch M, N, P und so fort, dergleichen Grössen bedeuten, welche eben nicht aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, und merken, daß, wenn die Proportionen richtig sind, die wir VIII, 8. gesetzt: auch hier die Benennungen statt haben, die eben VIII, 7. erklärt worden sind. Man siehet aus dem, so gesagt worden ist, leicht, daß man auch in dem Falle, wenn die Grössen A, B, C , und M, N, P , nicht getheilt sind, in eben dem Verstande sagen könne, die Verhältniß $A : C$ sey aus den zweyen $A : B$ und $B : C$ zusammen gesetzt, wie auch, daß die Verhältniß $A : D$ durch die Zusammensetzung der drey Verhältnisse $A : B, B : C, C : D$, und die Verhältniß $A : E$ durch die Zusammensetzung der vier Verhältnisse $A : B, B : C, C : D$ und $D : E$ heraus komme. Eben so leicht begreift man auch, daß man die Verhältniß $A : B$ durch die Verhältniß zweier andern Grössen $M : N$ ausdrücken könne, und die Verhältniß $B : C$ durch die Verhältniß $O : P$, und daß, wenn dieses geschehen, auch hier die Verhältniß $A : C$ aus den zweyen $M : N$ und $O : P$, und die Verhältniß $A : D$ aus den dreyen $M : N, O : P, Q : R$ sich zusammen setzen lasse, und so weiter.

§. 11. Eben so leicht kan man auch unter den Buchstaben A, B, C, D, E des 9. Absatzes, sich Linien, oder nach Belieben andere Grössen, vorstellen, deren jede gegen die nachfolgende eine Verhältniß hat, welche der Verhältniß $M : N$ gleich ist, wodurch alle diese Verhältnisse $A : B, B : C, C : D$ und $D : E$ gleich werden. Ist dieses, so ist, wie bey Zahlen, die Verhältniß $A : C$ aus der Verhältniß $M : N$ zweymal genommen, zusammen gesetzt, und die Verhältniß $A : D$ bestehet aus der Verhältniß $M : N$, dreymal genommen; die Verhältniß $A : E$ aber

VIII. ist aus eben der Verhältniß $M; N$, viermal genommen, zusammen
 Abschnitt. gesetzt.

§. 12. Von diesen zusammengesetzten Verhältnissen sind wieder verschiedene Regeln zu merken, welche wir dergestalt erweisen werden, daß sie sich vor alle Arten der Größen schicken. Weil aber die Größen, welche aus gleichen Theilen zusammen gesetzt sind, und deren Verhältniß sich durch Zahlen ausdrücken läßt, öfters einige Eigenschaften voraus haben, und sonst leichter zu übersehen sind, so wollen wir, wie auch vor dem geschehen, uns noch ferner derselben bedienen; das übrige zu erläutern und desto deutlicher zu machen.

Wie die Verhältnisse zusammen zu setzen sind.

§. 13. Wir bemerken vor allen Dingen, daß, wenn ein Verhältniß, deren erstes Glied A gegeben ist, aus zwei andern Verhältnissen $M: N$ und $O: P$ zusammen zu setzen ist, man nachfolgendergestalt verfahren müsse. Man findet erstlich zu M, N und A die vierte Proportional-Zahl, oder die vierte Proportional-Linie. Brides zu verrichten, haben wir gewiesen VI, 115. VII, 13., und es kan also die Zahl oder GröÙe, die mit M, N und A die Proportion voll macht, welche wir B nennen wollen, hier als bekannt angenommen werden. Hat man diese B ; so sage man weiter, wie $O: P$; so diese B zur vierten, welche obensals gefunden werden kan. Stellen wir uns nun diese unter C vor, so ist die Verhältniß $A: C$ aus den zwei Verhältnissen $M: N$ und $O: P$ zusammen gesetzt. Man siehet dieses leicht ein, denn es folget, was wir hier gesagt, aus den gegebenen Begriffen unmittelbar. Man hat gemacht $A: B = M: N$, und

$B: C = O: P$, also ist allerdings VIII, 8. die Verhältniß $A: C$ aus den zweien $M: N$ und $O: P$ zusammen gesetzt.

§. 14. Zum Exempel: Es ist eine Verhältniß aus den zweien $2: 3$ und $4: 7$ zusammen zu setzen, und das erste Glied dieser Verhältniß soll 5 seyn: so ist die Bedeutung des Buchstabens A nunmehr 5 , M bedeutet 2 , N ist $= 3$, $O = 4$ und $P = 7$. Man sage also $2: 3 = 5:$

$\frac{3 \times 5}{2}$. Diese Zahl ist diejenige, welche B bedeutet. Nun sage man

ferner $4: 7 = \frac{3 \times 5}{2} : C$, so ist diese die Zahl C , und dem-

nach

nach $C = \frac{105}{8} = 13\frac{1}{8}$, und die Verhältniß $5:13\frac{1}{8}$ ist aus den zwei Verhältnissen $2:3$ und $4:7$ zusammen gesetzt. VIII.
 abschneidet.

§. 15. Man siehet, daß man auf eben die Art verfahren müsse, wenn man eine Verhältniß, deren erstes Glied gegeben ist, aus drey, vier oder mehreren anderen zusammen setzen soll. Es sey das erste Glied noch A; man soll eine Verhältniß aus den vierten M:N, O:P, Q:R und S:T zusammen setzen: so mache man nach und nach

$$M:N = A:B$$

$$O:P = B:C$$

$$Q:R = C:D$$

$$S:T = D:E$$

Man suche nemlich zu M, N und A die vierte Proportional-Zahl, oder Linie B. Diese nehme man, so bald man sie gefunden, an, und suche wieder zu O, P und B die vierte Proportional-Größe C. Mit dieser verfähre man, wie vorhero mit B, und eben so mache man es ferner, bis nach Anzeigung der Buchstaben, man die gegebene Verhältnisse alle gebrauchet hat: so ist die Verhältniß A:E die gesuchte, und aus den gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzt. Die Sache ist klar, und brauchet keiner weiteren Erläuterung, wenn man nur das vorübergehende wohl verstanden hat.

§. 16. Hieraus erhellet dasjenige nochmals deutlich, so schon in dem vorigen lieget, daß nemlich in der Zusammenfügung der Verhältnisse nichts geändert werde, durch was vor Glieder man auch die Verhältnisse ausdrücke, welche zusammen zu setzen sind. VIII, 6. Man drücke die Verhältniß M:N durch diese oder jene Zahlen oder Linien aus, oder man mache $M:N = m:n$, setze hernach an die Stelle M:N die Verhältniß $m:n$, und verfähre, wie gewiesen worden, so wird das Glied B nicht anders gefunden, als vorhero; und wenn man hernach an statt O:P die ihr gleiche Verhältniß $o:p$ gebraucht, so findet man in der Proportion $o:p = B:C$ das Glied C wieder so groß als vorhero, da man gemacht $O:P = B:C$, und so ist das immer. Man kan also vor eine jede der Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen zu setzen ist, eine andere Verhältniß annehmen, welche jener gleich ist, ohne daß dadurch in der zusammengesetzten Verhältniß etwas geändert werde.

VIII.
Schnitt.

§. 17. Ist aber das erste Glied der Verhältniß, welche man durch die Zusammensetzung anderer heraus bringen soll, nicht gegeben, so kan man es nach Belieben annehmen. Denn man bekommt zwar nicht eben die Glieder, aber doch eben die Verhältniß, man mag das erste Glied nehmen wie man will. Es sey aus den zwei Verhältnissen $2:3$ und $4:5$ eine Verhältniß zusammen zu sehen. Man nehme 1 vor das erste Glied derselben, so muß man sagen, wie 2 zu 3, so das angenommene Glied 1 zu der vierten Zahl, welche ist $\frac{3}{2}$, und noch einmal wie 4 zu 5, so die gefundene $\frac{3}{2}$ zu der vierten $\frac{15}{4}$. Die Verhältniß $1:\frac{15}{4}$ ist nunmehr aus den zwei gegebenen $2:3$ und $4:5$ zusammen gesetzt. Man nehme zweitens vor die erste Zahl 2, und sage wieder wie $2:3$, so 2 zu der vierten, welche hier 3 ist, und ferner wie 4 zu 5, so die gefundene 3 zu $\frac{15}{4}$, so ist die zusammengesetzte Verhältniß nunmehr $2:\frac{15}{4}$. Es ist aber auch diese mit der vorigen $1:\frac{15}{4}$ einerley. Denn man multiplicire die beyden Glieder der ersten Verhältniß durch 4, so wird $8:15=2:\frac{15}{4}$, die beyden Glieder der letzten Verhältniß aber multiplicire man durch 8, so wird $8:15=1:\frac{15}{4}$. Weil nun die beyden Verhältnisse $2:\frac{15}{4}$, und $1:\frac{15}{4}$ einer dritten, nemlich der Verhältniß $8:15$ gleich sind, so sind sie auch einander gleich. Und so kommen immer einerley Verhältnisse durch eine dergleichen Zusammensetzung zweier gleichen Verhältnisse heraus, man mag das erste Glied nehmen wie man wil.

§. 18. Und daß dieses allezeit richtig sey, und bey den angenommenen Zahlen nicht etwa nur von ohngefehr zugetroffen, können wir folgendergestalt zeigen. Man mache $M:N=A:B$ aber auch $M:N=a:b$, und $O:P=B:C$ wie auch $O:P=b:c$; so sind die Verhältnisse $A:C$ und $a:c$ aus eben den Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ zusammen gesetzt, aber die ersten Glieder derselben A und a sind verschieden. Wir behaupten, daß dennoch die Verhältniß $A:C$ der Verhältniß $a:c$ gleich, und die Proportion $A:C=a:c$ richtig seyn werde. Denn wenn man die ersteren zwei Proportionen $M:N=A:B$, und $M:N=a:b$ ansieht, so findet man, daß man aus denselben schließen könne $A:B=a:b$, und eben so folget aus den zwei letzteren $B:C=b:c$. Man verwechselt die mittleren Glieder dieser Proportionen, VI, 107. so bekommt man $A:a=B:b$, und $B:b=C:c$. Da nun also die Verhältniß $A:a$ der Verhältniß $B:b$ so wohl gleich ist, als die Verhältniß $C:c$, so müssen auch diese Verhältnisse einander selbst gleich seyn $A:a=C:c$, woraus, durch abmah-

mahliges Wecheln der mittleren Glieder, folget $A:C = a:c$, und die Richtigkeit dieser Proportion sollen wir erweisen.

VIII.
Abschnitt.

§. 19. Man kan hieraus ohne große Weitläufigkeit schließen, daß auch wenn man aus drey oder vier Verhältnissen eine andere zusammen setzet, diese einerley werde, man mag das erste Glied annehmen wie man wil. Denn wenn man aus den zwey Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ die Verhältniß $A:C$ heraus gebracht hat, und man hat noch eine Verhältniß $Q:R$ übrig, welche man zu der vorigen hinzu setzen sol, damit eine Verhältniß aus den dreyen $M:N$, $O:P$, und $Q:R$ zusammen gesezet werde, so muß man sagen, wie $Q:R = C:D$, und die Verhältniß $A:D$ ist nunmehr aus den drey gegebenen Verhältnissen zusammen gesezet. Eben diese Verhältniß aber mit eben den Gliedern A und D bekommt man auch, wenn man die zwey Verhältnisse $A:C$ und $Q:R$ zusammen setzet. Denn wenn man dieses thun wil, so muß man eben so verfahren wie vorhero. Man muß sagen wie A zu C so A zu C , und ferner wie $Q:R$ so C zu D . Demnach kommt in der That die Zusammenfügung dreyer Verhältnisse mit der Zusammenfügung zweyer Verhältnisse auf eines hinaus, weil man nemlich doch zu der Verhältniß, welche durch die Zusammenfügung der zwey ersteren entstanden ist, und die man als einfach betrachten kan, die dritte Verhältniß hinzu setzen muß. Da aber, wenn man zwey Verhältnisse zusammen setzet, man das Glied A nach Belieben annehmen kan, ohne die Verhältniß selbst dadurch zu verändern, so muß dieses bey der Zusammenfügung dreyer Verhältnisse ebenfalls statt haben. — Man siehet leicht, daß man in diesen Schlüssen fortfahren, und durch dieselben heraus bringen könne, daß auch bey der Zusammenfügung vierer Verhältnisse das erste Glied nach Belieben angenommen werden könne, ohne dadurch die Verhältniß, welche man durch die Zusammenfügung heraus bringet, zu ändern, weil man hier in der That nur die letzte der vier gegebenen Verhältnisse mit derjenigen zusammen setzen muß, welche durch die Zusammenfügung der drey erstern entstanden ist, und so gehet es immer fort.

§. 20. Sind nun die Verhältnisse, welche man zusammen setzen wil, $M:N$, $O:P$, $Q:R$, $S:T$, und so weiter in Zahlen gegeben, und man nimmet das erste Glied A nach Belieben an, und verfähret noch wie gewiesen worden ist, indem man machet:

555 3

$M:N$

VIII.
Abchnitt

$$M : N = A : B$$

$$O : P = B : C$$

$$Q : R = C : D$$

$$S : T = D : E$$

so ist $B = \frac{N}{M} \times A$, denn $\frac{N}{M} \times A$, bedeutet allezeit die vierte Proportionalzahl zu den dreien M, N und A , VI, 114. und diese vierte Zahl ist B . Eben so ist $C = \frac{P}{O} \times B$, und $D = \frac{R}{Q} \times C$, und $E = \frac{T}{S} \times D$. Und wenn man in der Ausdrückung $C = \frac{P}{O} \times B$, an statt der B , die ihr gleiche Zahl $\frac{N}{M} \times A$ setzt, so bekommt man $C = \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$. Setzt man dieses in dem Ausdrucke $D = \frac{R}{Q} \times C$ an die Stelle des C , so wird $D = \frac{R}{Q} \times \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$, und wenn man dieses letzte wieder in der Ausdrückung $E = \frac{T}{S} \times D$ an die Stelle der D setzt, so wird $E = \frac{T}{S} \times \frac{R}{Q} \times \frac{P}{O} \times \frac{N}{M} \times A$. Oder wenn man die Brüche wirklich multipliciret, so ist

$$B = \frac{N}{M} \times A$$

$$C = \frac{P \times N}{O \times M} \times A$$

$$D = \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$$

$$E = \frac{T \times R \times P \times N}{S \times Q \times O \times M} \times A$$

Und wenn demnach überall das erste Glied A ist, so bedeutet $\frac{N}{M} \times A$ das zweite Glied B der Verhältniß, welche der Verhältniß $M : N$ gleich ist, $\frac{P \times N}{O \times M} \times A$ bedeutet das zweite Glied C der Verhältniß,

wel-

welche aus den zweyen $M:N$ und $O:P$ zusammen gesetzt ist, $\frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$ Abschnitt.

bedeutet das zweyte Glied der Verhältniß, welche aus den dreyen $M:N$, $O:P$ und $Q:R$ zusammen gesetzt ist, und $\frac{T \times R \times P \times N}{S \times Q \times O \times M} \times A$ bedeutet das vierte Glied der Verhältniß, welche aus den vierten $M:N$, $O:P$, $Q:R$ und $S:T$ zusammen gesetzt ist, und so immer fort.

§. 21. Dieses kann uns eine Anleitung geben, wie die kleinsten Glieder der zusammen gesetzten Verhältnisse leichter zu finden sind, wenn von Zahlen die Rede ist. Gesezt es seyen die zwey Verhältnisse $M:N$ und $O:P$ zusammen zu setzen, und zu dem ersten Gliede A der zusammen gesetzten Verhältniß das zweyte zu finden. Weil nun dieses zweyte Glied C also ausgedrucket wird:

$\frac{P \times N}{O \times M} \times A$, so siehet man,

daß man nur zu $O \times M$, $P \times N$ und A die vierte Proportionalzahl suchen darf, wenn man dieses Glied auf einmal erlangen wil, denn diese vierte Proportionalzahl ist $\frac{P \times N}{O \times M} \times A$, gleichwie die vierte Propor-

tionalzahl zu M , N und A , diese ist $\frac{N}{M} \times A$, vor welchem Ausdrücke-

der erstere nicht anders verschieden ist, als daß so wohl in dem Zehler als in dem Nenner des Bruchs die Producte $P \times N$, und $O \times M$ stehen, welches die Sache nicht ändert. Es ist aber $O \times M$ das Product der zwey ersten Glieder der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, und $P \times N$ ist das Product der zwey letzteren Glieder dieser Verhältnisse, und man muß demnach sagen, wie das Product der zwey ersteren Glieder zweier Verhältnisse $O \times M$, zu dem Producte der zwey letzteren Glieder derselben $P \times N$, so das nach Belieben angenommene erste Glied A , zu dem zweyten Glied C der Verhältniß, welche aus den zwey gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzt ist. Zum Exempel, ich sol aus den zwey Verhältnissen $2:3$ und $4:9$ eine Verhältniß zusammen setzen, deren ersteres entweder gegebenes oder nach Belieben angenommenes Glied die 1 ist; so sage ich wie 2×4 zu 3×9 , das ist, wie 8 zu 15, so 1 zu $\frac{15}{8}$, so ist die Verhältniß $1:\frac{15}{8}$ diejenige, welche man suchete.

§. 22. Eben so ist es, wenn man aus drey Verhältnissen die

durch

VIII. durch Zahlen ausgedrückt sind, eine Verhältniß zusammen setzen sol.
 Anm. Sind die Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, $M:N$, $O:P$,
 und $Q:R$, und ist das erste Glied der zusammen gesetzten Verhältniß
 A , so ist das zweyte $C = \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, und dasselbe zu finden, darf
 man nur sagen, wie $Q \times O \times M : R \times P \times N$, so das angenommene
 erste Glied A zu dem zweyten. Denn die vierte Proportionalzahl zu
 den eben genannten dreyen ist augenscheinlich $\frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, und
 man weiß zum voraus, VIII, 20. daß eben dieses das zweyte Glied der
 aus $M:N$, $O:P$, und $Q:R$ zusammen gesetzten Verhältniß bedeute,
 deren erstes Glied A ist. Man schließet also hier wieder wie $Q \times O \times M$,
 das Product aus allen ersteren Gliedern der gegebenen Verhältnisse,
 zu $R \times P \times N$, dem Producte aus allen zweyten Gliedern dieser Ver-
 hältnisse; so das nach Belieben angenommene oder gegebene erste
 Glied A , zu dem zweyten Gliede der Verhältniß, welche aus den
 gegebenen zusammen gesetzt ist. Als es sey die Verhältniß zu finden,
 welche aus den dreyen $2:3$, $4:5$, und $2:1$ zusammen gesetzt, und
 deren erstes Glied die Einheit ist, so sage ich wie $2 \times 4 \times 2 : 3 \times 5 \times 1$,
 das ist, wie 16 zu 15, so 1 zu $\frac{1}{15}$. Die Verhältniß $1 : \frac{1}{15}$ ist die gesuch-
 te, welche man durch ganze Zahlen ausdrücken kan, wenn man bey-
 derseits durch 16 multipliciret. Es wird dadurch $1 : \frac{1}{15} = 16 : 15$.

§. 23. Diese Regel ist allgemein. Wenn man aus den vier
 Verhältnissen $M:N$, $O:P$, $Q:R$, und $S:T$ eine Verhältniß zu-
 sammen setzen sol, deren erstes Glied A ist, so muß man wieder sa-
 gen, wie das Product aus allen ersteren Gliedern der Verhältnisse,
 welche zusammen zu setzen sind $S \times Q \times O \times M$, zu dem Producte aus
 den letzteren Gliedern dieser Verhältnisse $T \times R \times P \times N$, so das belie-
 big angenommene Glied A zu dem zweyten Gliede der zusammen ge-
 setzten Verhältniß, welches wir uns unter E vorstellen. Denn es
 wird, wenn man die vierte Proportionalzahl wirklich sucht
 $E = \frac{T \times R \times P \times N}{S \times Q \times O \times M} \times A$, und wir haben gesehen, daß dieses das
 zweyte Glied der verlangten zusammen gesetzten Verhältniß sey.

§. 24. Ja wenn nichts daran gelegen ist, in was vor Zahlen
 man die zusammen gesetzte Verhältniß schaffe, so hat man nichts als
 die Producte der ersteren und der letzteren Glieder der Verhältnisse zu ma-
 chen

VIII. machen, welche man zusammen setzen sol, die Verhältniß dieser Producte ist selbst die zusammen gesetzete Verhältniß, welche man sucht. Als in dem letzten Falle, da die Verhältnisse $M : N$, $O : P$, $Q : R$, und $S : T$ zusammen zu setzen waren, hatten wir $S \times Q \times O \times M : T \times R \times P \times N = A : E$, und die Verhältniß $A : E$ war die zusammengesetzte. Da nun also diese Verhältniß $A : E$ der Verhältniß der Producte gleich ist, so ist auch die Verhältniß der Producte diejenige, welche aus den Verhältnissen der einander multiplicirenden Zahlen in der Ordnung zusammen gesetzt ist, die wir zum öftern wiederholt haben. Will man die Verhältniß haben, die aus den Verhältnissen $2 : 3$, $5 : 3$, $2 : 7$ zusammen gesetzt ist: so multiplicire man nur die ersten Glieder dieser Verhältnisse in einander, wie auch die letzteren. Die Verhältniß der Producte $2 \times 5 \times 2 : 3 \times 3 \times 7$, das ist, $20 : 63$, ist die gesuchte.

S. 25. Und demnach ist die Verhältniß zweier Quadratzahlen aus der Verhältniß ihrer Wurzeln zweymal genommen, zusammen gesetzt, und die Verhältniß zweier Cubiczahlen bestehet aus der Verhältniß der Wurzeln dreyimal genommen. Denn wenn man die Verhältniß $3 : 5$ mit sich selbst, das ist, mit der Verhältniß $3 : 5$ zusammen setzt, so kommet die zusammen gesetzte Verhältniß $3 \times 3 : 5 \times 5 = 9 : 25$, diese Zahlen aber sind die Quadratzahlen der ersten. Und wenn man die Verhältniß $3 : 5$ dreyimal genommen, zusammen setzen sol, so wird die zusammen gesetzete Verhältniß $3 \times 3 \times 3 : 5 \times 5 \times 5 = 27 : 125$, welches die Cubiczahlen der ersteren sind.

S. 26. Wenn also zwei Zahlen 9, 25. gegeben sind, deren Verhältniß aus zweien gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt ist, (man kan aber eine jede Verhältniß so betrachten, als ob sie durch die Zusammenfügung zweier gleichen Verhältnisse entstanden wäre) und man wil diese Verhältniß finden, aus welcher die Verhältniß $9 : 25$ dergestalt zusammen gesetzt ist: so darf man nur die Quadratwurzeln dieser Zahlen 3 und 5 nehmen. Die Verhältniß $3 : 5$ ist die gesuchte. Eben so findet man die Glieder einer Verhältniß, welche, wenn sie dreyimal zusammen gesetzt wird, eine gegebene Verhältniß $27 : 125$ heraus kommet; Man darf nur aus den Gliedern der gegebenen Verhältniß die Cubicwurzeln ziehen, welche in unserem Exempel wieder 3 und 5 sind. Die Verhältniß $3 : 5$, ist diejenige, welche, wenn sie dreyimal zusammen gesetzt wird, die gegebene Verhältniß $27 : 125$ bringet. Man kan zwei Zahlen öfters als dreyimal in sich selbst multipliciren, und auf diese Producte dasjenige anwenden, so wir hier

VIII. von solchen Zahlen gesagt, die man sich als Quadrat oder Cubicabschnitt. zahlen vorstellt.

§. 27. Wenn man aus den durch Zahlen ausgedruckten Verhältnissen: $M : N$

$O : P$

$Q : R$

$S : T$, eine Verhältniß zusammen setzen sol, und man verwechselt die ersteren Glieder dieser Verhältnisse wie man will, oder die letzteren, oder so wohl die ersteren als die letzteren, folgendergestalt, zum Exempel: $O : T$

$M : P$

$S : R$

$Q : N$, so kommen ohnstreitig meistens ganz andere Verhältnisse, als die vorigen waren, ob es zwar zuweilen sich fügen kan, daß eine oder die andere dieser letzteren Verhältnisse von einer der vorigen nicht verschieden ist. Dennoch aber ist die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung aller ersteren Verhältnisse entsteht, von derjenigen nicht verschieden, welche aus den letzteren Verhältnissen zusammen gesetzt ist. Denn wenn man die Glieder in der Ordnung multipliciret, welcher wir bis anhero gefolget, die Glieder der zusammen gesetzten Verhältniß heraus zu bringen, so ist die Verhältniß, welche aus den ersteren viere zusammen gesetzt ist, diese $S \times Q \times O \times M : T \times R \times P \times N$, und die Verhältniß, welche durch die Zusammensetzung der vier letzteren entsteht, ist $Q \times S \times M \times O : N \times R \times P \times T$. Nun sind die Glieder dieser Verhältniß von den Gliedern der vorigen zusammen gesetzten Verhältniß nicht verschieden, sondern es ist $Q \times S \times M \times O = S \times Q \times O \times M$, weil diese zwey Producte durch die Multiplication einerley Zahlen entstanden sind, und an der Ordnung, in welcher man multipliciret, nichts gelegen ist, L. 96. und aus eben der Ursache ist auch $N \times R \times P \times T = T \times R \times P \times N$: also sind auch die dergestalt zusammen gesetzte Verhältnisse $S \times Q \times O \times M : T \times R \times P \times N$, und $Q \times S \times M \times O : N \times R \times P \times T$ einander gleich, und eben dieses ist bey einer jeden anderen Versekung der ersteren, wie auch der letzteren Glieder der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sol, richtig, weil die angegebene Ursach in allen solchen Fällen gilt. Es ist nicht nöthig, daß wir ein Exempel in Zahlen hieher setzen, da der Satz, auf welchen wir uns in dem Beweise gründen, so gar bekannt ist.

§. 28. Wohl

S. 28. Wohl aber ist zu erweisen, daß eben diese Verſetzung auch ſtatt habe, wenn die Verhältniſſe nicht durch Zahlen, ſondern durch Einien, oder andere ungetheilte Gröſſen ausgedrucket werden. Denn man kan zwar ſchließen, daß dasjenige was von ſolchen Verhältniſſen richtig iſt, die durch Zahlen ausgedrucket werden können, überhaupt von allen Verhältniſſen richtig ſey, wenn man annimmt, daß jede zwei Gröſſen von einerley Art in Theile zerfällt werden können, welche einander alle gleich ſind, in welchem Falle die Verhältniß der Gröſſen mit der Verhältniß der Zahlen der Theile einerley iſt. VI, 43. Allein wir haben die Möglichkeit dieſer Zerfällung nicht zum Grunde legen mögen, und wir müſſen alſo auf eine unſeren vorigen Sätzen gemäſſere Art dathun, daß die Verſetzung der Glieder der Verhältniſſe, welche zuſammen geſetzt werden ſollen, in der zuſammen geſetzten Verhältniß nichts ändern. Wir werden dieſes erſtlich von zwei Verhältniſſen zeigen, welche zuſammen geſetzt werden ſollen, und ſo dann dieſes auf mehrere anwenden.

VIII.
Verhältniſſe.

S. 29. Es ſeyn alſo die zwei Verhältniſſe $M : N$ und $O : P$ zuſammen zu ſehen. Man kan ihre Glieder auf dieſe vier Arten ſehen:

$$\begin{array}{cccc} M : N & O : P & O : N & M : P \\ O : P & M : N & M : P & O : N \end{array}$$

wobon die drey letzteren heraus kommen, wenn man in der erſten entweder die vorhergehenden Glieder, oder die nachfolgenden, oder ſo wol die vorhergehenden als die nachfolgenden, verwechſelt. Es iſt zu zeigen, daß einerley Verhältniß kommen werde, man mag diejenigen von dieſen Verhältniſſen zuſammen ſehen, welche man wil.

S. 30. Man mache zuerſt: VIII, 13.

$$\begin{array}{l} M : N = A : B \text{ und } O : P = A : D, \\ O : P = B : C \quad M : N = D : E, \end{array}$$

ſo iſt die Verhältniß $A : C$ aus den zweyen $M : N$ und $O : P$ zuſammen geſetzt, und die Verhältniß $A : E$ iſt durch die Zuſammensetzung der Verhältniſſe $O : P$ und $M : N$ entſtanden. Ich ſage dieſe zwei Verhältniſſe $A : C$ und $A : E$ ſeyen einander gleich. Man ſiehet, daß dieſes mit Worten ſo auszudrucken ſey. Wenn man zwei Verhältniſſe $M : N$ und $O : P$ einmal in der Ordnung zuſammen ſetzt, in welcher ſie ſtehen, und das andere mal in verkehrter Ordnung, indem man $O : P$ zuerſt brauchet, und $M : N$ zum zweyten, ſo werden die Verhältniſſe $A : C$ und $A : E$, welche durch dieſe Zuſammensetzung entſtehen, einerley. Und dieſes wird erwieſen ſeyn, wenn wir werden gezeigt haben,

VIII. daß $C=E$, welches folgender gestalt erhellet. Wir hatten $M:N =$ ~~Wischnitz.~~ $A:B$, wie auch $M:N=D:E$, also ist $A:B=D:E$. Ferner hatten wir $O:P=B:C$, und $O:P=A:D$, woraus folget $A:D=B:C$. Versetzt man die mittleren Glieder dieser Proportion, so wird aus derselben $A:B=D:C$, und wenn man diese Proportion mit der vorigen $A:B=D:E$ vergleicht, so siehet man, daß auch $D:C=D:E$. Da nun also einerley Grösse D gegen die Grössen C und E einerley Verhältniß hat, so müssen diese Grössen einander gleich seyn, folgendes ist $A:C=A:E$, wie wir erweisen solten.

§. 31. Hieraus folgen wir so gleich, daß wenn man zum Grunde setzen kan,

$$A:B=M:N, \text{ und } B:C=O:M,$$

man allezeit die Proportion $A:C=O:N$ daraus werde folgen können. Es ist die Ordnung der Glieder in den vorderen und hinteren Verhältnissen wohl zu merken. In dem ersteren kommt das Glied B zwey mal vor, in den letzteren stehet M zwey mal, aber B stehet oben als das zwente Glied, und unten als das erste, und M stehet oben als das vordere Glied, und unten als das hintere. Die Richtigkeit des Schlusses aber erhellet folgender gestalt. Die Verhältniß $A:C$ ist aus den zwey Verhältnissen $M:N$ und $O:M$ zusammen gesetzt. VIII, 8. Die Verhältniß $O:N$ aber kan aus eben den zwey Verhältnissen zusammen gesetzt werden: nur muß man sie in verkehrter Ordnung nehmen. Denn ohnstreitig bringen die Verhältnisse $O:M$ und $M:N$, wenn man sie zusammen setzt, die Verhältniß $O:N$. Setzet man sie aber in verkehrter Ordnung zusammen, so nemlich wie wir sie gleich Anfangs gesetzt, $M:N$ und $O:M$, so wird durch ihre Zusammenfügung keine andere, als die vorige Verhältniß $O:N$ heraus gebracht, wie wir eben gewiesen. Kommet aber die Verhältniß $O:N$ durch die Zusammenfügung des zwey Verhältnisse $M:N$ und $O:M$, so muß sie allerdings der Verhältniß $A:C$ gleich seyn, welche durch die Zusammenfügung eben dieser Verhältnisse entstehet. VIII, 18.

§. 32. Man kan diesen Satz auch anders ausdrucken; und dieser Ausdruck hat viele Bequemlichkeit, weil er uns öfters die Versetzung der Glieder einer Proportion erspart. Wir haben gesetzt,

$$A:B=M:N, \text{ und } B:C=O:M, \text{ und daraus geschlossen}$$

$$A:C=O:N.$$

Verwechselt man die Glieder der zweyten

ten Proportion, und läßt die Glieder der ersten stehen wie sie sind, so erhält man $A:B = M:N$ und $C:B = M:O$. Die mittleren Glieder der zwei Proportionen werden einerley, die äusseren aber sind verschieden, oder können wenigstens verschieden seyn. Der Schluß bleibt $A:C = O:N$; und man kan also bey dieser Ordnung der Glieder schließen, wie das erste Glied der ersten Proportion A, zu dem ersten Gliede der zweiten C, so das letzte Glied der zweiten Proportion O, zu dem letzten Gliede der ersten N. Als wenn

$$2:3 = 4:6 \text{ und}$$

$$12:3 = 4:1; \text{ so ist } 2:12 = 1:6.$$

S. 33. Man kan die Glieder auch dergestalt versehen,

$$B:A = N:M, \text{ und}$$

$B:C = O:M$, daß nemlich die äussersten Glieder einerley werden, und hier ebenfalls schließen: $A:C = O:N$. Es ist dieses aus dem so gewiesen worden ist, leicht einzusehen.

S. 34. Aus dieser Regel beweisen wir nun, daß bey Zusammensetzung zweier Verhältnisse die Glieder sich auch anders verwechseln lassen, als wir bereits gezeigt haben. Es sey wieder aus den zwei Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ eine neue Verhältniß zusammen zu setzen; man verwechsle aber die ersteren Glieder dieser Verhältniß, und setze aus den zwei Verhältnissen $O:N$, $M:P$ eine Verhältniß zusammen, so wird diese letztere Verhältniß der ersteren gleich seyn. Denn wil man diese Zusammensetzung wirklich verrichten, und hat zu dem Ende das erste Glied A angenommen, so muß man sagen:

$$M:N = A:B \text{ wie auch } O:N = A:D, \text{ und}$$

$O:P = B:C$, wie auch $M:P = D:E$, und es sind die Verhältnisse $A:C$ und $A:E$ die zusammen gesetzt. Man kan aber erweisen, daß diese Verhältnisse einander gleich sind, welches geschieht, indem man, wie wir gleich thun wollen, zeigt, daß C dem E gleich sey.

S. 35. Weil nemlich $M:N = A:B$ und

$$O:N = A:D, \text{ so ist } O:M = B:D, \text{ VIII. 32.}$$

Nun ist auch, wenn man in der Proportion, deren Richtigkeit ebenfalls angenommen worden ist, $O:P = B:C$ die Glieder verwechselt, $P:O = C:B$; aus dieser aber, und derjenigen, welche wir eben ge-

VIII. schlossen, folget, $P:M=C:D$, wie man so gleich siehet, wenn man ihre Glieder ordentlich unter einander setzt

$$P:O=C:B$$

$O:M=B:D$, als wodurch erhellet, daß die Verhältnisse $P:M$ und $C:D$ aus gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt sind. Vergleichet man aber diese Proportion noch mit der letzten der angenommenen, $M:P=D:E$, oder $P:M=E:D$, so siehet man so gleich, daß $C:D=E:D$, und daß also E nothwendig so groß seyn müsse als C . Folgendes ist auch $A:C=A:E$, das ist, die zwei zusammen gesetzten Verhältnisse sind gleich, deren Gleichheit wir erweisen sollten.

S. 36. Auf eben die Art kan man auch zeigen, daß wenn man in den zwei Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ die letzten Glieder versetzt, und schreibt $M:P$ und $O:N$, man durch die Zusammensetzung der ersten zwei Verhältnisse keine andere Verhältniß heraus bringen werde, als diejenige, welche man durch die Zusammensetzung der letzteren heraus bringen kan, und daß wenn man machet:

$$M:N=A:B \text{ wie auch } M:P=A:D$$

$$O:P=B:C \text{ und } O:N=D:E,$$

die Größe C der Größe E , und folgendes die Verhältniß $A:C$ der Verhältniß $A:E$ gleich seyn werde. Denn wenn man die Glieder der angenommenen Proportion $M:P=A:D$ verkehret, und die darneben stehende, unter dieselbe setzt, also:

$$P:M=D:A,$$

$$M:N=A:B,$$

$$P:N=D:B. \text{ VIII, 16.}$$

so schließet man

Nun ist auch die Proportion $O:P=B:C$ als richtig angenommen.

Und aus dieser

$$O:P=B:C$$

und der erst gefundenen

$$P:N=D:B$$

folget $O:N=D:E$. VIII, 31. Da nun auch

$O:N=D:E$, so ist allerdings $D:C=D:E$, und folgendes $C=E$, welches sollte erwiesen werden. Und also ist überhaupt richtig, was wir zu zeigen hatten, daß nemlich, wenn in zwei Verhältnissen $M:N$ und $O:P$ die ersten, oder die letzteren, oder so wohl die ersten als die letztern Glieder, auf alle mögliche Arten versetzt werden, dieses die Verhältnisse, welche aus den gegebenen und aus demjenigen Verhältnissen zusammen gesetzt werden, so durch diese Verwechselung der Glieder entstanden sind, nicht verschieden mache.

Die

Die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen zu setzen ist, zu vermindern.

VIII.
Abschnitt.

S. 37. Es ist aber dieses nicht allein richtig, wenn nur zwei Verhältnisse zusammen gesetzt werden, sondern es hat eben dieses auch statt, wenn man zwei Verhältnisse mit verschiedenen anderen zusammen setzen sol. Man kan auch in diesem Falle die vorderen wie auch die hinteren Glieder dieser zwei Verhältnisse verwechseln wie man wil, ohne dadurch in der Zusammensetzung der Verhältnisse etwas zu verändern. Denn es sey aus den Verhältnissen $K:L$, $M:N$, $O:P$ und $Q:R$ eine neue Verhältniß zusammen zu setzen, deren erstes Glied A sey, so muß man machen VIII, 15.

$$K:L = A:B$$

$$M:N = B:C$$

$$O:P = C:D$$

$$Q:R = D:E$$

Die Verhältniß $A:E$ ist so dann aus den vier gegebenen zusammen gesetzt. Man siehet aber auch leicht, daß eben-diese Verhältniß sich aus den drey Verhältnissen $A:B$ oder $K:L$ und $B:D$ und $D:E$, das ist, $Q:R$ zusammen setzen lasse. Nun ist die mittlere dieser Verhältniß $B:D$ diejenige, welche durch die Zusammensetzung der zwei Verhältnisse $M:N$ und $O:P$ entsteht; und wenn man die vorderen wie auch die hinteren Glieder dieser zwei Verhältnisse wie man wil, verwechselt, so bleibt diese Verhältniß $B:D$ dennoch unverändert. Wil man demnach zum Beyspiel aus den Verhältnissen

$$K:L$$

$$O:N$$

$$M:P$$

$Q:R$ eine Verhältniß zusammen setzen, da die Glieder O, M hier verwechselt worden sind, so wird dieselbe noch aus den Verhältnissen $A:B = K:L$, $B:D$ und $D:E = Q:R$ bestehen; und also der vorigen zusammen gesetzeten Verhältniß $A:E$ gleich seyn.

S. 38. Kan man aber jede zwey vordere oder hintere Glieder der Verhältnisse, die man zusammen setzen sol, verwechseln, ohne dadurch in der Verhältniß, welche durch ihre Zusammensetzung entsteht, etwas zu verändern; so kan man auch diese Verwechselung so oft man wil, wiederholen, ohne daß auch hiedurch einige Veränderung in der zusammen gesetzeten Verhältniß vorgehe. Dadurch aber wenn man die

Ver-

VIII. Verwechselung zweyer Glieder der Verhältnisse wiederholet, können dieselbe in eine jede beliebige Ordnung gebracht werden, die man verlangt. Wenn demnach bey verschiedenen Verhältnissen, die man zusammen setzen sol, die ersteren, wie auch die letzteren Glieder einerley sind, so sind auch die zusammen gesetzten Verhältnisse einerley, in was Ordnung diese Glieder auch stehen mögen, eben wie wir dieses von solchen Verhältnissen, die durch Zahlen ausgedruckt sind, oben VIII, 27. gezeigt haben. Aus den Verhältnissen

$$K : L$$

$$M : N$$

$$O : P$$

Q : R wird eben die Verhältniß zusammen gesetzt, welche aus den Verhältnissen

$$M : L$$

$$O : N$$

$$K : R$$

Q : P zusammen gesetzt wird. Denn wenn man immer zwey der vordern Glieder dieser letzten Verhältnisse versetzt, so bekommt man endlich die Ordnung der vordern Glieder der vorigen Verhältnisse, und eben dieses ist auch bey den hinteren Gliedern richtig. Man wiederhole hiebey, wenn man es nöthig findet, was wir längst von der Versetzung der Factoren zweyer Producte gezeigt haben. I, 100.

§. 39. Dieses kan uns nutzen die Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen zu setzen ist, öfters auf eine sehr leichte Art auf wenigere zu bringen, und drey Verhältnisse, oder zwey anzugeben, aus welchen eine Verhältniß zusammen gesetzt werden kan, welche aus vierten oder mehrern zusammen gesetzt ist, ja zuweilen gar eine zusammen gesetzte Verhältniß in eine einfache zu verwandeln. Denn daß in dem Falle, wenn die Verhältnisse, aus welchen eine neue zusammen gesetzt werden sol, folgender gestalt stehen:

$$A : B$$

$$C : D$$

$$D : E$$

F : G, die Verhältniß, welche aus denselben zusammen gesetzt wird, auch aus den dreyen A : B, C : E, F : G zusammen gesetzt werden könne, ist leicht einzusehen: weil die Verhältniß C : E eben diejenige ist, welche aus den zweyen

zween C:D und D:E zusammen gesetzt wird. Stehen aber die VII.
Glieder anders, folgender gestalt, zum Exempel:

A : B

C : D

F : E

D : G, so kan man dieselbe auf die vorige Ordnung bringen, und man kan also hier ebenfalls sagen, daß die Verhältnisse, welche aus den gegenwärtigen vieren zusammen gesetzt wird, auch aus den dreien Verhältnissen A : B, C : E und F : G zusammen gesetzt werden könne.

§. 40. Es ist also die Regel, nach welcher man die Zahl der Verhältnisse, aus welchen eine andere zusammen gesetzt werden sol, vermindert, diese: Man lösche diejenigen Glieder, welche so wohl unter den vorderen als unter den hinteren Gliedern der Verhältnisse vorkommen, welche zusammen gesetzt werden sollen, aus, und verknüpfe die übrigen wie man wil mit einander, nur daß man nicht die vorderen Glieder an die Stelle der hinteren setzet. In den gegebenen Exempeln kommt D einmal unter den vorderen und das andere mal unter den hinteren Gliedern der zusammen zu setzenden Verhältnisse vor. Man lasse also dasselbe gar aus, so bleiben die Verhältnisse, deren erstere Glieder sind A, C, F, und die letzteren B, E, G. Die Verhältnisse nun, welche aus den bezeichneten vieren zusammen gesetzt werden kan, lässet sich auch aus den dreien zusammen setzen, deren erstere Glieder die Grössen A, C, F, und die zweyten B, E, G sind, als aus diesen A : G, C : B, F : E, oder aus diesen A : E, C : G, F : B, oder wie man diese Glieder sonst verknüpfen wil.

§. 41. Wenn eine Proportion aus zusammen gesetzten Verhältnissen besteht, das ist, wenn eine zusammen gesetzte Verhältniß einer andern zusammen gesetzten oder einfachen Verhältniß gleich ist, so kan man die Verhältnisse, welche zusammen gesetzt werden sollen, auch öfters zu einer geringeren Zahl bringen, wenn man noch solche Verhältnisse zu der vorigen hinzu setzet, welche einander gleich sind. Es sey zum Exempel:

$$\left. \begin{array}{l} A : B \\ C : D \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M : N \\ O : P \\ Q : R \end{array} \right.$$

das ist, es sey diejenige Verhältniß, welche aus den zween A : B und C : D zusammen gesetzt ist, derjenigen gleich, welche durch die Zusammenfassung der drey Verhältnisse M : N, O : P, Q : R entsteht.

Rf

Es

VIII. Es sey aber auch $D : A = R : M$, so setze man diese Verhältniß noch hinzu: zu den vorigen, so wird

$$\left. \begin{array}{l} A : B \\ C : D \\ D : A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} M : N \\ O : P \\ Q : R \end{array} \right.$$

$R : M$, das ist, diejenige Verhältniß, welche aus den ersteren dreyn zusammen gesetzt ist; wird derjenigen gleich, welche aus den letzteren viere, durch ihre Zusammenfügung entsteht. Denn daß dieses richtig sey, wenn dasjenige richtig ist, welches man zum Grunde setzt, siehet man daraus, weil aus der Zusammenfügung gleicher Verhältnisse immer gleiche Verhältnisse entstehen. Nun ist aber die Verhältniß, welche durch die Zusammenfügung der drey ersteren dieser Verhältnisse entsteht, keine andere als die Verhältniß $C : B$, denn die Glieder A und D kan man weg streichen, weil sie so wohl unter den vordern, als auch unter den hintern Gliedern der Verhältnisse, welche man zusammen setzen sollte, vorkommen; VIII, 40. und auf eben die Art bringet man heraus, daß die Verhältniß, welche aus den letzteren viere zusammen gesetzt werden kan, sich auch aus den zweyen $O : N$ und $Q : P$ zusammen setzen lasse. Man kan demnach in dem gesetzten Falle schließen, daß die Verhältniß $C : B$ derjenigen Verhältniß gleich sey, welche aus den zwey Verhältnissen $O : N$ und $Q : P$ zusammen gesetzt wird.

§. 42. Da die Glieder solcher Verhältnisse, die aus verschiedenen anderen zusammen gesetzt worden, durch die Producte derjenigen Zahlen, welche diese Verhältnisse ausdrücken, in dem Falle, wenn die Verhältnisse durch Zahlen ausgedrucket werden können, sich darstellen lassen: VIII, 24. so pflegen die meisten heut zu Tage die Glieder der zusammen gesetzten Verhältnisse eben so zu bezeichnen, wie die Producte aus verschiedenen Zahlen bezeichnet werden, ob zwar die einfachen Verhältnisse, aus welchen man eine neue zusammen setzen sol, nicht durch Zahlen ausgedrucket sind, und vielleicht nicht durch eigentliche Zahlen ausgesprochen werden können. Also wenn man schreibt: $A \times C \times E : B \times D \times F$, so bedeutet dieses eine Verhältniß, welche aus den dreyn $A : B$, $C : D$, $E : F$ zusammen gesetzt ist, oder aus jeden anderen dreyn, deren vordere Glieder sind A, C, E , und die hintern B, D, F , wie man auch diese Glieder mit den ersteren verknüpfen wil. Als Ichelnet diese Zeichnung gar bequem; und deswegen wollen wir sie beibehalten. Es ist nach der Erklärung, welche wir von diesen Dingen gegeben, nicht zu befürchten, daß man sich die umgekehrten Größen als

als Zahlen vorstellen werde, ob man sich zwar der Arithmetischen Zeichen, dergleichen das x ist, auch in der Geometrie bedienet, welches allerdings ein Fehler wäre. Doch wollen wir uns auch vorbehalten die Sache durch Worte so auszudrücken, wie wir bisher gethan, so oft wir uns davon einige Bequemlichkeit versprechen können.

§. 43. Zeichnet man derohalben folgender gestalt $A \times C \times E = B \times D \times F$, so kan dieses in der Geometrie, oder wo sonst von ungetheilten Größen die Rede ist, nichts anders bedeuten, als daß die Glieder derjenigen Verhältniß, welche aus den dreien $A : B, C : D, E : F$ zusammengesetzt ist, einander gleich sind: Diese Bedeutung ist allgemein und kan auch bey Zahlen gebraucht werden.

§. 44. Wenn bey der Verhältniß $A \times C \times E : B \times C \times D$ die Buchstaben A, B, C, D, E Zahlen bedeuten, so ist diese Verhältniß allezeit der Verhältniß $A \times E : B \times D$ gleich. Denn die Glieder dieser Verhältnisse entstehen aus den Gliedern der ersteren, wenn man dieselbe beiderseits durch C dividiret, welchen Factor sie gemeinschaftlich haben, und durch eine solche Division wird die Verhältniß niemals geändert. VI, 105. Bedeuten aber diese Buchstaben die Glieder der letztern Verhältniß dem der erstern $A \times C \times E : B \times C \times D$ weisse, welche zusammen zu setzen sind, das Glied C welches so wohl unter den vordern Gliedern dieser Verhältnisse vorkommet, kan man VIII, 40. und es ist demnach allezeit $B \times D \times C$, und so in allen übrigen ähnlichen Fällen.

§. 45. Gleichwie aber auch, wenn die Buchstaben Zahlen bedeuten, der Bruch $\frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$, oder $\frac{R \times P \times N \times A}{Q \times O \times M}$ das zweyte Glied einer Verhältniß bedeutet, welche aus den Verhältnissen $Q : R, O : P, M : N$ zusammen gesetzt worden, und deren erstes Glied A ist VIII, 20. Also pfleget man auch in der Geometrie diese Zeichnung in eben dem Verstande zu gebrauchen, ob zwar die Buchstaben Linien bedeuten, welche sich nicht im eigentlichen Verstande durch einander multipliciren, noch weniger aber dividiren lassen. Diese Gleichförmigkeit der Zeichnung ist von einer grossen Bequemlichkeit. Sie machet, daß man nach einerley Regeln verfahren kan, wenn in den zusammengesetzten Verhältnissen etwas zu ändern ist. Als, wenn in der Verhältniß

VIII. ~~Wahrheit~~ nist $A : \frac{R \times P \times N}{Q \times O \times M} \times A$: die Glieder Q, R ein ander gleich wären, so

könnte man diese Verhältniß auch dergestalt ausdrücken $A : \frac{P \times N}{O \times M} \times A$, wie leicht einzusehen ist.

Einige besondere Sätze.

§. 46. Dieses könnte uns von dieser Materie genug seyn, weil das übrige sich bey der Anwendung aus dem dergestalt gelegeten Grunde leicht herleiten läßt. Doch kan es nicht schaden, wenn wir noch einige Folgen dieser Sätze bemerken, welche besonders vorkommen, und welche uns also unsere künftige Arbeit erleichtern können. Es sey erstlich die Verhältniß $A : B$ der Verhältniß $C : D$ gleich, oder es sey die Proportion $A : B = C : D$ richtig. Man verwechsle die Glieder einer dieser Verhältnisse und setze die Verhältniß, welche dergestalt kommt, als, $D : C$ so dann mit einer der ersteren $A : B$ zusammen: wodurch man die Verhältniß $A \times D : B \times C$ erhält. Die Glieder dieses Verhältnisse werden einander gleich seyn $A \times D = B \times C$. Von Zahlen hat die Richtigkeit dieses Satzes bereits gewiesen werden können. Denn wenn A, B, C, D Zahlen bedeuten, so ist $A \times D$ das Product der äußern Glieder der Verhältniß, und $B \times C$ ist das Product der mittleren Glieder derselben; und wir haben VI, III. gewiesen, daß dergleichen Producte einander allezeit gleich sind.

§. 47. Daß aber eben dieses auch richtig sey, wenn A, B, C, D ungetheilte Größen bedeuten, siehet man folgender gestalt. Es ist gesetzt worden

$$A : B = C : D \text{ nun ist allezeit richtig,}$$

$D : C = D : C$ weil die erstere dieser Verhältnisse von der zweiten gar nicht verschieden ist. Demnach müssen auch die Verhältnisse gleich seyn, welche durch die Zusammensetzung dieser Verhältnisse entstehen, und die Proportion $A \times D : B \times C = C \times D : C \times D$ muß richtig seyn. Nun ist $C \times D = C \times D$, wie man leicht siehet. Also ist auch $A \times D = B \times C$. Und wenn man aus zwei gleichen Verhältnissen $A : B$ und $C : D$ eine neue Verhältniß $A \times D : B \times C$ zusammen setzt, nachdem man zuvor die Glieder einer dieser Verhältnisse verwechselt, so werden die Glieder der zusammengesetzten Verhältniß einander allezeit gleich.

§. 48. Es läßt sich dieser Satz verkehren, und man kan sagen, VIII. daß wenn eine Verhältniß, deren Glieder einander gleich sind, aus zwey Verhältnissen zusammen gesetzt ist, diese Verhältnisse einander gleich seyn, und eine Proportion geben, wenn man eine derselben verkehrt setzt. Es sey $A \times D = B \times C$, die Glieder nemlich der Verhältniß $A \times D : B \times C$ welche aus den zwey Verhältnissen $A : B$, und $D : C$ zusammen gesetzt ist, seyen einander gleich, so wird behauptet, daß die Verhältniß $A : B$ zwar nicht der Verhältniß $D : C$, aber gewiß der Verhältniß $C : D$ gleich seyn werde: und dieses sieht man so gleich ein, wenn man setzt $A \times D : B \times C = A : A$, und

$$C : D = C : D$$

Denn man begreiffet leicht, daß bey den gesetzten Bedingungen dieses allezeit geschehen könne.

A der A, oder eine jede a
Verhältniß der zweyten I
bern. Setzt man aber d
dinge, wenn man die
 $A : B = C : D$, welches zu

h, als
d die
Glie
aller
40.

§. 49. Daß dieses auch bey Zahlen richtig sey, folget aus dem Beweise, welcher allgemein ist, und allerdings auch von Zahlen gelten muß. Man kan es aber auch von Zahlen folgender maßen erweisen. Man nehme eine Zahl 12 und theile sie in diejenige Zahlen aus deren Multiplication sie entstanden ist, und dieses zwar auf zwey verschiedene Arten, welches allezeit geschehen kan, weil man eben nicht nöthig hat, die Brüche zu vermeiden. Man schreibe zum Exempel vor 12, $6 \times 2 = 4 \times 3$. Nach dem Satze muß die Proportion $6 : 4 = 3 : 2$ richtig seyn. Daß dieses beständig zutreffe, wird man gewahr werden, wenn man betrachtet, daß wenn man die Producte $6 \times 2 = 4 \times 3$ durch eine beliebige Zahl dividiret, die Quotienten nothwendig gleich seyn müssen. Man nehme zu den Theiler ein Product an aus einem Factor des ersten Products, und aus einem Factor des

zweiten, als dieses 2×4 , und dividire, so wird $\frac{6 \times 2}{4 \times 2} = \frac{4 \times 3}{4 \times 2}$

Diese Brüche können zu kleineren Benennungen gebracht werden, wenn man die Glieder des ersten durch 2, und die Glieder des zweiten durch 4 dividiret, dadurch wird $\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$, oder die Proportion $6 : 4 = 3 : 2$.

VIII.
Abschnitt.

§. 50. Oder wenn man dieses auf eine leichtere Art von Zahlen schließen will, so setze man an statt der gebrauchten Ziffer $A \times D = B \times C$

und dividire wieder beiderseits mit $D \times B$, so wird $\frac{A \times D}{B \times D} = \frac{B \times C}{B \times D}$

und wenn man diese Brüche zu kleineren Benennungen bringet, indem man die gemeinschaftlichen Factore B, D aus den Nennern und Zeh-

lern derselben weg läßt, so wird $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, das ist, VI, 40. $A : B = C : D$.

Man siehet aber auch aus diesen Beweisen, und aus den übrigen, so gezeigt worden ist, überflüssig, daß an der Ordnung nichts gelegen sey, und daß wenn man hat $A \times D = B \times C$, oder $A \times D = C \times B$ oder $D \times A = B \times C$ oder $D \times A = C \times B$, man doch allezeit schließen könne $A : B = C : D$, oder $B : A = D : C$.

§. 51. Sonst ist in einer jeden Proportion $A : B = C : D$ die Verhältniß des ersten Gliedes A zu dem vierten aus der Verhältniß des ersten Gliedes A zu dem zweiten $A : B$, und aus der Verhältniß eben dieses ersten Gliedes zu dem dritten zusammengesetzt. Dieses siehet man gar leicht ein, wenn man nur betrachtet, daß nach den ersten Grundbegriffen die Verhältniß $A : D$ aus den zweien Verhältnissen $A : B, B : D$ zusammengesetzt sey. Dieses wäre auch richtig, wenn gleich A, B, C und D nicht proportional wären. Sind aber diese Größen proportional, so ist die Verhältniß $B : D$ der Verhältniß $A : C$ gleich, und es wird demnach die Verhältniß $A : D$ auch aus den zweien $A : B$ und $A : C$ zusammengesetzt. Als bey der Proportion $2 : 4 = 3 : 6$, ist die Verhältniß $A : D = 2 : 6$, und die Verhältniß $A : B = 2 : 4, A : C$ aber $= 2 : 3$. Setzet man die zwey letzteren Verhältnisse zusammen, indem man nemlich die Glieder derselben in der Ordnung in einander multipliciret, in welcher sie stehen, so bekommt man die Verhältniß $4 : 12$, welche der Verhältniß $2 : 6$ gleich ist.

§. 52. Gehet nun aber die Proportion in einem fort, und kan man sich also dieselbe unter nachstehender Bezeichnung $A : B = B : C$ vorstellen, so wird die Verhältniß des ersten Gliedes zu dem dritten $A : B$ der Verhältniß des ersten Gliedes zu dem zweiten $A : B$ gleich, und ist demnach die Verhältniß $A : C$ aus der Verhältniß $A : B$ zweymal genommenen zusammengesetzt. Es sey $2 : 6 = 6 : 18$, so ist die Verhältniß $2 : 18$ oder $1 : 9$ gleich der Verhältniß $2 \times 2 : 6 \times 6 = 4 : 36 = 1 : 9$. Die Zahlen, welche die Glieder dieser Verhältnisse, die aus zwey

zwey gleichen zusammen gesetzt sind, ausdrücken, sind allezeit Quadrat-
zahlen, weil sie durch die Multiplication einer Zahl in sich selbst entste-
hen, wie man leicht sieht. VIII. Abschnitt.

§. 53. Dieses letztere, und was sonst noch von der Zusammen-
gang gleicher Verhältnisse hier zu sagen ist, kan man auch aus den er-
sten Begriffen leicht einsehen. Es sey

$$A : B = M : N$$

$$B : C = M : N$$

$$C : D = M : N$$

$$D : E$$

$C : D = DE$, weil eine jede dieser 2
ist. Und wenn man also die Gli-
bet, so ist die Verhältniß eines
einander; gleichwie wenn dieses 4
der so sehen kan, wie wir sie zu
Bezeichnung klar, daß die Ver-
N. oder aus der Verhältniß A :
mal genommen, zusammen gesetzt
aus der Verhältniß M : N oder
auch, daß die Verhältniß A : E
M : N oder A : B viermal zusam-
einer Reihe von Gröffen, wie 11
Verhältniß der ersten zu der drit-
sten zu der zwoten A : B zweymal
sten zu der vierten A : D bestehet aus der Verhältniß der ersten zu der
zwoten A : B drey mal genommen, die Verhältniß der ersten zu der
fünften A : E aus der Verhältniß der ersten zu der zwoten A : B vier-
mal genommen, und so fort.

§. 54. Man kan dieses auch so ausdrücken: bey den gesetzten Be-
dingungen, wenn nemlich jede der Gröffen A, B, C, D, E gegen die nach-
folgende einerten Verhältniß hat, ist $A : C = A \times A : B \times B$, und $A : D =$
 $A \times A \times A : B \times B \times B$, und $A : E = A \times A \times A \times A : B \times B \times B \times B$, und
so weiter. Man sieht dieses so gleich, wenn man die Verhältniß in
der Ordnung setzt, in welcher sie §. 53. stehen, und betrachtet, daß die
Verhältniß M : N der Verhältniß A : B gleich sey.

§. 55. Wir haben nur noch ein einziges von dieser Sache zu mer-
ken

VIII. ten. Wenn zwei Verhältnisse $A : B$ und $C : D$ gegeben sind; so kann man zwei Glieder, deren Verhältniß aus diesen Verhältnissen zusammen gesetzt ist, auch folgender gestalt finden. Nachdem man die zwei Verhältnisse größerer Deutlichkeit halber, unter einander geschrieben

$$A : B$$

$C : D$, so suche man zu einer beliebig angenommenen Größe V , zur A und zur C die vierte Proportionalgröße, welche wir P nennen wollen, und zu eben der V , zur B und zur D suche man ebenfalls die vierte Proportionalgröße Q , so ist die Verhältniß $P : Q$ aus den Verhältnissen $A : B$ und $C : D$ zusammen gesetzt, oder es ist $P : Q = A \times C : B \times D$. Man sieht dieses folgender Gestalt ein. Weil man gemacht hat $V : A = C : P$, so ist auch wenn man die Verhältnisse verkehrt setzt $A : V = P : C$.

Nun hat man auch gemacht

$$V : B = D : Q$$

Und es ist nothwendig

$$C : D = C : D$$

Man setze diese Verhältnisse zusammen, mit Auslassung der überflüssigen Glieder VIII, 40. so wird $A \times C : B \times D = P : Q$, welche Proportion sollte erwiesen werden. Es sey zum Exempel aus den Verhältnissen $2 : 3$ und $5 : 7$ eine neue zusammen zu setzen. Wenn man nun eine Zahl n nach Belieben annimmt und macht $P =$

$$\frac{2 \times 5}{n} \text{ und } Q = \frac{3 \times 7}{n} \text{ so verhält sich } \frac{n}{P} \text{ zu } Q \text{ wie } \frac{2 \times 5}{n} \text{ zur } \frac{3 \times 7}{n}$$

das ist, wenn man beiderseits mit n multipliciret wie 2×5 zu 3×7 . und ist also die Verhältniß $P : Q$ augenscheinlich aus den Verhältnissen $2 : 3$ und $5 : 7$ zusammen gesetzt.

§. 56. Hieraus kan man nachfolgenden Satz schließen: Wenn man zwei Portionen annimmt:

$$A : B = C : D$$

$E : F = G : H$ und suchet zu einer nach Belieben angenommenen Größe, und zu jeden zweien der Größen, der von Zeichen wir über einander gesetzt, die vierte Proportionalgrößen P, Q, R, S , so werden auch diese proportional seyn. Denn die Verhältniß $P : Q$ ist aus den Verhältnissen $A : B$ und $E : F$ zusammengesetzt, und die Verhältniß $R : S$ aus den Verhältnissen $C : D$ und $G : H$. Da nun die einfachen Verhältnisse, so wie wir sie gesetzt, einander gleich seyn, so müssen auch die zusammengesetzten gleich seyn. $P : Q = R : S$.

§. 57. Man kan aber auch diesen Satz noch weiter ausdehnen, VIII. oder noch allgemeiner machen, folgender gestalt. Man nehme drey verschiedene Proportionen:

$$A : B = C : D$$

$$E : F = G : H$$

$J : K = L : M$, und suche zu jeden dreym Gliedern derselben, welche über einander stehen, die vierte Proportionalgröße. Man mache nemlich:

$J : K = L : M$, und setzt diese Verhältnisse alle beiderseits zusammen, mit Weglassung der überflüssigen Glieder, so bekommt man allerdings $P : Q = R : S$. Man kan gar leicht Zahlen finden, welche dieses erläutern.

Rein

Zweiter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Verhältniß
der Figuren.

S. I.

Dieses ist dasjenige, so wir uns bekannt machen müssen, ehe wir uns zur besonderen Betrachtung der ebenen Flächen wens den Fonten, von welchen wir den Begriff gleich Anfangs IV, 33. gegeben. Wir sehen, daß wir durch gerade oder krumme Linien dergleichen Flächen von allen Seiten eingeschlossen, und damit Figuren gemacht, und wollen sehen, wie sich dergleichen Figuren bey allerhand Bedingungen gegen einander verhalten; das ist, wir wollen sehen, in welchen Umständen sie einander gleich sind, was erfordert wird, wenn eine zwey- drey- viermal größer seyn soll als die andere, und uns dadurch in den Stand setzen, die einfachern unter diesen Figuren überhaupt mit einander zu vergleichen, und die Größe einer derselben aus der Größe einer andern zu bestimmen.

Grund dieser Lehre.

S. 2. Wir haben einen Grund-Satz nöthig, auf welchen wir diese Lehre bauen, aus welchem wir vor allen Dingen von der Gleichheit zweier Figuren urtheilen können, und da ist freylich nichts natürlicher und leichter, als daß man die Figuren, welche man mit einander vergleichen will, auf einander passe, und zusehe, ob ihre Grenzen zusammen fallen, oder nicht. Denn geschieht dieses, so ist kein Zweifel übrig, daß die Figuren gleich seyn; und dieses ist der Satz, aus welchem man gemeinlich die Gleichheit der Figuren schließet, wie wir bereits selbst zum öftern gethan, wenn sich die Gleichheit zweier Figuren, die wir eben nicht suchten, von selbst, und indem wir bloß mit der Betrachtung ihrer Umkreysse beschäftigt waren, darstellte. Auf die Art haben wir geschlossen, daß jede zwey Dreyecke, welche man aus gleichen Seiten zusammen gesetzt hat, auch der Fläche nach einander gleich seyn, weil sie auf einander gepasset werden können: wie auch zwey Dreyecke, in welchen gleiche Winkel von gleichen Seiten be-

beschlossen werden; oder auch solche, in welchen gleiche Seiten zwischen gleichen Winkeln liegen. Von einigen Arten der Vierecke, Abschneiden und von den Circeln, ist eben das zu sagen.

§. 3. Allein, weil auch solche Figuren einander gleich seyn können, deren Umkreiße nicht eben zusammen fallen, zwey Dreyecke zum

§. 4. Es bestehet aber dieser Grundsatz in nachfolgenden.

§. 4. Es bestehet aber dieser Grundsatz in nachfolgenden. Wenn man zwey Figuren, sie mögen geradelinicht oder krummlinicht seyn, A B C D und E F G H zwischen zwey Parallel-Einien A E, C G legen, und sodann eine dritte Einie I K; wie man will, mit den vorigen A E, C G parallel setzen kan, deren Theile I L, M K, welche in die Figuren A B C D und E F G H fallen, einander gleich sind, I L, nemlich \cong M K, so sind die Figuren A B C D und E F G H einander gleich.

F. 205.

§. 5. Wir haben nur etwas wenig, zu deutlicherem Verstande des Satzes, beyzufügen, welches desto nothwendiger ist, weil er neu scheinen kan, indem er in den Anfangs-Gründen nicht leicht gebraucht worden. Wir erinnern demnach 1), daß erlaubt seyn müsse, die Figuren im Anfange zu legen, wie man will, und sie nach Belieben zu kehren und zu wenden, daß aber, nachdem man sie einmal so oder so

IX. zwischen Parallel-Linien gefeßet, man sie hernach nicht wieder verfeßet
 müsse. 2) Daß, indem wir gefaget, man müsse die Linie IK, nach Be-
 lieben, mit der A E parallel ziehen können, ohne daß die Theile IL,
 M N verschieden werden, wir nicht sagen wollen, es müsse dieses nur
 bey einer oder der andern solcher Linien zutreffen, in welchem Falle al-
 lerdings die Figuren verschiedener Größe seyn könnten; sondern wir
 wolten sagen, es müssen die Theile einer mit der A E parallel gezo-
 gen Linie, welche in die Figuren fallen, einander gleich seyn, man mag
 F. 206. diese Parallel-Linie ziehen wie man will, so, daß man den Satz auch
 nachfolgendergestalt ausdrücken kan: Wenn man zwei Figuren hat,
 ABCDA und EFGHE, und man kan durch dieselben beide so viele
 CQ, DH als man will, deren Theile
 gleich sind, BN, nemlich = FO, und
 Q, so sind diese Figuren ABCDA,

daß
 einige
 wenn
 eite a
 em d
 wenn
 ABC

sich klar und deut-
 haben übrig seyn, so
 daß, da eine Ober-
 zwei Oberflächen
 in die Länge ausge-
 it ist als die andere.
 zwischen den Pa-

F. 205.

bet man sogleich ein, daß beide Figuren
 von der Linie A E bis an die Linie C G gleich ausgedehnet sind, weil
 diese Linien einander parallel liegen, und folgendes überall gleiche Ent-
 fernungen von einander haben, und beide Figuren sich von der einen
 dieser Parallel-Linien A E bis an die andere C G erstrecken. Will
 man nun diese Ausdehnung der Figuren von A E bis an C G vor die
 Breite derselben annehmen, wie man thun kan, so muß man sagen,
 daß die Figuren ABCD, EFGH gleich breit sind.

der die Ausdehnung der Figuren in die Länge betrifft,
 et Linie A E parallel genommen werden muß; so ist
 n ABCD, EFGH nach dieser Strecke ungleich
 weniger als in der Mitte, und in der Mitte mehr
 Allein, wo man auch die Ausdehnung nach dieser
 Strecke in der einen Figur messen will, wie dieses bey der ersten Figur
 AB

A B C D durch I K geschehen; so findet man, daß diese zweite Figur E F G H sich daselbst eben so weit von M nach K erstreckt, weil $IL = MK$. Also sind auch die Figuren A B C D, E F G H zwischen den Parallellinien A E, C G in die Breite gleich ausgehnet; sie haben aber auch nach der Strecke der Parallellinien gleiche Ausdehnungen in die Länge, wo man auch diese Ausdehnung der Figuren messen, und mit einander vergleichen will. Können bey so gestalteten Sachen die Figuren ungleich seyn?

Gleichheit gewisser Parallelogrammen und Dreiecke.

F. 207.

wohl als I D sind ebenfalls Parallelogrammen, weil ihre entgegen gesetzte Seiten einander parallel laufen, und also sind diese Seiten, welche einander entgegen gesetzt sind, auch einander gleich, IV, 198. Da nun aber gesetzt worden ist, daß die Grundlinie A B, C D einander gleich seyn sollen: so müssen auch die Linien G H, I K einander gleich seyn. Und weil dieses von einer jeden Linie, die wie G K mit der A D parallel gezogen worden, erwiesen werden kan: so sind die Parallelogrammen B E und C F nach unserm Grundsatz IX, 4. einander gleich.

S. 10. Ich sehe nicht, was an der Bündigkeit dieses Beweises aussetzen wäre. Doch wollen wir zur Erläuterung desjenigen, so wir gleich

zu setzen, so wird auch $CD + DE = DE + EF$, das ist $CE = DE$.
Es ist aber auch $CA = DB$ und $EA = BF$, weil dieses ebenfalls ein

S. 11. Man schliesst aus diesem Satze, wie man ein Parallelo-
grammum machen könne, so einem andern dergleichen Vierecke gleich
F. 209. ist, und einen gegebenen Winkel habe. Es sey das Parallelogramm
AB gegeben, und der gegebene Winkel sey C: man soll ein Pa-
rallelogrammum machen, so dem gegebenen A B gleich sey, und unter
dessen Winkeln einer so groß sey als C. Dadurch wird die Grösse der
übrigen Winkel dieser Art Vierecke bestimmt; denn ist ein Winkel
eines derselben gegeben, so sind alle gegeben. Man verlängere die Li-
nie DB, und setze an dieselbe den Winkel $EFG = C$. Man verlän-
gere auch die entgegen gesetzete Seite des Vierecks AB, bis sie die EF
schneidet, und von dannen weiter, so viel nöthig ist, mache $FG = DB$,
ziehe sodann durch G die gerade Linie GH der FE parallel; so wird
das

das Parallelogramm $E G$ dem gegebenen $A B$ gleich seyn, und den verlangten Winkel haben. IX. Abschnitt

§. 12. Auf diese Art verwandelt man ein jedes Parallelogramm in ein rechtwinkliches, wenn man alles macht, wie eben erwiesen worden, aber den Winkel $E F G$ nicht schief, sondern gerade annimmt, und ein jedes schiefwinkliches Parallelogramm ist einem rechtwinklichen gleich, welches mit jenem eine gleiche Grundlinie hat, und zwischen einerten Parallellinien kan gesetzt werden.

ben. Aber man sieht auch hieraus unmittelbar, daß nicht allein die Dreiecke ABC , abc welche auf gleichen Grundlinien, zwischen einander Parallelen stehen, selbst einander gleich sind, sondern daß auch die Vierecke gleich seyn; welche von ihnen durch die gerade Linie Fg abgeschnitten werden, nemlich $FC = fc$, wie auch die Dreiecke AFG und afg , welche übrig bleiben, wenn man von den ganzen Dreiecken ABC , abc die eben besagte Vierecke FC , fc durch die Linie Fg abschneidet. Wiewohl diese Dreiecke stehen auch auf gleichen Grundlinien $FG = fg$, zwischen den Parallellinien DE und Fg .

IX.
Wachst

S. 18. Wenn ein Dreieck und ein Parallelogramm zwischen zwei Parallellinien auf gleichen Grundlinien stehen, so ist das Dreieck die Hälfte des Vierecks. Dieses ist aus dem gesageten gar bald geschlossen. ABC ist das Dreieck, $DEFG$ das Parallelogramm: es wird gesetzt, es sey $BC = DE$, und wir sollen zeigen, daß das Dreieck ABC halb so groß sey, als das Viereck $DEFG$. Man ziehe die Querslinie GE , welche das Parallelogramm in zwei gleiche Dreiecke GDE , GFE theilen wird, wie längst IV, 200. gezeigt worden ist, und auch daraus sichtlich ist, weil die zwei Dreiecke GDE , FGE gleiche Grundlinien DE , GF , und gleiche Höhen haben. Es ist demnach das Dreieck GDE die Hälfte des Vierecks $DEFG$. Nun ist das eben genannte Dreieck GDE dem Dreiecke ABC gleich, IX, 14. also ist auch ABC die Hälfte des Vierecks $DEFG$.

F. 212.

S. 19. Theilet man die Grundlinie des Vierecks GE mit H in zwei gleiche Theile, und ziehet HI mit der DG parallel; so sind auch die zwei Vierecke DI und HF einander gleich, und jedes derselben ist die Hälfte des ganzen Vierecks $DEFG$. Nun ist das Dreieck ABC ebenfalls die Hälfte dieses Vierecks $DEFG$, derowegen ist das Dreieck ABC dem Vierecke DI gleich: und man machet also leicht ein Parallelogramm, welches einem gegebenen Dreiecke gleich sey, wenn man nur die Grundlinie DH dieses Vierecks halb so groß nimmt, als die Grundlinie des Dreiecks BC ist, und hernach auf DH ein Parallelogramm DI beschreibet, dessen Höhe so groß sey als die Höhe des Dreiecks ABC . Man kan dazu den Winkel bey D so groß oder so klein annehmen als man wil. Machet man diesen Winkel bey D gerade, so bekommt man ein geradewinkliges Viereck, welches dem Dreiecke ABC gleich ist. Und auf die Art kan man ein jedes Dreieck in ein rechtwinkliges Viereck verwandeln.

F. 213.

S. 20. Aus eben dem Satze von der Gleichheit der Dreiecke,
M m m wel

- IX. welche auf gleichen Grundlinien zwischen zwei Parallellinien stehen, wird auch geschlossen, daß ein Viereck, unter dessen Seiten zwei einander parallel laufen, einem Dreiecke gleich sey, dessen Grundlinie, die Summe der gedachten parallelen Seiten ist, und die Höhe, die Entfernung derselben von einander. Es sey ABCD ein dergleichen Viereck, und AD sey der BC parallel. Man ziehe AC, und theile dadurch das Viereck in zwei Dreiecke ABC, ACD. So dann mache man in der verlängerten BC die Linie CE = AD, und ziehe AE. Weil nun die zwei Dreiecke ADC, ACE zwischen den parallelen AD, BE auf gleichen Grundlinien AD, CE stehen: so sind diese Dreiecke einander gleich. Folgendes ist $ABC + ADC = ABC + ACE$, das ist, das Viereck ABCD ist dem Dreiecke ABE gleich. Nun ist die Grundlinie desselben $BE = BC + CE$, das ist $= BC + AD$, weil $CE = AD$, und seine Höhe ist die Entfernung der Parallellinien AD, BE von einander. Hieraus ist leicht ein dergleichen Viereck, in ein Parallelogramm zu verwandeln. Die Grundlinie dieses Parallelogramm wird $\frac{1}{2} BE$, das ist $\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} CE$, oder $\frac{1}{2} BC + \frac{1}{2} AD$, und seine Höhe ist der Höhe des Dreieckes ABE gleich.

Die übrigen flachen Figuren mit Dreiecken zu vergleichen.

§. 21. Was die übrigen geradlinichten Figuren anlangt, welche unter denen die wir betrachtet haben, nicht mit begriffen sind, das ist, bey welchen sich das allgemeine Kennzeichen der Gleichheit der Figuren entweder gar nicht, oder doch nicht leicht, anwenden läßt: so sind dieselben gleich, wenn sie aus gleichen Dreiecken zusammen gesetzt sind, und dieses ist ein Kennzeichen ihrer Gleichheit. Man kan nemlich eine jede solche Figur, wie wir schon oben gesehen, durch Querlinien in Dreiecke zertheilen. Hat man nun zwei Vielecke mit einander zu vergleichen, so theile man sie in Dreiecke, und sehe, ob dieses so geschehen könne, daß vor jedes Dreieck, welches in der ersten Figur vorkommet, in der anderen ein Dreieck vorkomme, welches jenem gleich ist. Ist dieses, so sind die Figuren nothwendig gleich. Allein weil daraus, daß die Figuren nicht dergestalt getheilet werden können, nicht folget, daß sie ungleich sind; denn es können auch die Summen ungleicher Größen gleich seyn, und aus ungleichen Dreiecken können gleiche Figuren zusammen gesetzt werden: so ist diese Art die Gleichheit der Figuren zu untersuchen nicht überall anzuwenden.

§. 22. Man

S. 22. Man kan sich deswegen noch eine andere Methode vorstellen, die geradelinichte Figuren mit einander zu vergleichen, welche die Unbequemlichkeiten der vorigen nicht hat, und welche darinnen besteht, daß man eine jede vieleckigte Figur erstlich in ein einziges Dreieck, und hernach in ein geradenwinklichtes Viereck verwandelt. Denn wenn man dieses bey zwey Figuren beobachtet, und setzet vor beyde Figuren rechtwinklichte Vierecke, welche ihnen gleich sind, so kan man hernach zum öfteren durch dasjenige, so bereits gewiesen worden, sonst aber allezeit vermittelst desjenigen, so folgen wird, diese rechtwinklichte Figuren mit einander vergleichen, und sehen, ob sie gleich seyn oder nicht; findet man nun das erste, so ist der Schluß leicht gemacht, daß auch die Vielecke, aus welchen sie gemacht werden, und welchen sie gleich sind, einander gleich seyn müssen.

IX.
Abkürz.

S. 23. Wir wollen diese Anweisung, jedes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln, so leicht vorstellen als es möglich ist. Sie besteht darinnen, daß, wenn eine vieleckigte Figur gegeben ist, von so vielen Seiten als man wil, man eine andere Figur mache, welche eine Seite weniger hat als jene, und doch jener gleich ist. Man siehet leicht, daß, wenn man dieses bey allen Vielecken bewerkstelligen kan; man leicht aus einem Sechseck ein Fünfeck, aus einem Fünfeck ein Viereck, und endlich aus einem Viereck ein Dreieck werde machen können, und wir haben also in der That nichts anderes zu zeigen, als wie überhaupt die Zahl der Seiten einer jeden geradelinichten Figur um eine zu vermindern sey.

S. 24. Es sey die Figur das Sechseck ABCDEF, welches man in ein Fünfeck verwandeln sol, so schneide man vermittelst einer Queerlinie AE von dem gegebenen Sechseck ein Dreieck ab, wie hier AFE. Durch die Spitze dieses Dreiecks F ziehe man mit der gezogenen Queerlinie AE die gerade Linie FG parallel, auf diese oder jene Seite. Man verlängere so dann eine von den Seiten des Sechsecks, welche an der AE liegen, als BA, so lange, bis sie die Linie GF in G schneidet, so kan man eine gerade Linie GE ziehen, und man hat an statt des Sechsecks ABCDEFA, das Fünfeck GBCDEG, welches dem Sechseck gleich ist.

F. 215.

S. 25. Diese Gleichheit ist also einzusehen. Das Sechseck ABCDEF bestehet aus dem Fünfeck ABCDE, und aus dem
M m m 2 Dreieck

IX. Dreyecke AEF; das Fünfeck GBCDE aber besteht wieder aus Winkeln. ABCDE und aus dem Dreyecke GAE. Man sind die zwey Dreyecke FAE und GAE gleich, weil sie beyde auf der Seite AE und zwischen den Parallellinien AE, GF stehen. Derowegen sind die zwey Figuren, das Sechseck und das Fünfeck, aus zwey Theilen zusammen gesetzt, welche einander gleich sind, nemlich das Sechseck aus ABCDE + AEF, und das Fünfeck aus ABCDE + AEG, woraus allerdings folget, daß dieselbe Figuren einander gleich sind. Es ist aber das Sechseck in ein Fünfeck verwandelt worden, indem der Winkel FAB verschwunden ist, da man an die Stelle der zwey Seiten BA + AF, diese zwey BA + AG in die Figur gebracht hat, welche gerade ausliegen, und in der That nur eine Seite BAG geben.

§. 26. Soll man aber ein Dreyeck machen, welches einem gegebenen regulären Vielecke gleich ist, so kan man viel leichter fertig werden, als mit andern Vielecken. Man kan jederzeit in einem regulären Vielecke ein Punct finden, welches von allen Ecken, wie auch von allen Seiten der Figur gleich weit entfernt ist, und wenn man von diesem Puncte, welches wir den Mittelpunct des Vieleckes nennen wollen, an alle Ecken des Vieleckes gerade Linien ziehet, so wird das Vieleck in lauter solche Dreyecke getheilet, welche auf einander passen können. Man könnte dieses als bekannt annehmen, denn es fließet aus demjenigen, so wir von der Beschreibung dieser Art Vielecke gewiesen; und der Mittelpunct des Vieleckes ist mit dem Mittelpuncte des Cirkels, in welchen oder um welchen das Vieleck beschrieben worden ist, einerley. Doch ist es besser, daß wir es von vorne beweisen. Wir hätten dieses bereits thun können, und vielleicht auch bereits thun sollen. Wir enthalten uns aber mit Fleiß, den Leser mit solchen Sätzen zu überhäuffen, deren Nutzen ihm nicht so gleich in die Augen leuchtet, und, wir wollen es nur bekennen, es begegnet uns auch zuweilen, daß wir einen oder den anderen Satz, welcher seinen Nutzen erst in den folgenden hat, mitzunehmen vergessen, welcher hernach da muß eingerücket werden, wo wir ihn gebrauchen.

F. 216.

§. 27. Es sey also zu beweisen, daß ein jedes reguläres Vieleck einen Mittelpunct habe. Wir werden dieses am besten zeigen können, wenn wir weisen, wie derselbe zu finden sey. Es sey das reguläre Sechseck ABD gegeben, und dessen Mittelpunct zu suchen. Man theile den Winkel desselben A, vermittelst der Linie AC, in zwey gleiche Theile, wie auch den nebenstehenden B vermittelst der BC. Diese ge-
raden

raden Linien AC, BC laufen nothwendig in einem Puncte zusammen. Man bemerke dieses mit C, so ist C der gesuchte Mittelpunkt. Denn die Winkel CAB, CBA sind einander gleich; weil sie die Helften der gleichen Polygonwinkel A und B sind. Folgendes sind auch die Seiten AC und CB, in dem Dreyecke ACB einander gleich. Man ziehe von C an die nächste Ecke des Vielecks die gerade Linie CE. Weil nun auch CBE die Helfte des Polygonwinkels B und folgendes dem Winkel CAB gleich ist, aber auch $CB = CA$, und $BE = AB$, so ist das Dreyeck CBE dem Dreyecke CAB gleich und ähnlich, und $CE = CB$, aber auch $CEB = CBA$; IV, 112. und CEB ist wieder die Helfte des Polygonwinkels. Demnach sind die drey Puncte A, B, E von dem Mittelpuncte C gleich weit entfernt: aber man hat auch eben die Gründe weiter zu gehen und zu zeigen, daß D von C so weit entfernt sey, als E, welche man gebrauchet zu zeigen, daß E von C so weit entfernt sey als B. Und man kan also schliessen, daß alle Ecken der Winkel des Vielecks von dem Puncte C gleich weit entfernt sind, wie auch, daß durch die gerade Linien CA, CB, CE und so fort, das reguläre Vieleck in gleiche Dreyecke zertheilet werde.

§. 28. Und hieraus schliesset man leicht, daß auch alle Seiten der Figur von C gleich weit entfernt sind. Denn die Entfernungen der Seiten von C sind die Perpendicularlinien, welche aus C auf die Seiten fallen, dergleichen CF ist. Daß aber diese Perpendicularlinien alle gleich sind, siehet man aus der Gleichheit und Aehnlichkeit der Dreyecke CAB, CBE gar leicht, und wir wollen den Leser mit diesem Beweise nicht einmal aufhalten. Auch ist daran nicht zu zweifeln, daß wenn man aus C als dem Mittelpuncte durch A einen Eirkelkreis beschreibet, dieser auch durch B, E, D und die übrigen Ecken der Figur gehen werde, wie auch, daß wenn man um eben dieses Punct C einen Eirkelkreis dergestalt beschreibet, daß er die Seite AB berührt, er die übrigen Seiten alle berühren werde. In dem ersten Falle wird der Eirkelkreis um die reguläre Figur beschrieben, in dem andern Fall aber in dieselbe.

§. 29. Will man nun ein Dreyeck beschreiben, welches einem beliebigen angenommenen Theile der regulären Vielecke CABEDC gleich ist, so verfähre man folgendergestalt. Man setze an eine beliebige angenommene gerade Linie $ab = AB$, ziehe auf eben diese Linie cf perpendicular, und mache sie so groß als CF ist. So dann ziehe man ca, cb; so wird das Dreyeck cab dem Dreyecke CAB gleich;

W m m 3

weil

F. 216.

217.

IX.
Mittelpunkt.

LX. weil diese Dreiecke gleiche Grundlinien $AB = ab$, und gleiche Höhen $CF = cf$ haben. Ferner macht man auch $be = AB$ und ziehe ce , so ist das Dreieck cbe wieder dem Dreiecke ACB gleich, aus eben der Ursach die wir angegeben, weil sie gleiche Grundlinien $be = AB$, und gleiche Höhen $CF = cf$ haben. Es ist aber auch das Dreieck CAB dem Dreiecke CBE gleich, und folgendes auch $cbe = CBE$. Führet man nun in dieser Arbeit fort, und machet wieder $ed = AB$, und ziehet cd , so wird aus den wiederholten Gründen wieder $ced = ACB = CED$. Und da nun also $CAB = cab$, und $CBE = cbe$, wie auch $CED = ced$, so ist allerdings die Summe der ersteren dieser Dreiecke $CAB + CBE + CED$ gleich der Summe der letzteren $cab + cbe + ced$, und die Figur $CABEDC$, welche aus den ersteren Dreiecken zusammen gesetzt ist, ist gleich dem Dreiecke cad , welches aus den letzteren Dreiecken besteht. Man siehet aber auch daß $ab + be + ed = AB + BE + ED$, das ist, daß ad die Grundlinie des Dreieckes cad dem Theile des Umkreises der regulären Figur $ABED$, gleich sey.

§. 30. Und es ist demnach das Stück des regulären Vieleckes, welches wir betrachten $CABEDC$ einem Dreiecke cad gleich, dessen Grundlinie ad dem äußeren Umkreise desselben $ABED$; und dessen Höhe cf der geraden Linie CF , welche aus dem Mittelpuncte des regulären Vieleckes auf eine Seite desselben perpendicular gefallen, das ist, der Entfernung der Seiten von dem Mittelpuncte gleich ist. Wir schliessen hieraus zweyerley: Erstlich, daß, was von dem Theile des regulären Vieleckes erwiesen worden ist, auch von dem ganzen Vielecke dergestalt richtig sey, daß, wenn man ein Dreieck verfertigen wil, welches einem regulären Vielecke gleich ist, man nur zur Grundlinie desselben den ganzen Umkreis des Vieleckes, und zur Höhe eben die Linie CF , nehmen müsse. Oder daß ein jedes reguläres Vieleck einem Dreiecke gleich sey, dessen Grundlinie der ganze Umkreis des Vieleckes ist, und die Höhe, die Entfernung der Seiten des Vieleckes von dem Mittelpuncte desselben. Und zweitens, daß, was hier von dem Theile des regulären Vieleckes $CABED$ erwiesen worden, überhaupt von solchen Figuren richtig sey, welche, wie $CABED$ aus gleichen und ähnlichen gleichschenkligen Dreiecken zusammen gesetzt sind, ob sie zwar nicht als ein Theil eines regulären Vieleckes angesehen werden können. Denn aus diesen Begriffen, daß die Dreiecke CAB , CBE , CED gleich, ähnlich und gleichschenklige
sind,

sind, ist dasjenige, so wir hier erwiesen, hergeleitet worden, und kan IX. also überhaupt von allen Figuren geschlossen werden, welche so wie Abschnitte CABED aus dergleichen Dreyecken zusammen gesetzt sind.

§. 31. Daß aber dergleichen Figuren seyn können, welche aus gleichen und ähnlichen gleichschenkligten Dreyecken, wie CABED zusammen gesetzt werden
Winkel A
würde er, n
Winkel be
ACB, BCD
Acht mal a
mal genom
Winkel.

7. 218.

§. 32.
bogen besch
sehen, es se
V. 90. wo
sind, gezeig
daß man d
gons dem
messer, im
Ende, das
rung aufzu
seyn mag n
wenn man
het, welche
Zahl dieser
ohne Ende

§. 33. Dieses nun giebet uns die Schlüsse an die Hand, durch welche wir wenigstens den Gedanken eine geradelinichte Figur vorstellen können, welche so groß ist als der Ausschnitt des Circels CABDE. Denn dieselbe wirklich zu beschreiben, ist deswegen nicht möglich, weil man dieses zu bewerkstellen eine gerade Linie haben müste, welche so groß ist als der Circelbogen AE, welche anzugeben noch zur Zeit in keines Geometria Gewalt ist, wenn von einer solchen Richtigkeit die Rede ist, welche durch un widersprechliche Schlüsse darge

IX. gethan werden kan, dergleichen man in dieser Wissenschaft überall aus
 Ausschnitt. thet. Könnte man aber dieses machen, und wäre die Linie GH in der 219
 P. 219. Zeichnung dem Bogen AE gleich, so dürfte man hernach nur auf GH
 ein Dreieck GHI setzen, dessen Höhe GI so groß ist, als der Radius
 des Ausschnittes CA. Dieses Dreieck GHI wäre dem Ausschnitte
 CAE gewiß vollkommen gleich. Und daß dieses sey, kan aus den bis-
 her gelegten Gründen dargethan werden.

3DE Kleiner sey
 Dreieck vorstellt,
 leicht geschehen
 e; so ist die Höhe
 welche so groß ist
 Vorans nothe-
 Dreieck CABDE
 als IGH. In-
 ie IGH bestän-
 weil dadurch so
 näher kommt;
 n als das Dreie-
 möglich sey, daß
 I. Denn wäre
 machen daß ein
 schnitt CAE. Ge-
 Dreieck IKL; weil
 CABDE man
 kan, so kan man
 dem erwähneteren
 Dreieck größer
 Dreieck größer als
 IKL gleich sey.
 er werde als der
 möglich daß das
 Ier daß der Aus-

schnitt kleiner sey als das Dreieck.

S. 35. Man kan aber auch auf eben die Art zeigen, daß das Dreieck
 IGH nicht kleiner seyn könne als der Ausschnitt CAE. Denn
 das Dreieck Cabde ist zwar größer als das Dreieck IGH, weil die
 Grundlinie des Dreieckes, welche dem Dreiecke Cabde gleich ist, das
 ist

ist, die Länge des Umkreises desselben $abde$ größer ist als der Cirkelbogen AE , und folgendes auch größer als $GH = AE$, die Höhe aber des Dreiecks, welches dem Vieleck $cabde$ gleich ist, Cf , der Höhe $IG = CA$ gleich ist. Man kan aber durch die Vermehrung der Seiten des Umkreises $abde$ denselben dem Cirkelbogen AE immer näher und näher bringen, und dadurch auch das Vieleck $cabde$ dem Dreieck IGH nach Belieben immer mehr und mehr nähern; doch niemals kan das Vieleck kleiner werden als das Dreieck IGH , weil weder die Höhe desselben Cf kleiner werden kan als IG , denn diese Cf bleibt beständig einerley, noch auch der Umkreis $abde$ kleiner als der Bogen $AE = GH$. Ist aber dieses alles, so kan auch der Ausschnitt CAE nicht größer seyn als das Dreieck IGH . Denn wäre der Ausschnitt größer als IGH , und etwa so groß als IMN , so könnte man eine vieleckigte Figur, dergleichen $cabde$ ist, machen, die kleiner wäre als der Ausschnitt. Denn weil man eine solche Figur machen kan, deren Größe dem Dreieck IGH so nahe kommet, als man wil, so kan man auch eine machen, deren Größe von der Größe des Dreiecks IGH weniger verschieden ist, als die Größe des Dreiecks IMN . In diesem Falle aber ist das Vieleck $cabde$ kleiner als der Ausschnitt ACE , weil man setzt daß dieser Ausschnitt dem Dreieck IMN gleich sey. Es ist demnach der Ausschnitt CAE auch nicht größer als das Dreieck IGH .

S. 36. Und da also der Ausschnitt eines Cirkels CAE weder größer noch kleiner ist als das Dreieck IGH , dessen Grundlinie GH dem Bogen des Ausschnittes AE , und dessen Höhe IG dem Halbmesser desselben CA gleich ist, so muß nothwendig der Ausschnitt CAE dem Dreieck IGH gleich seyn. Also ist der vierte Theil eines Cirkels einem Dreieck gleich, dessen Grundlinie dem Quadranten, und dessen Höhe dem Halbmesser gleich ist, und eben diese Höhe muß man behalten, wenn man ein Dreieck machen wil, welches einem halben oder einem ganzen Cirkel gleich ist; nur muß zu dem halben Cirkel die Grundlinie des Dreiecks dem halben Umkreise gleich genommen werden, und wenn das Dreieck einem ganzen Cirkel gleich seyn sol, so muß man zu seiner Grundlinie eine Länge annehmen, welche dem ganzen Umkreise des Cirkels gleich sey.

IX.
Abschnitt.

Allgemeine Gründe, die Dreiecke und Parallelogrammen mit einander zu vergleichen.

S. 37. So weit konnte uns unser Grundsatz führen. Es sind aber wie wir schon einiger maffen erwehnet haben, die bisher angegebene Sätze noch nicht hinlänglich von der Gleichheit aller Figuren ein Urtheil zu fällen. Sie langen nicht einmal bey den einfachesten, nemlich den Dreiecken, oder den rechtwinklichten Vierecken überall zu, noch vielweniger sind wir im Stande vermittelst derselben die Verhältniß, welche zwey ungleiche Figuren gegen einander haben, anzuzeigen. Denn es folget nicht, zwey Dreiecke oder zwey Parallelogrammen haben ungleiche Grundlinien, und ungleiche Höhen, also sind sie ungleich. Es kan seyn, daß der einen Figur so viel an der Länge abgethet, als sie im Gegentheile breiter ist als die andere, und können also die Figuren, bey verschiedenen Längen und Breiten, doch gleich seyn. Wir müssen untersuchen, unter was vor Umständen diese Gleichheit der Dreiecke und der Parallelogrammen bey verschiedenen Grundlinien und Höhen statt habe, aber wir werden dieselbe nicht einsehen können, wenn wir nicht erst überhaupt ihre Verhältnisse gegen einander betrachten. So bald dieses ausgemachet seyn wird, werden wir im Stande seyn von der Vergleichung der Größe aller ebenen Flächen etwas allgemeines anzugeben. Wir fangen natürlicher Weise von solchen Dreiecken und Parallelogrammen an, welche gleiche Höhen haben, von was vor Größe auch übrigens ihre Winkel seyn mögen.

F. 220.

S. 38. Es seyn ABC und abc zwey Dreiecke von gleicher Höhe. Man theile die Grundlinie BC des einen in eine beliebige Zahl gleicher Theile, wie wir öfters gethan, wenn wir die Verhältnisse der Größen untersuchten, und ziehe von allen Theilungspuncten gerade Linien nach der Spitze des Dreieckes A . Dadurch wird das Dreieck ABC in Theile getheilet, welche einander alle gleich sind. IX, 14. Denn es haben die kleinen Dreiecke, in welche dasselbe zerfällt worden ist, alle gleiche Grundlinien und gleiche Höhen, oder sie stehen alle auf gleichen Grundlinien zwischen den Parallellinien Bc und Aa : Nunmehr lege man bc aus B in D , und ziehe DA , so wird auch das Dreieck ABD dem Dreiecke abc gleich seyn, weil diese Dreiecke ebenfalls so wohl gleiche Höhen als gleiche Grundlinien haben. Man siehet aber auch leicht, daß eben dadurch das äußerste Punct D der Grundlinie BD zwischen diejenige Theilungspuncte der Linie BC fällt, welche von

von dem Anfange derselben B um so viele gleiche Theilchen entfernt sind, als viele gleiche Theile des Dreieckes ABC zwischen der ersten Linie AB und denjenigen liegen, zwischen welche AD fällt: und es ist nicht nöthig zu erinnern, daß dieses bey einer jeden Theilung der BC folgen müsse, weil ein blosser Blick in die Figur, uns davon zu überzeugen, genugsam ist. Dieses aber ist das Kennzeichen, daß sich das Dreieck ABD zu dem Dreiecke ABC verhalte, wie sich die Grundlinie des ersteren BD zu der Grundlinie des zweyten BC verhält. VI. 60. Ist aber $ABD:ABC=BD:BC$, so ist auch $abc:ABC=bc:BC$. Denn diese Proportion folget aus jener, wenn man an die Stelle der ABD und BD, die Größen abc, bc setzt, welche ihnen gleich sind. Es verhalten sich demnach zwey Dreiecke abc, ABC, welche gleiche Höhen haben, gegen einander, wie ihre Grundlinien bc, BC.

IX.
Abschnitt:

S. 39. Will man bey diesem Beweise bis auf die ersten Begriffe zurücke gehen, und zum Grunde legen, daß die Verhältnisse solcher Größen gleich seyn, welche durch einerley gleichförmiges Wachsthum zugleich entstehen, so wird man mit dem Beweise fast noch eher fertig. Denn man stelle sich vor, daß die Linie BC nach und nach angewachsen, und daß jederzeit durch die äußersten Punkte derselben, und durch A gerade Linien gezogen sind: so ist klar, daß indem eines der gleichen Theilchen, die man sich in BC vorstellt, anwächst, so groß oder so klein man auch diese Theilchen annehmen wil, auch eines der gleichen Theilchen des Dreieckes ABC erzeugt werde. Und daß also, wenn BC gleichförmig anwächst, auch das Dreieck ABC durch ein gleichförmiges Wachsthum entstehe, über dieses aber BD und das Dreieck ABD, wie auch BC und das Dreieck ABC zugleich erzeugt werde. Also verhält sich nach diesen Begriffen allerdings BD zur BC, wie sich ABD zum ABC verhält, und die Proportion $ABD:ABC=BD:BC$ ist richtig. VI. 67.

S. 40. Man wird nach einem gar kleinen Nachdenken finden, daß dasjenige so wir von den Dreiecken gewiesen, auch von den Parallelogrammen richtig sey, und daß auch dieser Figuren ihre Größen, oder die Flächen welche von ihren Umkreisen beschloffen werden, sich gegen einander so, wie ihre Grundlinien, verhalten, wenn die Parallelogrammen gleiche Höhen haben: ihre Winkel mögen im übrigen beschaffen seyn wie sie wollen. Der Beweis ist vollkommen wie derjenige, welchen wir eben bey den Dreiecken angewandt, und man darf nur die Augen auf die 22^{te} Figur werfen, um ihn einzusehen. Es sind in ders.

F. 221.

IX. selben ABC, und abc Parallelogramme von gleichen Höhen, BC ist, wie vorher die Grundlinie des Dreiecks ABC, in gleiche Theile getheilet, und durch die der Seite AB parallel laufende Linien, welche durch diese Theilungspuncte gezogen sind, ist auch das Viereck ABC in gleiche Vierecke zerfällt, deren an der Zahl so viele sind, als viele gleiche Theilchen man der BC gegeben; BD ist der bc gleich, und folgendes auch das Viereck ABD dem Vierecke abc. Aus diesen Gründen haben wir geschlossen, daß das Dreieck ABD oder abc sich zu dem Dreiecke ABC verhalte, wie BD oder bc zur BC. Man wird also hier eben das schließen müssen, wenn diese Buchstaben die Vierecke der 221 Figur bedeuten, und die Proportion $abc:ABC = bc:BC$ wird auch hier richtig seyn.

F. 222. §. 41. Sind die Dreiecke oder die Parallelogramme geradewinklicht, so kan man diejenigen Seiten ihre Grundlinien nennen, welche man vorher als ihre Höhen angesehen, wodurch dann diejenigen Seiten, welche vorher die Grundlinien waren, nunmehr ihre Höhen werden. Eine Figur kan dieses deutlicher machen. Wenn ABC ein geradewinklichtes Dreieck oder Viereck ist, und man siehet BC als seine Grundlinie an, so ist AB seine Höhe, denn diese Linie ist hier die Entfernung der Linie, welche durch die Spitze A mit der Grundlinie BC parallel kan gezogen werden, von dieser Grundlinie. Nimmet man aber AB vor die Grundlinien an, so werden so dann BC die Höhen dieser Figuren. Man kan also bey diesen Figuren die Wörter, Grundlinien und Höhen nach Belieben verwechseln, und man kan also auch, wenn von geradewinklichten Dreiecken oder Vierecken die Rede ist, sagen, daß wenn dieselben gleiche Grundlinien haben, sie sich gegen einander verhalten werden, wie sich ihre Höhen gegen einander verhalten. Dieses ist eben das vorige mit andern Worten gesagt.

F. 223. §. 42. Denket man aber dieser Sache nur noch etwas nach, so wird man finden, daß eben dieses von allen Dreiecken, wie auch von allen Parallelogrammen könne gesagt werden, daß nemlich sie sich wie ihre Höhen verhalten, wenn ihre Grundlinien gleich sind, ihre Winkel mögen so groß oder so klein seyn, als sie wollen. Man siehet dieses auf nachfolgende Art ein. Die Dreiecke ABC, abc haben einerley Grundlinien $BC = bc$, aber verschiedene Höhen. Man setze auf die Grundlinie EF = BC das geradewinklichte Dreieck DEF, so dem Dreiecke ABC gleich ist, welches geschieht, wenn man ihm eben die Höhe giebet, welche ABC hat. Und eben so setze man auf die Grund-

linie

linie $ef = bc$ das geradewinklichte Dreyeck $def = abc$, welches wieder erhalten wird, wenn man auch die Höhe dieses Dreyecks de so groß machet, als die Höhe des Dreyecks abc ist. Da nun also die Dreyecke ABC , DEF , wie auch abc , def einander gleich sind, so siehet man leicht, daß die Verhältniß $ABC : abc$ der Verhältniß $DEF : def$ gleich sey, denn es sind so gar die Glieder beyder Verhältnisse von einerley Größe. Nun ist aber die letztere Verhältniß $DEF : def$ der Verhältniß $DE : de$ gleich, wie eben gewiesen worden ist; weil nemlich die geradewinklichten Dreyecke DEF , def gleiche Grundlinien EF , ef haben, und sich also wie ihre Höhen $DE : de$ verhalten. Da nun auch $ABC : abc = DEF : def$, so muß auch die Verhältniß $ABC : abc$ der Verhältniß $DE : de$ gleich seyn, und man hat $ABC : abc = DE : de$. Da nun aber DE die Höhe des Dreyecks ABC , und de die Höhe des Dreyecks abc ist, so siehet man nunmehr dasjenige so wir erweisen solten, daß alle Dreyecke von gleichen Grundlinien sich wie ihre Höhen verhalten.

§. 43. Nichts ist leichter, als eben dieses von den Parallelogrammen zu zeigen. Man darf nur den eben gegebenen Beweis wiederholen, doch so, daß man jederzeit vor ein Dreyeck ein Parallelogrammum nenne, und denselben im übrigen auf die 224 Figur anwenden, *F. 224.* so kan nicht der geringste Zweifel daran übrig bleiben, daß auch jede Parallelogrammen von gleichen Grundlinien sich gegen einander wie ihre Höhen verhalten.

§. 44. Und hieraus siehet man auch, daß ein jedes Dreyeck einem Parallelogrammum gleich sey, welches auf eben der Grundlinie steht, auf welche das Dreyeck gesetzt worden, und dessen Höhe halb so groß ist, als die Höhe des Dreyecks. Es sey ABC ein Dreyeck, *F. 225.* und DEF ein Parallelogrammum, welche auf gleichen Grundlinien $BC = EF$ zwischen zwei Parallellinien stehen: so ist das Dreyeck die Helfte des Parallelogrammum DEF . Denn man setze auf EF ein anderes Parallelogrammum GEF , dessen Höhe die Helfte ist der Höhe des DEF , und folgendes die Helfte der Höhe des Dreyecks ABC , so ist dieses Parallelogrammum GEF ebenfalls die Helfte von DEF , denn die Grundlinien der Parallelogrammen DEF , GEF sind einander gleich, folgendes verhalten sich die Parallelogrammen wie ihre Höhen; oder man siehet vielmehr gleich, aus der Figur, daß $GEF = \frac{1}{2} DEF$, und da folgendes so wohl ABC als GEF der Helfte von DEF

IX. DEF gleich sind, so ist auch ABC dem Parallelogramm GEF
Höhenmitt. gleich, und so ist es mit allen Dreiecken.

§. 45. Diese Sätze nun vermittelt welcher wir die Dreiecke und Parallelogrammen von gleichen Höhen oder von gleichen Grundlinien mit einander verglichen, geben uns an die Hand, wie jede Dreiecke und Parallelogrammen ihre Grundlinien und Höhen mögen so groß seyn als sie wollen, mit einander verglichen werden können. Es geschieht dieses ohne viele Weitläufigkeit. Man darf nur die Verhältniß ihrer Grundlinien untersuchen, wie auch die Verhältniß ihrer Höhen, und diese Verhältnisse zusammen setzen, so ist die Verhältniß, welche durch diese Zusammensetzung kommt, die Verhältniß der Dreiecke oder der Parallelogrammen. Der Beweis wird zugleich den Verstand dieser Sache etwas deutlicher machen.

F. 226.

§. 46. Wir sollen das Dreieck ABC mit dem Dreiecke abc vergleichen, und sagen, wie sich jenes zu diesem verhalte, auf eine Art, welche sich anwenden läßt, alle Dreiecke mit einander zu vergleichen, und eine eben dergleichen Vergleichung sollen wir auch mit den Viere-

F. 227.)

cken ABC, abc, deren entgegen gesetzete Seiten einander parallel sind, anstellen. Es haben die beiden Dreiecke ABC, abc verschiedene Grundlinien BC und bc, sonst wäre die Vergleichung derselben leicht, denn sie würden sich wie ihre Höhen verhalten, aber auch selbst diese Höhen sind verschieden. Eben so ist es auch mit den Vierecken. Um aber bey dem allen die Vergleichung der Dreiecke ABC, abc zu verrichten, so stelle man sich ein anderes Dreieck DEF vor, dessen Grundlinie DEF der Grundlinie bc des Dreieckes abc gleich ist, und welches mit dem Dreiecke ABC einerley Höhe hat. Man kan gar leicht das Dreieck ABC mit diesem Dreiecke DEF vergleichen, vermittelt des Satzes, dessen wir eben erwehnet: nemlich, es verhält sich das Dreieck ABC zu dem Dreiecke DEF, wie die Grundlinie des ersteren BC zu der Grundlinie des zweyten EF, oder $bc = EF$. Wiederum läßt sich das Dreieck DEF mit dem Dreiecke abc vergleichen. Denn weil die Grundlinien dieser Dreiecke gleich sind, so verhält sich das Dreieck DEF zu dem Dreiecke abc, wie sich die Höhe des ersteren AG zu der Höhe des zweyten ag verhält. Und da wir also ABC mit DEF, und DEF wieder mit abc vergleichen können, so kan die Vergleichung des Dreieckes ABC mit dem Dreiecke abc selbst keine Schwierigkeit haben. Denn wenn wir die zwei Proportionen, die wir eben heraus gebracht haben:

ABC

$$ABC:DEF=BC:bc$$

IX.

DEF: $abc = AG:ag$ nur einiger massen betrachten, so sehen wir VIII, 8. so gleich, daß die Verhältniß des Dreiecks ABC zu dem Dreiecke abc aus der Verhältniß der Grundlinien BC: bc, und aus der Verhältniß der Höhen AG: ag dieser Dreiecke zusammen gesetzt sey.

§. 47. Bey den Parallelogrammen ist eben das richtig, was von den Dreiecken richtig ist. Wenn wir nunmehr die 227 Figur vor uns nehmen, um den Beweis, welchen wir von den Dreiecken gegeben, auf die in derselben gezeichnete Vierecke anzuwenden; zu welchem Ende diese eben so bezeichnet sind, wie jene: so hat man ebenfalls, weil die Parallelogrammen ABC, DEF, einerley Höhe AG, und die Parallelogrammen DEF, abc, einerley Grundlinie $bc = EF$, haben, und weil ag, die Höhe des Vierecks abc ist; so hat man, sage ich, hier ebenfalls,

$$ABC:DEF=BC:bc, \text{ und}$$

DEF: $abc = AG:ag$, und wenn man diese Verhältnisse zusammen setzt, so werden auch hier die Verhältnisse, welche durch die Zusammensetzung entstehen, einander gleich. Nun aber kommt durch die Zusammensetzung der ersteren zwei Verhältnisse die Verhältniß der Parallelogrammen ABC: abc, und in den zwei letzteren werden die Verhältnisse der Grundlinien dieser Parallelogrammen BC: bc, und der Höhen AG: ag zusammen gesetzt, daß also auch die Verhältniß der Parallelogrammen ABC: abc der Verhältniß $BC \times AG: bc \times ag$ gleich ist, welche durch die Zusammensetzung der Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen heraus gebracht wird.

§. 48. Wir befürchten nicht, daß diejenigen, welche recht eingesehen, was von der Zusammensetzung der Verhältnisse gelehrt worden bey dem Nutzen oder der Anwendung dieses Satzes Schwierigkeit finden werden. Doch kan es nicht schaden, wenn wir die Sache zum Ueberfluß erklutern, zumalen da hier die Zusammensetzung der Verhältnisse zu erst gebraucht wird; und der gegenwärtige Satz dieselbe in ein noch größers Licht zu setzen vermögend ist. Es sey so wohl die Verhältniß der Grundlinien als auch die Verhältniß der Höhen der Dreiecke oder Parallelogramme ABC, abc, welche man vergleichen sol, durch Zahlen ausgedrückt, und es sey:

$$ABC:DEF=BC:bc=5:3, \text{ und}$$

$$DEF:abc=AG:ag=4:2, \text{ so wird}$$

ABC

IX. $ABC:abc = BC \times AG:bc \times ag = 5 \times 4:2 \times 3 = 20:6$, und wie
 Abschnitt. sich 20 zu 6 verhält, so verhält sich auch das Dreieck oder Parallelogrammum ABC zu dem Dreiecke oder Parallelogrammum abc. Denn die Glieder der Verhältniß, welche aus den zweyen $BC:bc$ und $AG:ag$ zusammen gesetzt ist, sind in diesem Falle, da die Verhältnisse durch Zahlen ausgedrückt sind, allezeit die Producte der ersten und der letzten Glieder dieser Verhältnisse VIII, 24.

S. 49. Und so ist es überall bey diesen Figuren. Nachdem man so wohl die Grundlinien derselben durch Zahlen ausgedrückt hat, als auch ihre Höhen, so multipliciret man die Zahlen, welche die Grundlinien ausdrücken, durch die Zahlen, welche die Höhen anzeigen. Die
 F. 228. Verhältniß der Producte ist eben die Verhältniß, welche die Dreiecke oder die Parallelogramme, welche man vergleichen sollen, gegen einander haben. Dieses auch dem Gesichte vorzustellen sind in der 228 Figur zwey Parallelogramme gezeichnet worden, deren Grundlinien sich so wie IX, 48. angenommen worden, gegen einander verhalten: da man denn leicht siehet, daß auch ABC sich gegen abc verhalte, wie 20:6, welche eben die Zahlen sind, welche heraus gebracht worden, indem wir die Verhältnisse 5:3 und 4:2 zusammen gesetzt. Wir haben nicht nöthig erachtet, auch dergestalt getheilte Dreiecke zu zeichnen, weil man alle Dreiecke gar leicht in Parallelogrammen verwandeln kan, da denn klar ist, daß von der Größe der Dreiecke dasjenige richtig seyn müsse, was von der Größe der Parallelogrammen erwiesen worden.

S. 50. Soll man aber zwey gerade Linien schaffen, deren erstere sich zu der zweyten verhält, wie ABC zu abc, es mögen nun diese Buchstaben die Dreiecke der 226, oder die Vierecke der 227 Figur bedeuten; so giebet uns eben der Satz, und dasjenige, so wir von der Zusammenfassung der Verhältnisse bereits wissen, dazu die Anleitung. Nachdem die erste dieser Linien, die wir uns unter P vorstellen können, ob sie zwar nicht gezeichnet ist, nach Belieben angenommen worden, so mache man VI, 13. $BC:bc = P:X$: und nachdem man diese Linie X gefunden, mache man nochmals $AG:ag = X:Q$. so ist die Verhältniß der P zu Q aus den zwey Verhältnissen $BC:bc$, und $AG:ag$ zusammen gesetzt, und demnach der Verhältniß der Figur ABC zu der Figur abc gleich. Da man das erste Glied P der zusammen gesetzten Ver-

Verhältniß, nach Belieben annehmen darf, so kan man P allezeit so groß annehmen als BC ist; geschieht dieses, so wird in der Proportion BC: bc = P: X, die letzte X so groß als bc, und man hat also, um die Q zu erhalten, nur zu machen AG: ag = bc: Q. Demnach ist ABC: abc = P: Q = BC: $\frac{ag \times bc}{AG}$.

S. 51. Oder man nehme eine gerade Linie V, nach Belieben an, und suche zur V, zur BC und zur AG die dritte Proportionalinie P: und ferner suche man auch zu eben der V, zur bc und zur ag die dritte Proportionalinie Q, so verhält sich VIII, 55. wieder die erste dieser Linien $\frac{BC \times AG}{V}$ zu der zwoten $\frac{bc \times ag}{V}$ das ist P: Q, wie die Figur ABC

zu der Figur abc. Man kan sich auch hier die Arbeit erleichtern, wenn man V so groß annimmt als BC. Denn dadurch wird $P = \frac{BC \times AG}{V}$ so groß als AG. Und die zwote Linie Q = $\frac{bc \times ag}{V}$

wird in diesem Falle $\frac{bc \times ag}{BC}$, und man kan also sagen, es verhalte sich auch ABC zu abc, wie AG zur $\frac{bc \times ag}{BC}$.

S. 52. Man siehet aber auch aus den Figuren und Beweisen, die wir bisher von der Gleichheit der Parallelogrammen und Dreyecke gegeben, daß es sehr ohndthig sey, in den Beweisen so wohl als in den Figuren, andere als geradewinklichte Vierecke zu nennen und vorzustellen: und daß an die Stelle der Grundlinie, und der Höhe der Parallelogrammen, man nur die Seiten eines geradewinklichten Viereckes nennen dürfe. Denn es ist nichts leichter als dasjenige, was von geradewinklichten Vierecken gezeigt wird, auf die übrigen Parallelogramme anzuwenden, welche mit dem geradewinklichten Vierecke auf einer Grundlinie, und zwischen eben den Parallelen stehen können, oder welche mit dem geradewinklichten Vierecke gleiche Grundlinien und Höhen haben. Und man muß ohne dem, wenn schiefwinklichte Parallelogramme, nach den Sätzen, welche wir bishero erklärt haben, mit einander zu vergleichen sind, dieselbe in geradewinklichte verwandeln. Denn was thut man anders, indem man die Höhe AG zieht,

000

F. 227.

als

IX. als daß man die eine Seite des geradelinichten Viereckes findet, welches dem schiefwinklichten ABC gleich ist, dessen andere Seite BC bereits gegeben worden. Hat man aber die zwei Seiten eines geradelinichten Viereckes, so hat man das Viereck selbst, weil diese Vierecke sich allezeit aus zwei gegebenen Seiten beschreiben lassen, IV, 205. Man siehet aber leicht, daß wir von solchen Seiten dieser Vierecke reden, welche einander nicht entgegen gesetzt sind, sondern einen Winkel mit einander einschließen; mit einem Worte, von der Länge eines solchen Viereckes und von seiner Breite. Aus eben dem Grunde werden wir auch, bey der Vergleichung der Dreyecke, künftig hin meistens bloß geradewinklichte Dreyecke nennen, weil die übrigen doch erst in geradewinklichte Dreyecke müssen verwandelt werden, ehe man sie mit anderen Dreyecken, oder mit Parallelogrammen vergleichen will. Die Seiten eines solchen Dreyeckes sind diejenigen, welche den geraden Winkel einschließen.

F. 29.

S. 53. Will man nun ein geradewinklichtes Dreyeck abc mit einem geradewinklichten Vierecke ABC vergleichen; so hat man nur zu bedenken, daß das Dreyeck abc dem Vierecke $d bc$ gleich sey, dessen Seite bd halb so groß ist, als die Seite ab des Dreyeckes, IX, 44. Nun ist die Verhältniß des Viereckes ABC zu dem Vierecke $d bc$ aus den Verhältnissen $AB:db$ und $BC:bc$ zusammen gesetzt; also entstehet auch die Verhältniß des Viereckes ABC zu dem Dreyecke abc , durch die Zusammensetzung eben dieser Verhältnisse. Oder wenn man in der erstern derselben $AB:db$ an statt db setzt $\frac{1}{2} ab$, weil wir wissen, daß $db = \frac{1}{2} ab$, so wird dieselbe Verhältniß $AB:\frac{1}{2} ab$, und man siehet, daß die Verhältniß $ABC:abc$ aus den zwei Verhältnissen $AB:\frac{1}{2} ab$, und $BC:bc$ zusammen gesetzt werde. Es wird demnach die Verhältniß des geradewinklichten Viereckes ABC zu dem geradewinklichten Dreyecke abc aus der Verhältniß einer Seite des Viereckes zu der Hälfte einer Seite des Dreyeckes $AB:\frac{1}{2} ab$, und aus der Verhältniß der andern Seite des Viereckes BC zur andern Seite des Dreyeckes bc zusammen gesetzt.

S. 54. Nun nenne man an die Stelle der einen Seite des Viereckes und des Dreyeckes die Grundlinie dieser Figur, und der anderen gebe man den Namen der Höhe, so wird der Satz allgemein, und läßt sich auch von schiefwinklichten Parallelogrammen und Dreyecken verstehen, indem er anzeigt, daß die Verhältniß eines jeden Paralle-

logrammum zu einem Dreyecke aus der Verhältniß der Höhe der ersten Figur zur halben Höhe der zweiten, und aus der Verhältniß der Grundlinie der ersten Figur zur Grundlinie der zweiten: oder aber aus der Verhältniß der Höhe der ersten Figur zur Höhe der zweiten, und aus der Verhältniß der Grundlinie der ersten zu der Hälfte der Grundlinie der zweiten, zusammen gesetzt sey.

§. 55. Dieses ist die allgemeine Art, Parallelogramme mit Parallelogrammen, Dreyecke mit andern Dreyecken, und Parallelogrammen mit Dreyecken, zu vergleichen. Nimmet man aber in diesen Figuren die Seiten bald von dieser bald von jener Verhältniß an, so bekommt man besondere Sätze, welche eben so nützlich sind als die allgemeinen, und die mit diesen einerley Zweck haben. Wir können uns nun zu dieser besondern Betrachtung dieser Figuren wenden.

§. 56. Wir sehen zuerst, daß bey zwey Parallelogrammen die Grundlinien sich wie die Höhen verhalten, wenn man diese verkehrt setzt, oder daß sich in den Parallelogrammen ABC , abc , die Grundlinie BC zu der Grundlinie bc verhalte, wie die Höhe ab sich zu der Höhe AB verhält, und also nachstehende Proportion $BC : bc = ab : AB$ richtig sey. Ist nun dieses, so sind die Glieder der Verhältniß, welche kommt, wenn man eine dieser gleichen Verhältnisse $BC : bc$, und $ab : AB$ verkehrt stellet, und machet $AB : ab$, und sodann dieselbe Verhältniß mit der ersten $BC : bc$ zusammen setzt, einander gleich, $BC \times AB$ nemlich $= bc \times ab$, VIII, 47. Weil nun aber die zusammengesetzte Verhältniß $BC \times AB : bc \times ab$ der Verhältniß der Vierecke $ABC : abc$ gleich ist, IX, 45., so müssen auch diese Vierecke selbst gleich seyn. Und man siehet leicht, daß eben dieses auch von den Dreyecken ABC und abc könne gesagt werden, und demnach sind so wohl die Parallelogrammen als auch die Dreyecke, deren Grundlinien sich wie die Höhen verkehrt gesetzt verhalten, einander gleich; oder wenn bey zwey Parallelogrammen oder Dreyecken ABC , abc diese Proportion $BC : bc = ab : AB$ richtig ist, so ist auch richtig $ABC = abc$.

§. 57. Man kan ohne groffe Schwierigkeit einen dergleichen Satz auch von einem Dreyecke und rechtwinklichten Vierecke heraus bringen. Das rechtwinklichte Viereck ABC verhält sich zu dem Dreyecke abc , wie die Glieder der Verhältniß, welche aus diesen zwey Verhältnissen

F. 230.

F. 231.

F. 232.

IX. **Schnitt.** $AB: a b$ und $BC: \frac{1}{2} b c$ zusammen gesetzt wird, oder wie $BC \propto AB: \frac{1}{2} b c \propto a b$, IX, 53. Verhält sich nun aber BC zur $\frac{1}{2} b c$, wie $a b$ zur AB , und ist die Proportion $BC: \frac{1}{2} b c = a b: AB$ richtig, so ist $BC \propto AB = \frac{1}{2} b c \times a b$, VIII, 47.; und demnach ist in diesem Falle allezeit das Viereck $AB C$ dem Dreiecke $a b c$ gleich, und man kan also auf die Gleichheit eines Dreieckes und eines Parallelogrammum allezeit schließen, wenn entweder die Grundlinie eines Dreieckes halb genommen, sich zu der Grundlinie des Viereckes verhält, wie die ganze Höhe des Viereckes zur ganzen Höhe des Dreieckes. Oder wenn die halbe Höhe des Dreieckes sich zur Höhe des Viereckes verhält, wie die Grundlinie des Viereckes zur Grundlinie des Dreieckes.

§. 58. Es lassen sich auch alle diese Sätze umkehren, und man kan sagen erstlich, daß, wenn die Parallelogrammen $AB C$, $a b c$ gleich sind, die Grundlinien derselben BC , $b c$ sich umgekehrt, wie die Höhen AB , $a b$ verhalten, und die Proportion $BC: b c = a b: AB$ richtig seyn müsse. Denn es ist allezeit $ABC: a b c = AB \times BC: a b \times b c$, es mögen die Vierecke gleich oder ungleich seyn, IX, 45. Sind aber die Vierecke $AB C$, $a b c$ gleich, so können die zwey letzteren Glieder der Proportion $AB \times BC: a b \times b c$ nicht ungleich seyn: und es ist also $AB \times BC = a b \times b c$, das ist, die Glieder der Verhältniß, welche aus den zweyen $AB: a b$ und $BC: b c$ zusammen gesetzt ist, sind einander gleich. Wir haben aber gesehen, daß wenn dieses ist, die Verhältniß, welche man zusammen gesetzt hat, allezeit gleich seyn, wenn man nur die Glieder der einen verwechselt, VIII, 48., dadurch aber wird $AB: a b = b c: BC$, oder $BC: b c = a b: AB$. Und auf eben diese Art schließet man eben diese Proportion, wenn zweyfels gesetzt wird, daß das Dreieck ABC dem Dreiecke $a b c$ gleich sey. Ist aber drittens das Viereck $AB C$ dem Dreiecke $a b c$ gleich, so ist $AB \times BC = \frac{1}{2} a b \times b c$, woraus denn ebenfalls diejenige Proportion, aus welcher wir die Gleichheit vorher geschlossen, $AB: \frac{1}{2} a b = b c: BC$, nach eben den Gründen folget. Und es können also zwey Parallelogramme, oder zwey Dreiecke, oder ein Parallelogrammum und ein Dreieck, ohnmaßlich gleich seyn, wenn nicht diejenige Proportion statt hat, aus welcher wir ihre Gleichheit geschlossen haben.

§. 59. Der Satz, bey welchem wir uns aufhalten, ist auch durch den sich selbst gelassenen Verstand einzusehen. Daß die Verhältnisse zweyer Parallelogrammen aus der Verhältniß ihrer Grundlinien und, aus

aus der Verhältniß ihrer Höhen zusammen gesetzt sey, heisset in der gewöhnlichen Sprache nichts anders, als daß man bey der Vergleichung solcher Vierecke so wohl auf die Länge derselben, als auch auf ihre Breite zu sehen habe, und daß die Vierecke grösser werden, nachdem entweder ihre Länge, oder nachdem ihre Breite zunimmt. Wenn ist dieses unbekannt? nur setzet man gemeiniglich dergleichen Begriffe nicht recht aus einander. Ist aber ein solches Viereck ABC zwar breiter als ein anderes abc , und dieses ist hingegen nach Proportion länger als jenes, so siehet man leicht, daß dem einen an der Länge dasjenige zuwächst, was ihm an der Breite abgeht, und daß dadurch die Vierecke wieder gleich werden. Was von den Dreyecken gesagt worden ist, könnte man hieraus herleiten, wenn es nöthig wäre. Wir wenden uns aber vielmehr zu einigen leichten Aufgaben, welche hierbey vorkommen.

§. 60. Geſetzt, es sey uns das rechtwinklichte Viereck ABC gegeben, und die Grundlinie eines andern bc , welches zu verfertigen ist, und welches dem gegebenen ABC gleich seyn soll: so hat man zu bedenken, daß nunmehr weiter nichts als die Höhe dieses zweyten Parallelogrammum erfordert werde, dasselbe zu verfertigen, und daß demnach bloß diese zu suchen sey. Denn so bald als die Grundlinie und Höhe eines Parallelogrammum bekannt sind, so ist auch die Grösse desselben bekannt. Diese Höhe aber ist leicht zu finden. Man stelle sich vor, daß man bereits auf die gegebene Grundlinie bc das Parallelogrammum abc gesetzt habe, welches dem gegebenen ABC gleich ist, und daß die Höhe dieses Parallelogrammum a sey, so ist $bc:BC = AB:a$, IX, 58, und demnach ist a die vierte Proportional-Grösse zu bc , BC und AB , und diese drey Grössen sind bekannt: also ist auch a in unserer Gewalt; denn man kan aus den drey vordern Gliedern einer Proportion das vierte allezeit finden. Vollkommen auf eben die Art verfähret man, wenn das Dreyeck ABC gegeben ist, und bc , und man soll auf bc das Dreyeck abc setzen, so dem Dreyecke ABC gleich ist. Und man siehet auch leicht, wie zu verfahren sey, wenn man auf bc ein Dreyeck setzen soll, so dem Vierecke ABC gleich ist, oder auf BC ein Viereck, welches so groß ist als das Dreyeck abc .

Vergleichung eines Quadrats mit einem anderen geradewinklichten Vierecke.

§. 61. Ist das Viereck ABC , welches einem andern Vierecke, oder 233.

IX. oder einem Dreiecke abc gleich ist, ein Quadrat, so bleibet das übrige
 Abschnit. alles, so gewiesen worden, und es ist auch hier $bc:BC=AB:ab$,
 wenn das Quadrat dem Vierecke abc gleich ist, und $bc:BC=AB:$
 $\frac{1}{2}ab$, wenn das Quadrat so groß ist als das Dreieck abc . Es
 kommt aber hier noch etwas neues hinzu, so vorher nicht da gewesen.
 Die Seiten des Quadrats ABC sind einander gleich $AB=BC$, und
 man kan AB vor BC setzen. Demnach ist die Seite des Quadrats
 ABC , welches dem geradewinklichten Vierecke abc gleich ist, die
 mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten ab, bc dieses Vier-
 eckes, und die Seite des Quadrats, welches dem Dreiecke abc gleich
 ist, ist die mittlere Proportionallinie zwischen einer Seite derselben bc ,
 und der Helfte der andern ab .

S. 62. Und wenn AB die mittlere Proportionallinie ist, zwischen
 den Seiten des Viereckes abc , so ist das Quadrat ABC dem Vierecke
 abc gleich. Denn wenn dieses ist, und man hat $bc:BC=AB:ab$,
 so hat man auch $bc:BC=AB:ab$, das ist, die Grundlinien der bey-
 den geradewinklichten Vierecke ABC, abc verhalten sich wie ihre Hö-
 hen verkehrt gesetzt, welches das untrügliche Kennzeichen ist, aus
 welchem wir ihre Gleichheit schließen können. Ist in der 234 Figur
 $bc:BC=BC:\frac{1}{2}ab$, so kan man auf eben die Art schließen, daß das
 Dreieck abc dem Quadrate ABC gleich sey.

S. 63. Und da also VII, 73. 80. gelehret worden, wie zwischen
 F. 235. zwei gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden
 sey, so ist nunmehr bey der Aufgabe, welche erfordert, daß wir ein
 Quadrat machen sollen, so einem gegebenen rechtwinklichten Vierecke
 gleich sey, keine Schwierigkeit übrig. Die Auflösung derselben erfor-
 dert nichts, als daß man die mittlere Proportionallinie zwischen den
 zwei Seiten des Viereckes finde; welche die Seite des verlangten
 Quadrats seyn wird. Es sey das rechtwinklichte Viereck ABC gege-
 ben. Man verlängere eine Seite desselben AB in D , so lange bis BD
 der andern Seite BC gleich wird. Man beschreibe so dann auf die
 ganze AD einen halben Eirkelkreis AED , und verlängere CB bis an
 diesen Umkreis AED in E , so ist BE die gesuchte Seite des Qua-
 drats, welches dem Vierecke ABC gleich ist. Denn weil der Winkel
 des Viereckes ABC gerade ist, so ist BE auf den Durchmesser des
 halben Eirkels AD perpendicular, und folgendes $AB:BE=BE:BD$.
 VII, 73. Da nun BD der BC gleich genommen worden, so ist auch
 $AB:BE=BE:BC$. Und wenn demnach BE vor die Seite eines
 Qua-

Quadrates angenommen wird, so ist dieses Quadrat dem Vierecke IX. ABC gleich, weil die Seite des Quadrats die mittlere Proportionallinie ist zwischen den Seiten des Viereckes. *Abbildung.*

S. 64. Will man sich der andern Anweisung bedienen, welche wir gegeben zwischen zwei geraden Linien eine mittlere Proportionallinie zu finden, um die Seite eines Quadrates zu finden, welches dem geradenwinklichten Vierecke ABC gleich sey; so verfähret man folgender gestalt. Nachdem die Seite AB des Viereckes, nach Erforderung der Umstände verlängert worden ist, mache man AD so groß, als die andere Seite des Viereckes BC ist. Man beschreibe auf diese AD einen halben Cirkel AED, man verlängere CB bis sie denselben in E erreicht, so kan man AE ziehen, und dieses ist die gesuchte Seite, deren Quadrat so groß ist als das geradenwinklichte Viereck ABC. Denn allerdings ist AE die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AD; VII, 80. also ist sie auch die mittlere Proportionallinie zwischen eben der AB und der BC, welche der AD gleich ist.

F. 236.

S. 65. Diese Zusammenfügung ist weitläufiger als die vorige: sie ersetzt aber diesen kleinen Umschweif durch die herrlichen Sätze, welche deren Betrachtung an die Hand giebet. Das Quadrat der geraden Linie AE ist dem geradenwinklichten Vierecke ABC gleich. Zieht man auch ED, so ist kein Zweifel, daß eben dieses auch auf dieser Seite richtig sey, und daß das Quadrat der Seite ED ebenfalls dem geradenwinklichten Vierecke aus der DB, und der DA=BC, gleich seyn werde. Dieses Viereck erhält man, wenn man DG der BC parallel zieht, und FC verlängert, bis sie die DG in G schneidet. Dadurch wird DG=BC=DA, da nun also $AE^2 = AC \cdot AD$, und $ED^2 = CD \cdot AD$, so ist $AE^2 + ED^2 = AC + CD$, das ist, die beyden Quadrate, deren Seiten AE, ED sind, sind zusammen der Summe der Vierecke AC und CD gleich. Diese beyden Vierecke aber machen mit einander das Viereck AG, welches, wie leicht einzu sehen, ebenfalls ein Quadrat ist, die beyden Quadrate der Seiten AE und ED also, sind zusammen dem einzigen Quadrate AG der Seite AD gleich.

F. 237.

S. 66. Das Dreyeck AED ist geradelinicht, und zwar ist der Winkel AED der gerade, weil er in dem halben Cirkel AED beschrieben ist. V, 68. Man kan aber bey einem jeden geradenwinklichten Dreyecke dasjenige zeigen, wie wir hier erwiesen. Man kan allezeit aus der Spitze des rechten Winkels desselben AED auf die größte Seite

Gez.

IX. Seite ein Perpendicularlinie EB fallen lassen, und dieselbe verlängern
 schmie. bis BC so groß wird als AD. Zieheth man so dann durch C die FG
 der AD parallel, und AF, DG auf die AD perpendicular, so ist vermöge
 desjenigen, so eben gezeigt worden, das Quadrat der AE dem
 Vierecke AC, und das Quadrat der ED dem Vierecke BG
 gleich, und demnach sind in einem jeden geradewinklichten
 Dreiecke AED die beiden Quadrate der Seiten AE, ED, welche
 den rechten Winkel einschließen, zusammen genommen dem einzigen
 Quadrate der grösssten Seite des Dreieckes AD, welche allezeit dem
 rechten Winkel entgegen stehet, gleich. Denn daß die beyden Vierecke
 AC und CD ein Quadrat AG machen, ist bereits als etwas, so leicht
 einzusehen ist, angemerkt worden.

F. 238. S. 67. Wir werden künftig diesen Satz noch weiter betrachten,
 239. und ihn auf verschiedene Art anwenden. Gegenwärtig fahren wir in
 der Vergleichung derer Parallelogrammen und Dreiecke fort, und
 stellen uns nunmehr zwey dergleichen Vierecke, oder zwey Dreiecke
 vor, deren Grundlinien sich gegen einander, wie ihre Höhen verhal-
 ten. In der 238 Figur, sollen ABC, a b c zwey dergleichen Vierecke
 seyn, und in der 239 Figur werden mit eben den Buchstaben zwey
 Dreiecke bezeichnet. Beyderseits wird gesetzt, daß die Verhältniß der
 Höhen AB: a b der Verhältniß der Grundlinien BC: b c gleich sey,
 oder daß $AB:ab = BC:bc$. Es wird durch diesen neuen Umstand
 dasjenige nicht aufgehoben, so überall richtig ist, daß nemlich die Ver-
 hältniß ABC: abc aus den beyden Verhältnissen AB: ab und BC: b c
 zusammen gesetzt werde: aber hier sind diese Verhältnisse, welche zu-
 sammen gesetzt werden sollen, einander gleich, und es wird demnach
 die Verhältniß ABC: abc aus zwey gleichen Verhältnissen zusammen
 gesetzt. Man kan demnach in dieser Zusammensetzung einer der glei-
 chen Verhältnisse vor die andere setzen, und man kan sagen es sey die
 Verhältniß ABC: abc aus den Verhältnissen AB: ab und AB: ab zu-
 sammen gesetzt, oder auch, es bestehe die Verhältniß ABC: abc aus
 den zwey Verhältnissen BC: bc und BC: bc das ist, die Verhältniß der
 Figuren, welche wir vor uns haben, sey aus der Verhältniß ihrer
 Höhen AB: ab, oder aus der Verhältniß ihrer Grundlinien BC: b c
 zwey mal genommen, zusammen gesetzt. VIII, 9.

S. 68. Nur muß man sich in der Anwendung dieses Satzes in
 Acht nehmen, daß man sich darinnen nicht verstoffe, daß man unrech-
 te Linien der Figuren vor die Grundlinien oder vor die Höhen derselb-
 en annehme. Es ist zwar wahr, daß es sonst frey sey, diese oder je-
 ne

IX. Kan. Ihre Verhältniß ist ebenfalls der Verhältniß der Figuren gleich,
 Punkt. welche wir eben angezeigt haben.

S. 70. Damit auch dieses desto deutlicher eingesehen werde, so
 F. 240. haben wir wieder in der 240 Figur, zwei Figuren gezeichnet, deren
 Grundlinien sich wie ihre Höhen verhalten; welche Verhältniß durch
 die Zahlen 5 : 3 ausgedrückt werden kan. Man sieht leicht daß die
 Verhältniß dieser Figuren ABC und abc aus der Verhältniß 5 : 3
 zwey mal genommen, zusammen gesetzt werde. Denn diese Verhältniß
 ist 25 : 9. Man kan wenn man wil sich das übrige alles durch
 dergleichen Zeichnungen selbst erläutern; und damit kommt man wol

S. 72. Wiederum findet man aus der Verhältniß zweyer Quadrate, welche durch gerade Linien ausgedrückt ist, $AB : D$, die Verhältniß der Seiten der Quadrate, wenn man nur zwischen den zwey geraden Linien, welche die Verhältniß der Quadrate ausdrücken AB und D die mittlere Proportionalinie sucht. Ist diese ab , so ist $AB : ab$ die Verhältniß der Seiten der Quadrate, deren erstes sich zu dem zweyten verhält, wie $AB : D$, und wenn man zu AB und ab die Quadrate ABC , abc wirklich beschreibt, so ist $ABC : abc = AB : D$. Dieses ist aus den

S. 73. Wir proportional sind, das Quadrat der durch B^2 und so $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$, proportional sind, Verhältniß $A^2 : B^2$

Von der

die Verhältniß $C^2:E$
der ersten $A:B$ gleich
können die Verhältni
durch die Zusammen
hältnisse kommen.

S. 7

$A^2:B^2=$
wenn man
nennen u
dem Ca
se $A^2:B^2$
tion $A^2:$
tionen, d
demnach
die Stell
 $C:D$ u
nehmen

sind,
Denn
die E
nach
idra
por
por
fan
E an
B =
mge

S. 75. Man kan dieses gar leicht auf solche Figuren anwenden,
welche sich gegen einander verhalten wie die Quadrate ihrer Seiten,
vergleichen wir in der 238, 239 Zeichnung dargestellt; und man sieht
leicht, daß man auf eben die Art zwei gerade Linien darstellen könne,
welche sich verhalten wie $ABC:a b c$, wie man zwei gerade Linien dar
stellt, die sich gegen einander wie zwei gegebene Quadrate verhalten.
Ja es läßt sich dasjenige, was wir von den eben genannten Figuren
 $ABC, a b c$ gezeigt haben, auch von vielen andern Figuren sagen, und
überhaupt von allen, welche einander ähnlich sind, welches wir so
gleich aus den Betrachtungen sehen werden, die uns noch bevorstehen.

F. 238.
239.

**Vergleichung solcher Figuren, die einander ähn
lich sind.**

Dre
rigens F. 242.
243.
d man
ähnlich
auch
in den
x ha
der sa
gen

IX. **Wichn.** gen wir, die Verhältniß $ABC:abc$ sey aus der Verhältniß der Seiten, welche die gleiche Winkel B und b einschließen, zusammen gesetzt, aus diesen beiden nemlich $AB:ab$ und $BC:bc$. Und dieses wird aus demjenigen, so bereits gewiesen worden, folgender gestalt hergeleitet.

S. 77. Man stelle sich die Höhen der Figuren AD, ad vor, welche Linien auf BC, bc , perpendicular fallen, und bey D, d gerade Winkel machen. Dadurch werden die Dreyecke ABD, abd einander ähnlich. Denn aus der Gleichheit zweyer Winkel in zweyen Dreyecken folget allezeit, daß dieselben Dreyecke ähnlich sind VII, 23. Nun ist in den erwähnten Dreyecken ABD, abd der Winkel B dem Winkel b gleich, und D, d recht die Dreyecke, folgendes bey Höhen AB eine dieser Aßen. Nun dñgungen hñltniß der nñß ihrer . aber hier an nñß $AB:ab$ bringen, VII, 16. und dadurch wird die Verhältniß $ABC:abc$ aus den Verhältnissen $BC:bc$ und $AB:ab$ zusammen gesetzt.

it, außer dem aber ist $D = d$ auch die Seiten dieser liegen proportional, und ist die Verhältniß der Seiten $AD:ad$ gleich, und die Stelle der anderen seiden gegenwärtigen Verhältniß $BC:abc$ aus der Verhältniß, und aus der Verhältniß sey IX, 46. Man kanß, die ihr gleiche Verhältniß

S. 78. Es sind die gegenwärtige Bedingungen bey allen ähnlichen Dreyecken anzutreffen: Denn es wird nicht nöthig seyn, daß wir künftig hin von Vierecken ins besondere reden, weil wir uns vermittelst der Dreyecke zu ganz allgemeinen Sätzen erheben werden, welche von allen ähnlichen Figuren g
F. 244 der 244 Figur einander Winkel B dem Winkel b Dreyeckes ABC einem man diese gleiche Winkel, Buchstaben bezeichnen kan der Verhältniß $AB:ab$, gesetzt. Es sind aber au

einander gleich, sonst wären die Dreiecke einander nicht ähnlich. IX. Man kan demnach in der Zusammensetzung dieser Verhältnisse eine vor die andere setzen, und sagen, die Verhältniß des Dreieckes ABC zu dem Dreiecke abc sey aus den Verhältnissen AB: ab, und AC: ac, oder aus den Verhältnissen BC: bc und AC: ac zusammen gesetzt. Das ist: Die Verhältniß ABC: abc entstehe aus der Verhältniß der Seiten der Dreiecke, welche zwischen gleichen Winkeln liegen AB: ab zweymal genommen. Denn man siehet leicht, daß die Seiten AB, ac von den übrigen, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, keinen Vorzug haben.

§. 79. Also verhält sich auch das Dreieck ABC zu dem Dreiecke abc, wie das Quadrat auf AB zu dem Quadrate auf ab. Denn die Verhältniß dieser Quadrate entsteht ebenfalls, wenn man die Verhältniß

§. 80. sich sind, in
hen ihrer
aus kan m
Quadrate
Figuren zu
geradellinie

der gleich, welche mit einetley Buchstaben A und a, B und b, und so fort bezeichnet sind. Man ziehe BE und be, wie auch BD und bd, so sind die Dreiecke ABE, abe, wie auch BED, bed und BCD, bcd einander ähnlich. Es ist demnach die Verhältniß AB: a b gleich der Verhältniß BE: b e, und diese Verhältniß ist wieder gleich der Verhältniß BD: b d, welche endlich der Verhältniß BC: b c gleich ist. Demnach sind auch die Verhältnisse der Quadrate dieser Linien einander alle gleich IX, 73. nemlich $BA^2:ba^2 = BE^2:be^2 = BD^2:bd^2 = BC^2:bc^2$

Nun aber ist IX, 79.

und

wie auch

$$ABE:abe = BE^2:be^2$$

$$BED:bcd = BD^2:bd^2$$

$$BDC:bdc = BC^2:bc^2$$

und es sind demnach die Verhältnisse der Dreiecke alle gleichen Verhältnissen gleich, weil die Verhältnisse der Quadrate, mit welchen wir jene vergleichen, alle gleich sind. Demnach ist auch VI, 102. die Verhältniß der Summe ABE + BED + BDC zu der Summe abe + bed + bdc; das ist, die Verhältniß der Figur ABCDE zu der Figur abcde eben dieser Verhältniß $BE^2:be^2$, oder $BC^2:bc^2$ gleich,

Prop 3

und

F. 245.

Halte sich an
A B, zu dem
halten wie d
messer wie l
Cirkel um A
sich zu dem

F. 248.

F. 249.

Nach sey. Dieses ist an seinem Orte VII, 50. gezeigt worden, und darf IX. hier nicht wiederholet werden. Diese Seite aber, welche man allein wünscht, brauchet, wird nachfolgender gestalt gefunden:

S. 87. Man nehme in der Figur DEF eine Seite EF oder eine Quersseite nach Belieben, und aus der Figur ABC nehme man diejenige Seite, welche in derselben eben so lieget wie EF in DEF. Diese ist die Seite AB. Man setze AB und EF dergestalt an einander, daß sie einen geraden Winkel geben, welches wir hier gethan, indem wir die FG auf die EF perpendicular gesetzt, und der AB gleich gemacht haben. Ist dieses geschehen, so ziehe man EG, diese ist die gesuchte Seite, und wenn man auf EG die Figur EGH setzt, welche der Figur ABC oder DEF ähnlich ist, und in welcher EG eben so lieget, wie AB in ABC, oder EF in DEF, so ist EGH so groß als ABC und DEF zusammen.

S. 88. Dieses wird nachfolgender massen erwiesen. Es ist aus einem der Sätze, welche wir ohnlängst IX, 65. erwiesen, bekannt, daß das Quadrat der Seite EG so groß sey als die beiden Quadrate der Seiten EF und FG zusammen; weil das Dreieck EFG bey F einen rechten Winkel hat. Es ist aber auch daraus, daß die drey Figuren ABC, DEF und EGH ähnlich sind, zu schließen, daß sie sich gegen einander verhalten wie die Quadrate der Seiten AB, EF und EG, IX, 80. Demnach ist $AB^2 : EF^2 = ABC : DEF$, und folgendes wenn man die ersten Glieder der Verhältnisse zusammen nimmt VI, 80. $AB^2 : AB^2 + EF^2 = ABC : ABC + DEF$, oder weil $AB = FG$, so ist $AB^2 : FG^2 + EF^2 = ABC : ABC + DEF$. Da nun aber, wie wir bereits erinnert haben, $FG^2 + EF^2 = EG^2$ so kan man an statt $FG^2 + EF^2$ in der eben gegebenen Proportion EG^2 schreiben; ohne dieselbe aufzuheben, und es ist also $AB^2 : EG^2 = ABC : ABC + DEF$. Weil aber auch die Figur ABC der Figur EGH ähnlich ist, so hat man auch $AB^2 : EG^2 = ABC : EGH$, und wenn man diese Proportion mit der letzteren vergleicht, so findet man, daß die drey ersten Glieder derselben einerley sind. Demnach können die vierten Glieder derselben nicht von verschiedener Größe seyn, sondern es ist $ABC + DEF = EGH$, und man hat demnach die der ABC ähnliche Figur EGH so groß gemacht, als $ABC + DEF$ zusammen, wie aufgegeben war.

S. 89. Es wäre überflüssig, wenn wir nunmehr zeigen wolten, wie

IX. wie diese allgemeine Auflösung auf die besondern Arten der Figuren anzuwenden sey, weil dieses gar etwas leichtes ist. Man siehet zum Exempel so gleich, daß, wenn man einen Cirkel machen wil, welcher so groß ist als zween gegebene Cirkel, deren Durchmesser AB und EF sind; man ebenfals diese Linien, wie in der Figur bereits geschehen, dergestalt zusammen zu setzen habe, daß der Winkel EFG gerade werde. Die größste Seite des Dreieckes EG , welche man nunmehr leicht ziehen kan, ist der Durchmesser des Cirkels, welcher den zween gegebenen Cirkeln, deren Durchmesser AB und EF sind, gleich ist, und eben so verfähret man in allen dergleichen Fällen. Man kan aber auch an die Stelle der Durchmesser der Cirkel ihre Halbmesser nehmen, wie leicht zu sehen ist.

§. 90. Durch die Wiederholung dieser Arbeit machet man eine Figur, welche so vielen Figuren gleich ist, als gegeben seyn mögen, falls diese gegebene Figuren einander alle ähnlich sind. Es seyen zum Exempel die vier Cirkel A, B, C, D gegeben, und es sey ein Cirkel zu machen, welcher so groß ist als $A + B + C + D$. Wir haben nicht nöthig erachtet, dieselbe zu zeichnen, weil die Sache auch ohnedem verständlich gemachet werden kan. Denn wir haben dabey nichts zu sagen, als daß man erstlich, wie eben gewiesen worden, einen Cirkel E machen müsse, welcher so groß sey als $A + B$. Sodann aber müsse man einen Cirkel machen, welcher so groß sey als $E + C$, welchen wir F nennen wollen, und endlich den dritten G , der so groß sey als $F + D$, welches alles geschieht, indem man immer bloß zween Cirkel in ein bringen. Weil nun $G = F + D$, und $F = E + C$, so ist auch $G = E + C + D$, und weil wieder $E = A + B$, so ist eben der Cirkel $G = A + B + C + D$, welches zu machen war.

§. 91. Die Figur ABC ist der Unterschied der zweo ähnlichen Figuren DEF und EGH . Denn wenn man sie zu den kleineren dieser Figuren DEF setzt, so wird die Summe $ABC + DEF$ der größeren Figur EGH gleich, und dieses ist allezeit ein Kennzeichen des richtigen Unterschiedes. Wenn demnach die zweo ähnlichen Figuren EGH und DEF gegeben sind, und man sol die Figur ABC finden, welche einer jeden der gegebenen ebenfals ähnlich, und ihren Unterschiede gleich sey; so wird man dieses durch eben die Figur erhalten können, welche wir vor uns haben, nur muß die Zeichnung derselben anders angefangen werden. Denn man kan hier das rechtwinklichte Dreieck EFH nicht von den Seiten EF und FG zu beschreiben anfangen, weil zwar

EF, nicht aber $FG = AB$ gegeben ist, sondern diese letztere Seite gesucht wird. Man muß vielmehr dieses Dreieck aus seiner größesten Seite EG und aus der Seite EF verfertigen. Dieses aber geschieht nachfolgender maßen. Man beschreibe auf EG einen halben Cirkel EFG, und lege in denselben aus E die Sehne EF, welche der Seite der gegebenen Figur DEF, die wir vor dem IX, 87. genau beschrieben, gleich ist: so kan man FG ziehen, und diese FG ist die Seite der Figur ABC, welche den beyden Figuren EGH und DEF ähnlich, und ihrem Unterschiede gleich ist.

IX.
Abschnitt.
F. 251.

S. 92. Wenn ein Cirkel von einem anderen abzuziehen, und ein Cirkel zu finden ist, welcher dem Unterschiede der ersteren gleich sey, so geschieht dieses durch eine Zeichnung, welche uns artig vorkommet. Man beschreibet die zween Cirkel, deren einer von dem andern abzuziehen ist, um einen Mittelpunct A, ziehet so dann eine Linie BC, welche den kleineren Cirkel in B berührt, bis an den Umkreis des größeren in C, so ist diese BC der Halbmesser des Cirkels, welcher dem Unterschiede der beyden gezeichneten Cirkel, und folgendes dem Ringe, welcher übrig bleiben würde, wenn man den kleineren aus dem größeren heraus schnitte, gleich ist. Denn wenn man den Halbmesser AB an den Berührungspunct B ziehet, so ist der Winkel ABC gerade, V. 47. und ziehet man auch den Halbmesser des grossen Cirkels AC, so hat das Dreieck ABC bey B einen geraden Winkel. Es ist demnach der Cirkel des Halbmessers AB, zusamt dem Cirkel des Halbmessers BC, dem Cirkel des Halbmessers AC gleich. Demnach ist der Cirkel, welcher mit dem Halbmesser BC beschrieben wird, der Unterschied der beyden Cirkel, deren Halbmesser sind AB und AC, welches eben die beyden Cirkel sind, welche wir um den Mittelpunct A verzeichnet haben.

F. 252.

S. 93. Sind aber zweo Figuren F und G gegeben, und man sol eine dritte Figur H machen, welche der ersten der gegebenen Figuren F ähnlich, und der zweoten G gleich sey, so muß man sich auf die Aufgabe gründen, vermittelst welcher zwischen zweo gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie zu finden ist. Es ist nemlich nichts zu suchen als eine Seite der Figur H, welche zu beschreiben ist, welche in dieser Figur zwischen zween Winkeln liege, die zween Winkeln der Figur F gleich seyen. Man nehme die Winkel a und b dieser Figur, zwischen welche die Seite ab lieget, und verwandele erstlich die Figur F in ein Dreieck, wie IX, 22. gewiesen worden

F. 253.

IX. ist, und dieses Dreieck verwandele man wieder in ein geradewinkliches Viereck, in welchem eine Seite so groß sey als ab . Auch dieses ist gewiesen worden, IX, 60. man kan es aber auch gleich erhalten, indem man F in ein Dreieck verwandelt. Denn man kan diese Arbeit so einrichten, daß die Seite ab unverändert bleibet. Wir setzen das Viereck ABC sey der Figur F gleich und $AB = ab$, so verwandele man nunmehr auch G in ein geradewinkliches Viereck CD , welches mit dem vorigen einerley Höhe BC habe: so ist $ABC : CBD = F : G$, weil die ersteren Figuren den letzteren gleich sind. Weil aber die Vierecke ABC , CBD gleiche Höhen haben, so ist $ABC : CBD = AB : BD$, IX, 40. und folgendes auch $F : G = AB : BD$, weil diese beyden Verhältnisse einer dritten $ACB : CBD$ gleich sind.

§. 94. Nunmehr suche man zwischen AB und BD die mittlere Proportionallinie BE . Diese ist die gesuchte Seite, welche in der Figur H eben so liegen muß, wie ab in F lieget. Denn wenn man auf diese BE die Figur H dergestalt beschreibt, wie F an ab beschrieben ist; so ist $F : H = AB^2 : BE^2$, IX, 80. weil $AB = ab$, und weil $AB : BE = BE : BD$, so ist auch $AB^2 : BE^2 = AB : BD$. VIII, 52. Denn die Verhältniß $AB : BD$ ist so wohl aus der Verhältniß $AB : BE$ zweymal genommen zusammen gesetzt, als die Verhältniß $AB^2 : BE^2$. Wenn man also an statt $AB^2 : BE^2$ die Verhältniß $AB : BD$ setzt, so wird $F : H = AB : BD$, oder $AB : BD = F : H$. Nun ist auch, wie wir gesehen, $AB : BD = F : G$, und die drey erstern Glieder dieser Proportionen sind einerley. Demnach ist auch $G = H$, und die Figur H , welche man der Figur F ähnlich gemacht, ist auch der G gleich, wie erfordert wurde.

Einige besondere Sätze und Aufgaben von den geradewinklichten Vierecken.

§. 95. Und diese sind die Sätze, welche aus den vorhergehenden zu schließen waren. Die nachstehende kan man auch ohne denselben einsehen, welche nicht nur sonst unentbehrlich sind, sondern uns auch so gleich zum Grund einiger Auflösung dienen werden, welche von gar großem Nutzen sind. Man pfleget nemlich in der Anwendung sich der Flächen oder ebenen Figuren eben so zu bedienen, wie man sich der geraden Linien bedienet, bekante Größen von welcher Art man wil, vorzustellen, aus denselben andere dergleichen Größen zu schließen, die man sich ebenfalls unter dem Bilde solcher flachen Figuren vor-

vorstellt, und dadurch die Aufgaben und Fragen, welche vorgelegt werden, aufzulösen. Damit dieses süglicher geschehen könne, pflegt man diese Figuren, so oft es sich thun läßt, in geradewinklichte Vierecke oder Dreiecke zu verwandeln, und diese hernach zusammen zu setzen, von einander abzunehmen, oder die Verhältnisse derselben zu betrachten.

§. 96. Damit aber dieses desto leichter geschehen könne, so bezeichnet man die geradewinklichte Vierecke auch öfters so, wie man die Producte in der Rechenkunst bezeichnet, und verknüpft die Seiten derselben vermittelst des Zeichens \times . Es bedeutet also $AB \times CD$ in der Geometrie ein geradelinichtes Viereck, dessen Seiten sind AB und CD , oder kan es wenigstens bedeuten. Diese Zeichnung hat man deswegen beliebt, weil, wenn zwey dergleichen Vierecke gegeben sind, und die Seiten des ersten sind AB und CD , die Seiten des zweyten aber a und c , die Verhältniß der Vierecke, welche aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammen gesetzt wird, nachfolgender massen ausgedrückt wird $AB \times CD : a \times c$. Man entfernt sich also von dem was einmal VIII. 42. angenommen worden ist, nicht weit, wenn man das geradewinklichte Viereck, dessen Seiten sind AB und BC , auch vor sich mit $AB \times BC$ bezeichnet.

§. 97. Die Summe zweyer oder mehrerer solcher Vierecke, welche eine Höhe haben $AB \times BC + AB \times CD$ ist dem einzigen geradelinichten Viereck ABD gleich, dessen Höhe die vorige AB ist, die Grundlinie BD aber $= BC + CD$, und man kan also allezeit sehen $AB \times BC + AB \times CD = AB \times BC + CD$, wobei der Strich über den Buchstaben, welche die Grundlinien bedeuten, anzeigt, daß man dieselbe zusammen zur Grundlinie annehmen müsse. Die Sache ist bloß aus der Figur klar. Denn man siehet, daß man alle geradewinklichte Vierecke von gleichen Höhen so an einander schieben kan, wie in der Figur geschehen. Und eben so leicht siehet man, daß der Unterschied der geradewinklichten Vierecke von gleicher Höhe $AB \times BD - AB \times CD$ dem geradewinklichten Viereck $AB \times BD - CD$ oder $AB \times BC$, gleich sey. Die Figur weiset es deutlicher als viele Worte.

§. 98. Wenn man aber die zwey Seiten eines Quadrats AB , AC in D und E auf einerley Art theilet, so nemlich, daß $AD = AE$ und folgend $DB = EC$, und ziehet durch diese Theilungspuncte die Linien DF , EG mit den Seiten parallel, so wird das Quadrat in vier Theile getheilet, welche sind: 1. ED , das Quadrat des ersten

F. 254.

F. 255.

IX. Theils der Seite AD. 2.^o) EF, ein geradenwinklichtes Viereck, dessen Seiten die Theile der Seite des ganzen Quadrats AB sind. Nämlich CF ist = AD, und CE = DB. 3.^o) Noch ein dergleichen geradenwinklichtes Viereck DG. Denn BG ist = AE = AD, und 4.^o) das Quadrat FG, dessen Seite dem zweyten Theil der AB, nämlich der DB gleich ist. Und wenn demnach die Seite eines Quadrats AB aus den zwey Theilen AD, DB bestehet, so bestehet das Quadrat derselben EB aus nachfolgenden vier Theilen $AD^2 + 2AD \times DB + DB^2$. Die Sache ist desto leichter einzusehen und zu behalten, weil wir dergleichen von den Quadratzahlen gleich Anfangs III, 8. erwiesen.

F. 256.

§. 99. Ist aber von AD das Quadrat DE gemacht, und man will von AD den Theil BD von beliebiger Größe wegnehmen, und das Quadrat des Ueberbleibfels $AD - BD$, oder AB, aus dem vorigen Quadrat DE, machen: so kan man nachfolgendergestalt verfahren. Man mache $AC = AB$, wodurch auch EC der DB gleich wird, ziehe so dann BF und CG mit den Seiten des Quadrats DE parallel, verlängere aber auch CG bis $CH = EC$, und mache das Quadrat EH, welches dem Quadrat FG gleich seyn wird, dessen Seite der BD gleich ist. Es ist aber auch das rechtwinklichte Viereck HF dem rechtwinklichten Viereck FD gleich, und es bleibt also das gesuchte Quadrat CB dessen Seite AB ist, übrig, wenn man von der Summe der Quadrate $ED + EH$ die zwey Vierecke $HF + FD$, abziehet. Oder wenn man dieses auf die vorher gebrauchte Art ausdrucken wil, so muß man sagen das Quadrat AB oder $AD - BD$ bestehe aus den Theilen $AD^2 + DB^2 - 2AD \times DB$, weil nämlich $HF + FD$ so viel ist als $2AD \times BD$, wie aus der Figur erhellet. Wil man die vorige Ordnung behalten, so schreibe man $AD - BD^2 = AD^2 - 2AD \times BD + DB^2$.

§. 100. Man siehet auch hieraus, daß der Unterschied zweyer Quadraten, wie man sie auch annehmen wil CB und ED; der Summe der zwey rechtwinklichten Vierecke $CG + GD$ gleich sey. Die Höhen dieser zwey Vierecke sind gleich, weil $EC = DB$, und zwar ist diese Höhe DB der Unterschied der zwey Seiten der Quadrate, deren eine ED von der andern CB abgezogen worden. Denn DB ist augenscheinlich = $AB - AD$. Die Grundlinie EG aber des Vierecks CG ist der Seite des größern Quadrats AB gleich, und die Grundlinie GB des Vierecks GD ist die Seite des kleinern Quadrats EA oder AD. Und demnach kan man die Summe dieser beyden Vierecke

CG +

F. 255.

$CG + GD$ also ausdrücken $DB \times AB + DB \times AD$, oder IX, 97. $DB \times AB + AD$; woraus erhellet, daß der Unterschied zweyer Quadrate, deren Seiten sind AB und AD , einem geradelinichten Viereck gleich sey, dessen Höhe ist DB , der Unterschied der Seiten der Quadrate $AB - AD$, und die Grundlinie $AB + AD$ die Summe dieser Seiten, oder kurz, daß $AB^2 - AD^2 = AB - AD \times AB + AD$.

IX.
Abchnitt.

§. 101. Vermittelst dieser Sätze können wir nunmehr einen dergleichen Satz, als vor die rechtwinklichte Dreyecke oben IX, 65. heraus gebracht worden ist, vor alle übrige Dreyecke finden. Es sey das Dreyeck ABC bey B rechtwinklicht, so haben wir gesehen, daß die Quadrate der Seiten AB und BC zusammen, dem Quadrate der Seite AC gleich seyen, welche dem Winkel B entgegen steht. Wie ist es aber, wenn der Winkel B spitzig ist; und auf was Art kan man das Quadrat der AC aus den Quadraten der Seiten AB , BC machen, wenn der Winkel B stumpf ist? Man siehet leicht, daß wenn B spitzig ist, das Quadrat von AC kleiner seyn werde als die beyden Quadrate von AB und BC zusammen. Denn AB , BC sind in Ansehung der AC nunmehr größer als da der Winkel B gerade war. Ist aber der Winkel B gerade, so ist $AB^2 + BC^2$ genau so groß als AC^2 , also muß, wenn der Winkel B spitzig ist, $AB^2 + BC^2$ größer seyn als AC^2 . Eben so siehet man, daß wenn der Winkel B stumpf ist, die Summe der Quadrate $AB^2 + BC^2$ kleiner seyn müsse als das Quadrat von AC , weil AB und BC in Ansehung der AC nunmehr kleiner sind, als da der Winkel B gerade war. Die Frage ist, was man in dem zweyten Fall der Summe $AB^2 + BC^2$ zusetzen müsse, und was in dem ersten Fall von dieser Summe abzuziehen sey, damit sie dem Quadrat aus AC gleich werde.

F. 257.

§. 102. Dieses einzusehen, siehe man die Perpendicularlinie AD auf BC , welche BC , wenn der Winkel B stumpf ist, erst muß verlängert werden: so werden die beyden Dreyecke ABD , ACD rechtwinklicht; und weil $AB^2 = BD^2 + AD^2$, IX, 65. so ist $AD^2 = AB^2 - BD^2$. Auf der andern Seite aber hat man $AC^2 = AD^2 + DC^2$, oder weil, wenn der Winkel B spitzig ist, $DC = BC - BD$, und also $DC^2 = BC^2 - 2BC \times BD + BD^2$, IX, 99. so wird, wenn man dieses an die Stelle des DC^2 setzt $AC^2 = AD^2 + BC^2 - 2BC \times BD + BD^2$, und wenn man auch vor AD^2 setzt $AB^2 - BD^2$, weil der Unterschied dieser beyden Quadrate jenem gleich ist, so wird $AC^2 = AB^2 - BD^2$.

F. 258.
259.

F. 258.

IX. $-BD^2 + BC^2 - 2BC \times BD + BD^2$, das ist $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$. Denn das übrige hebt sich zusammen auf, und der Zusatz des BD^2 wird durch den Abgang desselben vernichtet. Demnach ist die Summe der Quadrate der Seiten, welche den spitzen Winkel B einschließen $AB^2 + BD^2$, um das rechtwinklichte Viereck $2BC \times BD$ grösser als das Quadrat der Seite AC , welche demselben Winkel B entgegen steht, und dieses Viereck aus $2BC$ und BD muß von der Summe der gedachten Quadrate abgezogen werden, damit sie dem Quadrat AC^2 gleich werde.

R. 259.

S. 103. Ist aber der Winkel B stumpf, so bleibt das übrige, nemlich $AD^2 = AB^2 - BD^2$, und $AC^2 = AD^2 + DC^2$, allein DC ist hier $= BC + BD$, und folgendes $DC^2 = BC^2 + 2BC \times DB + DB^2$, und wenn man das letztere wieder an die Stelle des ersten setzt, und von AD^2 schreibt $AB^2 - BD^2$, so wird $AC^2 = AB^2 - BD^2 + BC^2 + 2BC \times DB + DB^2$; oder wenn man dasjenige, so sich selbst vernichtet, $DB^2 - DB^2$ wegläßt, so wird $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$, und die Summe der Vierecke $AB^2 + BC^2$ ist also hier um das geradenwinklichte Viereck $2BC \times DB$ kleiner als das Quadrat von AC : weil man dieses Viereck zu der gedachten Summe hinzu setzen muß, damit sie dem AC^2 gleich werde.

F. 260.

S. 104. Nun haben wir noch eine Aufgabe übrig, vermittelst welcher eine Menge anderer Aufgaben aufgelöst werden können, und welche also einen gar grossen Nutzen hat, ob zwar hier der Ort nicht ist, denselben zu zeigen. Sie besteht in nachfolgendem: Es ist eine Figur gegeben, von was Art sie seyn mag S und eine gerade Linie AB . Man sol ein gleichwinklichtes Viereck machen, welches der Figur S gleichsey, und dessen zwei Seiten zusammen genommen die AB geben; oder dessen kleinere Seite von der grössern abgezogen, die AB überlasse. Gesezt nemlich, es wäre das Viereck ADE der Figur S gleich, und DE so groß als DB , so wäre $AD + DE = AD + DB = AB$, und das Viereck AE wäre dasjenige, dessen Inhalt der Figur S , und dessen zwei Seiten zusammen gesetzt der gegebenen Linie AB , gleich sind. Gesezt wiederum das Viereck AG wäre der Figur S gleich, und $BF = FG$, so wäre nunmehr $AF - BF = AF - FG$, das ist $AB = AF - FG$, und dieses Viereck AG sol man verfertigen, wenn befohlen wird ein Viereck zu machen, welches der Figur S gleich ist, und dessen Seiten um die gegebene Linie AB von einander verschieden sind.

S. 105. Wir haben die Aufgabe auf die Art ausgedruckt, welche

he uns am leichtesten geschehen. Man findet aber nach einer kleinen Betrachtung, daß wenn man das Viereck AE machen wil, man die gegebene Linie AB in dem Punct D so theilen müsse, daß das gerade- linichte Viereck, dessen Seiten die Theile AD und DE = DB sind, der gegebenen Figur S gleich werde: und daß wenn das Viereck AG ver- fertigt werden sol, man an die gegebene AB eine Linie BF von der Größe ansetzen müsse, daß das rechtwinklichte Viereck aus der gan- zen AF, oder AB + BF, und aus FG = BF, wieder der gegebenen Figur S gleich werde. Man könnte eben diese Aufgabe noch anders ausdrücken. Doch wir lassen es hierbey bewenden: was wir gesagt, kan genug seyn den Leser zu erinnern, daß er Aufgaben, welche mit verschiedenen Worten vorgetragen werden, nicht gleich vor verschie- dene halte.

IX.
Abchnitt.

§. 106. Um aber diese Aufgabe aufzulösen, kan man auf ver- verschiedene Art verfahren. Nothwendig muß man erstlich die gege- bene Figur S in ein gleichwinklitchtes Viereck, oder in ein Quadrat verwandeln. Wie dieses geschehe, ist gewiesen worden. Wir haben gezeigt, wie eine jede Figur in ein Dreyeck, und wie jedes Dreyeck in ein rechtwinklitchtes Viereck, und wie jedes Viereck in ein Quadrat zu verwandeln sey. Auch haben wir IX, 60. gezeigt, wie ein gegeb- nes Dreyeck oder rechtwinklitchtes Viereck in ein anderes rechtwink- litchtes Viereck zu verwandeln ist, welches eine Seite von gegebener Länge habe. Wir bedienen uns des letztern, und wenn wir diese Auf- gabe auflösen sollen, so machen wir erstlich ein geradewinklitchtes Viereck, welches der gegebenen Figur S gleich ist, und dessen Seite die Länge AB hat. Das Viereck ABC der 261 Figur hat diese Ei- schaften. Es ist so groß als S, und AB ist so groß als die gegebene AB der 260 Figur: oder wir setzen wenigstens, daß dieses so sey, und eben dieses nehmen wir auch bey dem Viereck ABC in der 262 Figur an, und wir werden also künftig hin allezeit das Viereck ABC an statt der Figur S nennen.

F. 261.
262.

§. 107. Wenn nun erstlich ein geradewinklitchtes Viereck zu machen ist, dessen Inhalt so groß ist als ABC, und dessen zwei Sei- ten zusammen gesetzt, die Linie AB ausmachen: so theilen wir AB in H in zwey gleiche Theile, und ziehen HK der BC parallel, welche HK dadurch der BC gleich wird, wir nehmen so dann den Ueberschuß der HB über die HK, und legen denselben aus K an AB auf diese oder jene Seite. Dieser Ueberschuß in seiner gehörigen Lage ist KD. Das

F. 261.

Art

Punct

IX. Punct D nun, welches dergestalt gefunden wird, theilet die Linie AB ~~abspaltet~~ wie verlangt worden. Das Viereck nemlich ADE, dessen Seite DE der DB gleich genommen worden, und dessen Seiten zusammen $AD + DE$ die $AD + DB$ oder AB geben, ist auch dem Viereck ABC gleich, wie die Aufgabe erfordert.

§. 108. Der Beweis hievon gründet sich darauf, daß das Dreieck KHD bey H einen rechten Winkel hat, und folgendes das Quadrat der größten Seite derselben KD den Quadraten der übrigen Seiten KH und HD gleich ist. IX, 65. Denn es ist diese Seite $KD = HB - BC$, und folgendes IX, 99. $KD^2 = HB^2 - 2HB \times BC + BC^2$. Demnach ist $KH^2 + HD^2 = KD^2 = HB^2 - 2HB \times BC + BC^2$. Nun ist $KH^2 = BC^2$, weil $KH = BC$. Man ziehe diese gleiche Quadrate beyderseits ab, so wird $HD^2 = HB^2 - 2HB \times BC$. Ferner ist $2HB \times BC = AB \times BC$, weil die Seite des vorigen $2HB$ der AB gleich ist. Man setze dieses Viereck zu dem vorigen $HD^2 = HB^2 - 2HB \times BC$ beyderseits hinzu, so wird der Abgang des $2HB \times BC$ auf der einen Seite ersetzt, und man bekommt $HD^2 + AB \times BC = HB^2$, und wenn man hier wieder zu beyden Seiten HD^2 abziehet, so wird $AB \times BC = HB^2 - HD^2$. Dieser Unterschied zweyer Quadrate nun ist wie allezeit dem rechtwinklichten Viereck gleich, dessen eine Seite die Summe der Seiten der Quadrate $HB + HD$, und die andere, deren Unterschied $HB - HD$ ist. IX, 100. Es ist aber $HB + HD = AH + HD = AD$, und $HB - HD$ ist $= DB$, welcher die DE gleich gemacht worden. Demnach ist $HB^2 - HD^2 = AD \times DE$, und folgendes auch $AB \times BC = AD \times DE$, welches zu erweisen war.

F. 262

§. 109. Set man aber an die AB eine Linie BD anstücken, welche so groß sey, daß wenn man aus AD und $BD = DE$ das Viereck ADE machet, dieses wiederum dem gegebenen Viereck ABC gleich sey, so verfahre man im übrigen wie vorher, nur nehme man hier KD so groß, als die Summe der beyden Seiten, deren Unterschied man vorher nehmen müssen. Das ist, man theile wieder die gegebene AB mit H in zwey gleiche Theile, und ziehe HK mit der BC parallel, welche folgendes auch dieser BC gleich seyn wird: so dann nehme man $KD = HB + BC$, und lege sie wie die Figur weiset, aus K an A, so reicht sie bis in das Punct D, welches man suchte. Und wenn man dadurch BD gefunden, so ist das rechtwinklichte Viereck ADE, in welchem $DE = BD$ dasjenige so gesucht wird.

§. 110. Den Beweis dieser Auflösung: ist mit dem Beweis der voris-

vorigen fast einerley, und wir werden uns also dabey nicht lang aufhalten dürfen. Es ist $KD = KH + HD$, und weil $KD = HB + BC$, so ist auch $KD = HB + 2HB \times BC + BC$, IX, 98. folgendes $KH + HD = HB + 2HB \times BC + BC$. Wir haben bereits erinnert, daß hier wieder $KH = BC$, also ist auch $KH = BC$. Man ziehe diese gleiche Quadrate beyderseits ab, so wird $HD = HB + 2HB \times BC$, und wenn man hier wieder zu beyden Seiten HB wegnimmt, so bekommt man $HD - HB = 2HB \times BC = AB \times BC$. Denn es ist $AB = 2HB$, und kan also jenes vor dieses gesetzt werden. Der Unterschied der Quadrate $HD = HB$ ist hier wieder dem rechtwinklichten Viereck aus $HD + HB = HD + AH$, das ist AD , und aus $HD - HB = BD = DE$ gleich. Und wenn man dieses Viereck $AD \times DE$ an die Stelle des gedachten Unterschiedes der Quadrate setzt, und also macht $AD \times DE = AB \times BC$, so siehet man die Gleichheit der Vierecke, welche solte erwiesen werden.

§. 111. Man hat b
Tung, welche sie zuwei
 $HB + KH$ ist allezeit,
weil jwo Seiten eines
dritte, und man kan a
te AB legen, und das

: geringste Einschränk
denn $HB + BC$ oder
des Punkts K von B ,
it größer sind als die
it aus K an die Sei
r B hinaus.

§. 112. In der 261 Figur aber, da KD dem Unterschied der HB und HK gleich zu machen war, kan es kommen, daß, wenn man KD an AB legen soll, das Punct D genau in H falle. Dieses geschieht, wenn HB zweymal so groß ist als BC , wie in der 263 Figur. Denn wenn man in diesem Falle $KD = HB - BC$ suchet, so wird dieselbe $KD = 2BC - BC = BC = KH$. Und es ist also in diesem Falle, wenn HB zweymal so groß ist als HK oder BC , und folgendes AB viermal so groß als BC , selbst das Punct H der gesuchte Theilungspunct D . Und das geradewinklichte Viereck AHE aus AH und $HB = AH$, oder mit einem Wort, das Quadrat AHE ist das gesuchte Viereck, welches dem ABC gleich ist. Wäre aber der Unterschied der Seiten HB und HK kleiner als HK , so würde KD nicht einmal die Linie AB erreichen, und folgendes die Auflösung dieser Aufgabe ganz und gar ohnmöglich fallen.

§. 113. Ist nun aber das gegebene Viereck ABC ein Quadrat, und man leget an die Seite desselben AB die Linie BD dergestalt, daß
F. 264.
das

IX. das Viereck ADE , in welchem $BD = DE$, dem Quadrat ABC gleich ist: so wird die Seite $BC = AB$ von der EF in G dergestalt geschnitten, daß sich die ganze BC zu dem größten Theil derselben BG so verhält, wie dieser grössere Theil BG zu dem kleinern GC , welches die Alten haben wolten, wenn sie aufgaben: *Rectam AB media & extrema ratione secare.* Wir begnügen uns mit der Sache, ohne die Redens-Art zu übersehen, und beweisen nachfolgendergestalt, daß unsere Anweisung zu diesem Schnitt richtig sey.

§. 114. Es ist das Viereck ADE dem Quadrat ABC gleich gemacht worden, und wenn man demnach beiderseits das gemeinschaftliche Viereck ABG abziehet, so bleibt $BDE = FGC$. Nun ist BDE ein Quadrat, weil man DE der BD gleich gemacht, und man kan vor BDE schreiben BG^2 . Weil aber auch $FG = BC$, so ist $FGC = BC \times GC$, und demnach $BG^2 = BC \times GC$, das ist, das Quadrat der Linie BG ist dem geradenwinklichten Vierecke, dessen Seiten sind $BC \times GC$ gleich. Folgendes ist die Seite des Quadrats die mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten des Viereckes, IX, 61, und also $BC : BG = BG : GC$, wie zu erweisen war.

§. 115. Man kan merken, daß hier $KD = KH + HB$ drey Theile der Seite BC betrage: denn HK ist der Seite BC gleich, und HB ist die Hälfte derselben. Es ist aber KD allezeit $KH + HB$. Sonst haben wir bey diesem Schritte nichts zu erinnern nöthig: denn man siehet vor sich leicht, welche Linien aus der Figur weg bleiben können, ohne daß dadurch die Verzeichnung derselben, und die Erfindung des Gesuchten, ohnmöglich werde.

Sehender Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien und Flächen, in Ansehung anderer Flächen.

S. 1.

Bisher haben wir immer die Flächen als gegebene angenommen, und alle gerade und krumme Linien, welche wir betrachtet, wie auch alle Figuren in dergleichen Flächen beschrieben. Wir müssen nunmehr auch solche Linien betrachten, welche ausser einer gegebenen Fläche gezogen sind, und uns die Lage dieser Linien, in Ansehung der Fläche, und die Eigenschaften, welche daraus folgen, nach und nach bekannt machen. Wir müssen verschiedene Flächen bald auf diese bald auf jene Art an einander legen, und uns Begriffe davon machen, was aus dieser oder jener Lage, in Ansehung der Flächen selbst, oder in Ansehung der Linien, welche in denselben gezogen sind, folge. Diese Betrachtung ist an sich nützlich, ja unentbehrlich; es kan aber auch ohne derselben nichts von den Körpern erwiesen werden, deren Betrachtung uns noch vorsteht. Sie ist an sich leicht, ja eine der leichtesten, welche wir gehabt haben, wenn man sich nur die Mühe giebet, die ersten Begriffe von diesen Dingen genau aus einander zu setzen.

S. 2. Die einzige Schwierigkeit dabey ist, daß man diese Begriffe durch Figuren nicht so vollkommen ausdrücken kan, als bisher geschehen ist, da die Figur dasjenige meist vollkommen vorstellen konnte, so in dem Begriff enthalten war. Denn die Figuren werden auf einer Ebene verzeichnet, und sollen doch Linien und Oberflächen vorstellen, welche nicht alle in einer Ebene sind. Man kan aber diese Schwierigkeiten heben, wenn man im Anfang Papiere auf verschiedene Arten zusammen setzet, welche die Flächen vorstellen, die wir betrachten. Die geraden Linien aber, welche bey denselben liegen sollen, durch straf gezogene Faden oder steiffe und gerade Stücke Drats, anzeigen. Man wird wohl thun, wenn man, der Einbildungs-Kraft zu Hülfe zu kommen, an statt der Figuren, welche ohnmöglich alles so wohl und deutlich vorstellen können, zuweilen solche Blätter und sol-

X. Die steiffe Stifte zur Hand nimmt, und vermittelst derselben sich die Dinge vorstellt, welche das Augenmerk der nachstfolgenden Betrachtung seyn werden. Doch ist es nicht allezeit nöthig, und die Einbildung gewöhnet sich gar bald auch an die bloße Figuren.

Wie zwei Flächen einander schneiden.

F. 265. §. 3. Daß wir uns nun gleich Anfangs dieser Beyhülfe bedienen, so nehme man ein Stück Papiers von was Figur man will, und suche es dergestalt zusammen zu falzen, daß die zwei Theile desselben ABC , ABD zwei verschiedene ebene Flächen werden, und sich folgendes nirgends krümmen. Man
nen, als wenn der Fall AB , 1
verschiedene Flächen ABC und ABD wird. Dieses kan man als e
sich dasjenige zeigt, so wir zuerst
welche wir aber hier bloß zu dem
deutlicheren Begriff von solchen Fl
bringen können.

it anders ehn könn
tt nunmehr in zwei
et, eine gerade Linie
nehmen, welche an
1 betrachten werden,
damit wir einen desto
der schneiden, bey

§. 4. Man kan eine jede Fläche so weit ausdehnen als man will, eben wie dieses auch mit einer geraden Linie angehet; allein, da die gerade Linie sich nur nach einer Strecke verlängern läßt, so kan man eine Fläche so wohl in die Länge als in die Breite weiter ausdehnen. Die Natur der Fläche erfordert es, daß, wenn man sie dergestalt vergrößert, man sie nach geraden Linien weiter und weiter ausstrecke, sonst bliebe sie nicht eine ebene Fläche. Ausser dem aber wird man bey dieser Ausdehnung von nichts eingeschränket, IV, 34. Aus dieser Ursach stellen wir uns hier, da wir bloß auf die Lage Acht haben, die Oberflächen ohne einige Gränzen der Länge und der Breite vor, eben wie wir uns die geraden Linien ohne Gränzen vorgestellt, als wir bloß von ihrer Lage handelten, IV, 40. Wir konten uns den Begriff einer Linie, welche auf einer andern perpendicular steht, machen, ohne auf die Größe dieser Linien Acht zu haben; ja wir mußten uns denselben so machen, weil die verschiedene Größe in dieser Lage nichts ändert. Eben so wenig aber ändert auch die Größe in der Lage der Flächen etwas, und darf also bey denselben in keine Betrachtung gezogen werden. Wir stellen uns demnach hier alle Flächen, als ohne Anfang und Ende, vor, ob man sie zwar nicht anders zeichnen kan, als von allen Seiten abgeschlossene Figuren, da wir man keine gerade Linien

nien zeichnen kan, welche nicht ihren Anfang und Ende hätten. Weis- X.
sentheils stellet man die Ebenen hier durch Vierecke vor: aber dieses Wispant.
geschiehet bloß deswegen, weil diese Figur vor andern geschikt ist, die
Lage der Flächen deutlich vorzubilden.

S. 5. Wenn wir dieses auf die zwei Flächen, welche wir uns eben als
die zwey Theile eines gefalteten Blatt Papiers vorgestellt, anwenden,
und die Flächen ABC , ABD durch AB in E und F fortführen, so
entstehen zwei Flächen, welche einander in AB schneiden, CE und DF . F. 266.
Dergleichen Flächen haben wir zuerst zu betrachten. Man sie-
het vor allen Dingen leicht, daß der Schnitt AB ganz keine Breite ha-
ben könne, und dieses ist daraus klar, weil die Flächen selbst keine
Dicke haben, sondern bloß in die Länge und Breite ausgedehnet sind.
Daraus folget, daß, wenn man die Fläche CE von C anfängt, und
gegen die FD nach und nach vergrößert, sie sich der Fläche FD be-
ständig nähert, bis sie diese bey AB in einem oder mehreren Puncten
erreicht; und daß, wenn dieses geschehen, und man die Fläche CE
von den Puncten an, in welchen sie die Fläche DF erreicht, weiter
fort nach unten zu gegen E ausdehnet, sie die Fläche DF bey densel-
ben Puncten so gleich wieder verlasse. Wäre dieses nicht, so müste
die Fläche CE eine Weite in der Dicke der Fläche DF fortgehen kön-
nen, welches aber ohnmöglich ist, weil die Fläche DF keine Dicke hat.

S. 6. Dieses deutlicher einzusehen, darf man sich nur vorstellen,
welchergestalt eine Fläche einen Körper schneidet. Der Körper sey AB ,
und die Fläche, welche ihn schneidet CD . Man stelle sich vor, daß F. 267.
man diese Fläche nach und nach von C an gegen den Körper AB aus-
dehne. So bald sie nun den Körper in EF erreicht, so bald fängt
sie an, denselben zu schneiden; aber indem man sie noch weiter herun-
ter führet, bleibt sie immer an dem Körper, und fährt fort denselben
zu schneiden, bis sie in GH kommet, da sie den Körper wieder ver-
läßt. Es wird demnach der Schnitt $EFGH$ von einer desto größeren
Breite, je tiefer der Körper AB ist. Denn ist der Körper sehr dünne,
wie zum Exempel ein Blatt des feinsten Papiers, so ist der Schnitt
schon kaum so breit, daß man diese Breite bemerken könnte. Und weil
der Schnitt bey noch dünneren Körpern auch immer schmaler und
schmäler wird, so siehet man, daß, wenn die Dicke gar verschwindet,
das ist, wenn man sich an die Stelle des Körpers eine Oberfläche
vorstellet, auch die Breite des Schnittes gar verschwinden, und der
Schnitt

X. Schnitt zu einer Länge ohne Breite, oder zu einer Linie, werden
Schnitt. müsse.

F. 266.

S. 7. Indem die Fläche CE die Fläche DF schneidet, so schneidet auch hinwiederum die Fläche DF die Fläche CE, und der Schnitt AB ist beyden Flächen gemeinschaftlich, daß demnach, da CE die DF in einer Linie schneidet, auch hinwiederum DF die CE in einer Linie schneiden muß; und zwar in eben derselben AB, in welcher sie selbst geschnitten wird.

S. 8. Man siehet leicht, daß, was wir eben ertrogen, auch von gekrümmten oder unebenen Oberflächen richtig sey, welche nemlich nach einer oder mehreren Seiten nach krummen Linien ausgedehnet sind; und daß überhaupt alle Oberflächen, sie mögen eben oder uneben seyn, wenn sie einander schneiden, einander in einer Linie schneiden. Man kan durch eine geringe Arbeit der Einbildungs-Kraft, diesen Satz bis dahin erweitern, insonderheit wenn man ihn mit gebeugeten Papieren etwas zu Hülfe kommet, und dadurch die Oberflächen, welche einander schneiden sollen, sich vorstellt. Was ferner gesagt werden soll, ist bloß von den ebenen Flächen zu verstehen, welche wir bis anhero unter dem einfachen Worte einer Fläche verstanden haben wollen. Man nehme sich nur in Acht, die ebenen und geradelinichten Flächen nicht mit einander zu verwirren, und lese auf allem Fall lieber dasjenige nach, so von dem Gebrauche dieser Wörter gleich im Anfange der Geometrie IV, 37. gesagt worden ist.

F. 268.

S. 9. Die ebene Flächen schneiden einander nur in einer Linie, und niemals in mehreren. Man kan sich die Sache wieder mit zusammen gefalteten Papieren vorstellen: Es können die zwey Theile eines zusammen gefalteten Blattes CB, BD einander, ausser der AB, ohnmöglich noch einmal schneiden, so lange sie eben bleiben und man sie nicht beuget: Ja sie können nicht einmal in einem Puncte zusammen kommen, welches ausser dem ebengedachten Schnitte oder Falte AB gelegen wäre; es müste denn seyn, daß man dieselbe ganz auf einander legen wolte. Und dieses letztere kan man auch geometrisch von allen Flächen zeigen, zu welchem Ende wir den Satz dergestalt abfassen: Wenn zwey Flächen einander schneiden, so ist nicht möglich, daß ausser der Linie, in welcher sie einander schneiden, sie einiges anderes Punct gemeinschaftlich haben sollten. Darunter wird das erstgesagete nothwendig begriffen. Denn haben zwey Flächen ausser ihren gemeinschaftlichem

lichem Schnitte nicht einmal ein Punct gemeinschaftlich, so haben sie noch viel weniger eine Linie gemeinschaftlich, als in welcher unendlich viele gemeinschaftliche Puncte anzugeben wären: Es ist aber ein jeder Schnitt nothwendig den beiden einander schneidenden Flächen gemeinschaftlich.

§. 10. Es wird sich aber diese an sich nicht schwere Sache folgendergestalt einsehen lassen. Es seyen ABC , ABD zwei Flächen, welche die Linie AB gemeinschaftlich haben, in welcher sie zusammen laufen, und einander schneiden würden, wenn man sie nach der Seite AB weiter ausstreckte.

F. 268.

Flächen fort
dieses leugn
den Flächen
E, so kan r
anderes P
wehle in AI
 ABC , AB
Fläche AB

diese zwei
il jemand
welches bei
das Punct
, noch ein
Man er
n Flächen
 FE in der
erade Linie

FGE , beides läßt sich thun, IV, 35. Sind nun die Flächen von einander verschieden, so könnten auch die Linien FE und FGE nicht in eines zusammen fallen, sondern sie müssen zwischen F und E als bey G , von einander entfernet seyn, und es sind also zwischen den zwey Puncten F und E zwey verschiedene gerade Linien gezogen. Wir wissen, daß dieses ohnmöglich seyn könne, IV, 26: also kan auch das Punct E nicht beiden Flächen ABC , ABD gemeinschaftlich seyn, oder die Flächen, welche in der Linie AB zusammen stoßen, können ohnmöglich einander noch in einem anderen Puncte E antreffen.

§. 11. Wir wissen also, daß zwei Flächen einander in einer Linie AB schneiden können, und außer derselben sonst nirgends: oder daß, nachdem sie einander dergestalt geschnitten, sie einander hernach außer dieser Linie AB nicht mehr erreichen können, man mag sie vergrößern wie man wil. Aber was ist diese AB vor eine Linie? ist sie gerade oder ist sie krum? Ist es möglich, daß zwei ebene Flächen einander nach einer krummen Linie schneiden können, oder schneiden sie einander immer in einer geraden Linie? Die Erfahrung, welche wir gleich Anfangs X, 3. zur Erleuterung angegeben haben, das ist, ein Stück gefaltetes Papier, würde uns die Antwort leicht an die Hand geben,

X. wenn es erlaubt wäre, geometrische Beweise auf bloße Erfahrungen zu gründen. Es ist aber auch aus dem, was wir bereits von dem Schnitte der Flächen wissen, leicht einzusehen, daß die Linie AB , in welcher zwei Flächen einander schneiden, allezeit gerade sey.

R. 266. §. 12. Denn man mag die Linie AB , in welcher zwei Flächen einander schneiden, sich im Anfange vorstellen wie man will, so kan man doch in derselben zwey Punkte A und B annehmen, welche beiden einander schneidenden Flächen gemeinschaftlich sind. Denn da die ganze Linie AB in beyden schneidenden Flächen zugleich lieget, so kan es allerdings mit diesen zwey gemeinschaftlichen Punkten keine Schwierigkeit haben. Hat man nun diese beyde Punkte nach Belieben angenommen, so stelle man sich vor, daß man sie vermittelst einer geraden Linie zusammen gezogen. Diese gerade Linie zwischen A, B muß so wohl in die eine CE , als in die andere DF , der einander schneidenden Flächen fallen. Denn die Punkte A und B sind so wohl in der einen als in der andern dieser Flächen CE, DF . Die gerade Linie aber, welche zwey Punkte einer Fläche zusammen hänget, fällt allezeit in eben dieselbige Fläche, sonst wäre die Fläche keine Fläche, weil eben daraus erkant wird, daß sie eine Fläche sey, wenn man zwischen jeden zwey Punkten derselben eine gerade Linie ziehen kan, welche ganz in dieselbe fällt. IV, 35. Ist nun also die gerade Linie zwischen A und B in den beyden einander schneidenden Flächen CE, DF zugleich, so schliesset man ferner folgender gestalt: Ausser der Linie AB , in welcher zwei Flächen einander schneiden, ist keine andere zu ziehen, welche in beyden Flächen zugleich wäre; die gerade Linie zwischen A und B ist in beyden Flächen CE, DF zugleich, derowegen ist diese gerade Linie zwischen A und B selbst die Linie AB , in welcher die Flächen einander schneiden, und es schneiden also zwei Flächen einander allezeit nach einer geraden Linie, sie mögen im übrigen gebildet seyn, wie sie wollen.

§. 13. Wenn man die Flächen, welche einander schneiden gehörig vergrößert, so wird auch die gerade Linie AB , in welcher sie einander schneiden, verlängert, ja man kan, indem man diese Schneidungslinie AB verlängert, so gleich alle übrige Punkte angeben, welche die Flächen CE, FD die einander schneiden, gemeinschaftlich haben werden, wenn man sie gehörig vergrößert. Denn kein einziges Punct, welches beyden Flächen gemeinschaftlich ist, fällt ausser dieser also verlängerten Schneidungslinie AB .

§. 14. Man sieht leicht, daß man ohnendglich zwey Punkte A, B an-

angeben könne, durch welche man nicht eben so wohl eine Fläche DB legen könnte, als man zwischen dieselbe eine gerade Linie ziehen kan, welche gerade Linie allezeit in die Fläche BD fällt, die man durch die zwey Puncte A, B geleget. Allein da man durch zwey Puncte nur eine gerade Linie AB ziehen kan, so kan man im Gegentheile durch dieselbe so viele Flächen BD, BC legen als man wil, welche einander alle in der geraden Linie AB schneiden werden: oder man kan BC um AB nach Belieben drehen. Eine Thür in ihren Angeln giebet ein deutliches Exempel davon, oder auch ein zusammen gefaltetes Papier. Jene kan man um ihre Angel nach Belieben auf und zu schlagen, und dieses lästet sich um seinen Salz ebenfalls mehr oder weniger von einander beugen, wie man wil.

Wie die Lage einer Fläche bestimmt wird.

§. 15. Gezet man nun daß in einer Fläche ABC, zwey Puncte A und B, und die gerade Linie AB, feste sind, und beständig an ihrem Orte liegen bleiben, Fläche um diese Puncte durch sie beyde gezogen Punct D erreicht, ret alle Bewegung dret hat, wenn man verlassen, sondern b in einer Thür, und daß man die ie gerade Linie AB, welche man um drehe, bis sie ein anderes raden Linie AB lieget: so hds uf, als sie dieses Punct erreie das Punct D nicht wieder e hindurch gehen sol. Denn so bald man die Fläche noch weiter um AB drehen wolte, würde sie das Punct D wieder verlassen. Es ist wieder eben so, wie mit einer Thür, welche man um ihre Angel so lange drehet, bis sie an ein festes Punct anstößet. Man kan sie so dann nicht zugleich weiter fort bewegen, und doch noch beständig durch dieses feste Punct durchgehen lassen. Man mag also drey Puncte nehmen wo man wil, in einer geraden Linie oder außer derselben, so kan man jederzeit eine Fläche durch dieselbe legen; aber, wenn diese drey Puncte nicht in einer geraden Linie sind, so wird die Lage der Fläche durch dieselben Puncte bestimmt, und es kan durch drey Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, nicht mehr als eine einzige Fläche geleget werden, eben als wie durch zwey Puncte nicht mehr als eine gerade Linie gezogen werden kan.

§. 16. Nun stelle man sich vor, die drey gegebenen Puncte seyn A, B und C, welche nicht in einer geraden Linie liegen, und lege an dieselbe eine Fläche, so nemlich, daß alle drey Puncte A, B, C in diese Fläche fallen; so dann ziehe man durch zwey dieser Puncte die gerade Linie

X. Linie AB, welche man nach Belieben verlängern kan. Dieselbe fällt
Wsknlt. ganz in eben die Fläche, welche durch A, B und C gehet, und kan nicht
aus derselben fallen, weil sonst die Fläche nicht überall nach geraden
Linien ausgedehnet wäre, wenn sie jemals von der AB abwich. Eben
so ist es mit der geraden Linie CB, welche die vorige in B schneidet, sie
fällt ganz in eben die Fläche, welche wir betrachten, die nemlich gleich
Anfanges an A, B, C gelegen worden ist, und man muß also sagen,
daß wenn zwei gerade Linien AB, CB einander schneiden, man allezeit
eine Fläche so legen könne, daß diese gerade Linien, man mag sie ver-
längern wie man wil, ganz in dieselbe fallen: oder daß man allezeit
sich eine ebene Fläche vorstellen könne, welche durch diese Linien hin-
durch gehet.

S. 17. Ziehet man noch die dritte Linie AC, nachdem man das
vorige gelassen, wie es war, so kommt diese Linie AC in eben die
Fläche zu liegen, in welcher die Punkte A, B, C liegen, und liegen
demnach die drey Seiten der Figur ABC zusammen in einer Fläche,
und so ist es mit allen dreyseitigen Figuren. Denn man kan allezeit
durch die drey Spitzen ihrer Winkel eine Fläche legen, in welche so
dann ihre Seiten nothwendig fallen. Oder man mag drey Punkte
A, B, C, nehmen wie man wil, und dieselben mit den geraden Linien
AB, BC, CA zusammen hängen, so bekommt man allezeit ein Dreyeck,
wie es im Anfange IV, 83. erklärt, und bisher betrachtet worden ist,
nemlich eine ebene Figur, welche von drey geraden Linien beschlos-
sen wird.

F. 271. S. 18. Mit den Vierecken ist es schon nicht nothwendig so; noch
weniger mit dem Fünfeck, und den übrigen vieleckigten Figuren; das
ist, wenn man vier Punkte A, B, C, D nach Belieben leget, wie man
wil, und sie vermittelst der geraden Linien AB, BC, CD, DA zusammen
hänget, so wird die Figur ABCD nicht nothwendig eben, und man
erhält also dadurch nicht allezeit solche Vierecke, als wir im vorigen be-
trachtet haben: und eben so ist es mit allen Vielecken beschaffen.
Wir wollen bey den Vierecken stehen bleiben, weil deren Betrachtung
die vorige etwas erläutern kan. Wenn ABCD ein Viereck ist,
dessen Seiten man mit Fleiß alle in eine Ebene gelegt hat; und man
ziehet eine Querslinie BD, so kan man hernach die Figur nach BD fal-
zen, und das Dreyeck BAD gegen ECD neigen wie man wil, als, bis
in aBD, da denn die Dreyecke aBD, BDC zwei verschiedene Flächen
ab-

abgeben werden, welche einander nach BD berühren, aber keinesweges eine ebene Figur, dergleichen ABCD war. Man schneide sich ein Viereck von Papier aus, und falze dasselbe, wie angewiesen worden ist, so siehet man die Sache deutlich.

S. 19. Das Parallelogrammum machet hier eine Ausnahme: nicht als ob nicht ein Viereck von dieser Art sich eben so falzen und beugen liesse, wie wir eben gewiesen haben: sondern weil es aufhöret ein Parallelogrammum zu seyn, so bald man es beuget. Denn dadurch höret nothwendig der Parallelstand der entgegen gesetzten Seiten auf, weil, nach dem ersten Begriffe, die Parallellinien nothwendig in einer Fläche liegen müssen, IV, 78. und wenn sie nicht so liegen, keine Parallellinien können genennet werden. Es sind nemlich die Parallellinien diejenigen, welche nicht zusammen laufen, man mag sie verlängern, wie man wil, aber das ist nicht genug. Nicht alle gerade Linien, welche, wenn man sie verlängert, einander nicht erreichen, sind parallel. Dieses thun zwei Linien, deren eine man auf dem Tisch von Abend gegen Morgen, die andere aber auf dem Boden des Zimmers von Mittag nach Mitternacht gezogen hat, ebenfalls nicht: sie sind aber deswegen nicht parallel, und die von Parallellinien erwiesene Eigenschaften können ihnen keinesweges zukommen. Wir haben allezeit, indem wir dieselbe Eigenschaften erwiesen, zugleich vor Augen gehabt, daß die Linien, welchen wir parallel genennet, in eben der Fläche liegen.

S. 20. Ist nun also ABCD ein Parallelogrammum, so liegen die Seiten AD und BC in einer Fläche, und, weil die äußersten Punkte der Seiten AB und DC in eben der Fläche liegen, indem sie in die erst angezeigte Parallellinien AD, BC fallen; so kan es nicht anders seyn, es müssen auch diese Linien AB, DC ganz in eben der Fläche liegen, welche durch die Parallellinien AD, BC geht. Denn eine Linie fällt niemals in eine andere Fläche, als in diejenige, in welche zwey Punkte derselben fallen. Man könnte diesen Satz mehr allgemein machen, und sagen, wenn zwei einander entgegen gesetzte Seiten eines Vierecks, wie hier AD, BC in einer Fläche liegen, so liegen alle Seiten desselben Vierecks in eben der Fläche. Der Beweis ist mit dem, welchen wir eben gegeben haben, einerley: allein diese Betrachtung ist von keinem sonderlichen Nutzen.

X.
Abschnitt.

F. 272.

X.
Abschnitt.

Gerade Linien, so einer Fläche parallel laufen.

§. 21. Dieses sind die Grundsätze der gegenwärtigen Abhandlung, und wir können nunmehr zu demjenigen übergehen, was wir hauptsächlich zu betrachten haben. Wir machen den Anfang mit solchen geraden Linien, welche einer gegebenen Fläche parallel gezogen werden. Man sagt aber, daß eine gerade Linie einer Fläche parallel laufe, wenn sie die Fläche niemals erreicht, man mag sie verlängern und die Fläche vergrößern wie man wil. Mehr wird zu dieser parallelen Lage nicht erfordert.

§. 22. Und man kan sich nachfolgende Anweisung vorstellen, eine gerade Linie nicht allein mit einer Fläche, sondern auch mit einer in derselben gegebenen geraden Linie parallel zu ziehen. Denn es muß auch diese letztere gegeben seyn, oder wenn sie nicht angegeben wäre, so müßte man sie nach Belieben annehmen, weil, wie leicht einzusehen ist, gar verschiedene Linien mit jeder gegebenen Fläche parallel können gezogen werden, nach andern und andern strecken. Ja es muß auch drittens das Punct, durch welches die Parallellinie sol gezogen werden, entweder zugleich bestimmt seyn, oder doch nach Belieben genommen werden. Hat man dieses alles, und ist die Fläche, welcher die Linie parallel laufen sol AB; die Linie aber in dieser Fläche, welcher die zu ziehende Linie parallel seyn sol, CD, und E das Punct ausser der Fläche AB, durch welches die Parallellinie zu ziehen ist: so lege man an CD eine neue Fläche, die zugleich durch das gegebene Punct E gehet, welche Fläche ED vorstellet, und ziehe in dieser Fläche, wie Anfangs IV, 173. gemiesen worden ist, die EF mit der CD parallel. Diese ist auch der Fläche AB parallel.

F. 273.

§. 23. Man siehet, daß zu dem Beweise, daß EF mit der Ebene AB parallel sey, nichts erfordert werde, als daß man zeige, daß EF die Fläche AB niemals erreichen werde, und dieses kan man ohne Schwierigkeit einsehen. Weil EF mit der CD parallel läuft, so kan EF mit der CD niemals zusammen kommen. Nun schneiden die Flächen AB und ED einander in CD: also kan EF niemals in den Schnitt dieser beyden Flächen kommen. Und wenn also EF die Fläche AB jemals erreichen sollte, so müßte dieses ausser diesem Schnitte CD geschehen. Man siehet aber leicht, daß dieses ohnmöglich ist. Denn weil die Linie EF beständig in der Fläche ED bleibt, und mit dieser in einem fortgehet: so muß da, wo die Linie EF die Fläche AB erreicht

erreicht, auch selbst die Fläche ED die eben genannte AB erreichen. Es X.
 ist aber nicht möglich, daß ED mit der AB außer der CD ein gemein- Abchnitt.
 schaftliches Punct haben sollte; X, 9. also kan auch ED die Fläche AB
 nicht außer der CD erreichen: die Linie EF erreicht also die Fläche
 AB weder in der CD noch außer der CD , das ist, nirgends.

§. 24. Wir wollen diesen Satz zum Behufe des Gedächtnisses
 kürzer also fassen: Wenn man mit einer Linie CD , so in einer Fläche
 AB gegeben ist, außer dieser Fläche eine Parallellinie EF zieht; so ist
 diese Linie EF auch selbst der Fläche AB parallel. Selbst hieraus
 könnte man das nächstfolgende ohne weitem Umschweif einsehen: wir
 wollen es aber größser Deutlichkeit halber besonders beweisen. Wir
 setzen, daß man die EF mit der Fläche AB parallel gezogen, und so F. 274.
 dann an EF eine andere Fläche geleet habe, welche die erstere AB in
 CD schneidet, und sagen erslich, daß EF mit der CD parallel sey.
 Dieses ist gar leicht erwiesen. Denn weil EF mit der Fläche AB pa-
 rallel lieget, so kan sie mit der Fläche AB nicht zusammen laufen, und
 also auch nicht mit der Linie CD . Denn wenn EF die Linie CD erreichte,
 so erreichte sie nothwendig auch die Fläche AB , weil die Linie CD ganz
 in der AB lieget. Es liegen also in der Fläche ED zwei Linien EF
 und CD , welche nicht zusammen laufen. Dieses ist der Begriff von
 zwei Linien die einander parallel liegen, IV, 78. demnach ist die Linie
 EF der Linie CD parallel.

§. 25. Ferner setzen wir, daß nachdem alles noch eben so gemacht
 worden, wie wir gewiesen haben, nachdem man nemlich EF mit der
 Fläche AB parallel gezogen, und an EF die Fläche ED geleet,
 welche die AB in CD schneidet, man noch eine andere Fläche EH eben-
 falls an die EF geleet habe, welche die Fläche AB in GH schneidet:
 und sagen zum zweyten, daß dieser Schnitt GH mit dem vorigen CD
 parallel laufe. Auch dieses ist aus eben den Gründen einzusehen, wel-
 che wir eben gebrauchet haben. Wir haben gesehen, daß CD mit EF
 parallel sey, und weil GH eben so entstanden ist, wie CD , so ist eben
 dieses auch von der HG zu sagen. Also kommet weder die eine noch
 die andere dieser zwei Linien CD , GH jemals mit der EF zusammen,
 wie weit man sie auch verlängern mag. Und hieraus schließen wir
 ferner, daß sie einander auch selbst nicht erreichen können. Wir ha-
 ben erst X, 24. gezeigt, wie dieses heraus zu bringen sey, und erach-
 ten also nicht nöthig, es so gleich zu wiederholen, zumalen es als etwas
 sehr gemeines angesehen werden kan, daß zwei gerade Linien CD , GH ,

X. so in zwei einander in EF schneidenden Flächen ED , EH dergestalt gezogen sind, daß sie den Schnitt EF niemals erreichen, auch einander selbst nicht erreichen können. Es haben demnach die zwei Linien CD , HG das erste Kennzeichen der Parallellinien, daß sie nemlich einander niemals erreichen. Das andere ist sichtlich. Sie liegen beyde in der Fläche AB . Also sind diese Linien CD , HG nothwendig einander parallel.

§. 26. Nunmehr lehre man die Sache um, und setze sie von einer anderen Seite an. Man setze, daß man zuerst die Linie CD in der Fläche AB nach Belieben gezogen, so dann an CD die Fläche ED gelegt, und in derselben die Linie EF der CD parallel gemacht habe, welche EF dadurch auch der Fläche AB parallel worden. Ferner setze man, daß man auch in der Ebene AB die Linie GH der vorigen CD parallel gemacht, und daß, nachdem dieses alles geschehen, man an EF die Fläche EH dergestalt gelegt habe, daß sie durch das Punct G gehet: so wird diese Fläche EH die AB in keiner andern Linie als in der GH schneiden. Denn der Schnitt, wo man sich denselben auch vorstellen mag, ist, wie gezeigt worden, X , 25. mit der CD parallel; und weil man die Fläche EH an G gelegt hat: so gehet diese der CD parallel laufende Linie durch G . Dieses aber thut die im Anfang gezogene GH und keine andere. IV, 184. Also ist der Schnitt selbst die GH , oder, die Fläche EH schneidet die Fläche AB in keiner andern Linie, die durch G ginge, als in derjenigen die durch G der CD parallel läuft.

§. 27. Wir hätten vielleicht dem Leser überlassen können, gegenwärtiges aus dem, so eben vorher gegangen ist, zu schließen. Aber wir haben uns ein allgemeines Gesetz gemacht, lieber etwas Umschweife zu machen, als die geringste Schwierigkeit, so zu heben möglich ist, zurück zu lassen. Indessen stehet man, daß hierinnen nachfolgender Satz lieget: Wenn man einer Linie CD eine andere GH in einer gewissen Fläche AB parallel zieht, und ziehet der ersten CD noch eine andere EF in einer andern Fläche DE parallel, so ist diese letztere EF auch der GH parallel. Dieser Satz sage ich lieget in den vorigen. Denn wenn man, wie wir gethan, nachdem wir gezeigt, daß es allezeit geschehen könne, die Fläche EH an EF dergestalt legt, daß sie die AB in GH schneide; so ist aus dem gesageten X , 25. klar, daß EF mit der GH parallel seyn müsse. Man kan diesen Satz auch kürzer so ausdrücken: Zwei gerade Linien EF und GH welche beyde einer drit-

dritten CD parallel laufen, sind selbst parallel, ob sie zwar in zwei verschiedenen Flächen liegen: und man hat nicht nöthig zu erwähnen daß CD und GH in einer Fläche AB liegen müssen, und EF und CD wieder nur in einer ED, weil dieses in dem ersten Begriffe der Parallelinien enthalten ist.

X.
Abschnitt.

F. 275.

S. 28. Nun können wir weiter, und zu einer andern Betrachtung übergehen, welche ebenfalls Parallelinien zum Augenmerke hat, die nicht alle in einer Fläche liegen. Man ziehe zwei gerade Linien AB, CB nach Belieben, doch so, daß sie einander in B berühren, und einen Winkel ABC machen. Es liegen diese Linien beyde in einer Ebene, welche durch die drei Punkte A, B, C kan geleget werden. X, 16. Ausser dieser Ebene ziehe man mit der AB die Linie ab, und mit der BC die Linie bc parallel, welche Linien ebenfalls in einem Punkte b zusammen laufen, und einen Winkel a b c machen werden. Denn es laufet die Fläche in welcher die zwei Linien AB, ab liegen, mit derjenigen, in welcher die andern zwei CB, cb liegen, nothwendig zusammen, und schneiden einander, wie man leicht siehet. Es kan erwiesen werden, daß diese zween Winkel ABC, a b c gleich seyn: ja man siehet dieses fast von selbst. Wenn sie nicht gleich sind, welcher ist der grössere? Gleich wie ab der AB parallel gezogen worden, so ist auch AB der ab parallel; und wiederum ist BC der bc nicht weniger parallel; als bc der BC, was hat also der eine Winkel vor dem andern vor einen Vorzug?

S. 29. Doch wir haben uns niemals an dergleichen Verweisen begnügen lassen, welche noch immer einige Undeutlichkeit bey sich haben, und wir müssen auch hier ganz anders verfahren, wenn wir die Sache zu einer vollkommenen Gewisheit bringen wollen; es ist dieses nicht schwer. Man mache die ab welche der AB parallel ist, auch derselben gleich, und ziehe die gerade Linien Aa, Bb, dadurch erhält man ein Parallelogrammum ABba, als welches jederzeit beschrieben wird, wenn man die äussersten Punkte A, a, wie auch B, b zweier gleichen Parallelinien AB, ab mit geraden Linien Aa, Bb zusammen ziehet. IV, 21. a. Es ist demnach wie in einem jeden Parallelogrammum Aa der Bb gleich und parallel. Eben dieses mache man auch mit CB und cb, man mache sie einander gleich, und ziehe ihre äussersten Punkte C, c mit der geraden Linie Cc zusammen, denn Bb hat man nicht nöthig zu ziehen, weil sie bereits gezogen ist. Das Viereck CBbc ist wieder ein Parallelogrammum, weil die erst angezogene Gründe auch hier

Et

statt

X. Statt finden. Demnach ist auch Cc der Bb gleich und parallel. Das ist, die beyden Linien Aa, Cc sind der Linie Bb gleich, und eben diese zwey Linien sind auch beyde der Linie Bb parallel. Aus dem ersten folgt, daß sie auch einander gleich seyn, und aus dem zweyten daß sie auch einander parallel laufen. X, 27. Ziehet man nun also diese gleiche Parallellinien Aa und Cc wieder, vermittelt der geraden Linien AC und ac , zusammen, damit man das Viereck $AacC$ erlange: so ist dieses Viereck wieder ein Parallelogramm, und demnach AC der ac gleich. Da nun also $AB = ab$, $BC = bc$, und $CA = ca$, das ist, da in den Dreyecken ABC , abc , alle Seiten gleich sind, so sind auch die Winkel ABC und abc , welche zwischen gleichen Seiten liegen, einander gleich, welches zu erweisen war.

Gerade Linien, so auf einer Fläche perpendicular stehen.

S. 30. Und dieses war dasjenige so wir von den Parallellinien, welche nicht in einer Fläche liegen, zu bemerken hatten. Wir gehen zu solchen geraden Linien über, welche auf den Flächen gerade, oder perpendicular stehen. Man sagt aber, daß eine gerade Linie AB auf einer Fläche CD gerade oder perpendicular stehe, wenn sie mit allen geraden Linien BE, BF, BG rechte Winkel machet, die man in der Fläche CD durch das Punct B ziehen kan, in welchem sie die Fläche berührt. Oder, das Kennzeichen, ob eine gerade Linie AB auf einer Fläche perpendicular stehe oder nicht, ist dieses. Man bemerkt das Punct B , in welchem die gerade Linie AB die Fläche berührt, und ziehet durch dasselbe gerade Linien BE, BF, BG nach allen Seiten. Ist nun AB auf diese Linien alle perpendicular keine ausgenommen, oder sind die Winkel ABE, ABF, ABG , und alle übrige die man dergestalt bekommt, alle gerade, so muß man sagen daß AB auf die Fläche CD perpendicular sey: sonst, wenn einer oder der andere dieser Winkel nicht gerade wäre, stünde die Linie AB schief auf der Fläche CD .

S. 31. Es wäre in der Anwendung zu weitläufig alle diese Winkel zu erforschen, und zu untersuchen ob sie gerade sind oder nicht. Man hat aber dieses nicht nöthig. Ein viel leichteres Kennzeichen, daß eine Linie auf einer Fläche perpendicular stehet, liegt in nachfolgendem Satze, welchen wir erweisen müssen: Wenn eine gerade Linie AB eine Fläche CD in B erreicht, und mit zwey geraden Linien BE und BF welche in dieser Fläche durch das Punct B nach Belieben gezogen sind, rechte

rechte Winkel machet ABF nemlich $= ABE = R$: so ist die Linie AB auch auf alle übrige gerade Linien, welche man in eben der Fläche CD durch B ziehen kan, perpendicular, und folgendes auch auf die Fläche selbst. Daß man also, diesem zu Folge, nur zu untersuchen hat, ob die zwey Winkel ABE , ABF gerade sind oder nicht, wenn man wissen wil, ob AB auf die Fläche perpendicular sey, und nicht nöthig hat, sich um alle übrige Linien zu bekümmern, weil AB auf dieselbe, wenn nur der Satz richtig ist, nothwendig perpendicular seyn muß, wenn die Winkel ABE , ABF gerade sind.

S. 32. Die Richtigkeit aber dieses Satzes kan man auf nachfolgende Art einsehen. AB ist so wohl auf BE als auf BF perpendicular. Dieses wird zum Grunde gesetzt. Man verlängere diese Linien beyde durch B , bis $Be = BE$, und $Bf = BF$, und ziehe die gerade Linien fe , FE . Die Dreyecke Bef , BEF werden dadurch gleich und ähnlich. Denn es sind so wohl ihre Winkel EBF , eBf gleich, als auch die Seiten, welche sie einschließen; also sind IV, 112. ihre dritten Seiten EF , ef , wie auch die Winkel E , e , und F , f einander ebenfalls gleich. Nun ziehe man von einem in der AB nach Belieben angenommenen Punkte A eine gerade Linie nach F , und eine andere nach f , so bekommt man zwey Dreyecke ABF , ABf , welche bey B rechtwinklicht sind, und zwey gleiche Seiten haben, nemlich $Bf = BF$, und $BA = BA$. Es sind also in diesen Dreyecken auch die übrigen Seiten gleich, $AF = Af$. Und ziehet man ferner auch die geraden Linien AE , Ae , so werden diese Linien einander ebenfalls gleich, aus eben den Gründen die wir eben gehabt haben. Denn es ist $ABE = ABe = R$, und $Be = BE$, $AB = AB$. Wenn man sich also nunmehr die zwey Dreyecke Afe , AFe vorstellt, so siehet man, daß sie gleich und ähnlich seyn. Denn alle Seiten des einen, sind allen Seiten des andern gleich, $fe = FE$, $Af = AF$, und $AE = Ae$, welches alles erwiesen worden ist. Ja man könnte dasselbe auch ohne weitläufigem Beweise bloß daraus einsehen, weil bey Verfertigung dieser Dreyecke AEF , und Aef man alles auf einer Seite eben so gemacht hat, wie auf der andern. Dieses alles ist demnach nothwendig richtig, so bald man setzt, daß AB auf die beyden geraden Linien BE , BF zugleich perpendicular sey. Nun ist zu zeigen, daß hieraus fließe, daß eben diese AB auch auf einer jeden anderen geraden Linie, welche in der Fläche CD durch B gezogen werden kan, perpendicular stehe. Man ziehe eine Linie nach Belieben durch B , nemlich gG , so sich beyderseits in den Linien FE , fe endiget. Man

X. ~~Schnitt.~~ Siehet leicht, daß die Theile derselben BG und Bg einander gleich fallen müssen. Und sollte es nicht so gleich einzusehen seyn, so kan man durch folgende Betrachtung sich davon überführen.

§. 33. Die Winkel gBe und GBE sind einander gleich, weil sie durch den Schnitt zweier geraden Linien entstanden sind. IV, 70. Die Winkel GEB und g e B sind Winkel der Dreyecke FEB, f e B, von welchen wir gleich Anfangs gesehen, daß sie gleich sind, und die Seiten EB, eB sind einander mit Fleiße gleich gemacht worden; Dero wegen sind die Dreyecke gBe, GBE, in welchen zween Winkel und eine Seite einander gleich sind, selbst gleich und ähnlich: IV, 120. es ist also, wie wir zeigen solten, $gB = GB$, aber auch $ge = GE$, welches aus eben diesen fließet, und so gleich wird gebraucht werden. Nämlich, man ziehe nunmehr die geraden Linien AG und Ag, so haben die zwey Dreyecke AEG und Aeg erstlich die Seite AE gleich der Seite Ae, zum zweyten die Seite EG gleich der Seite eg, und zum dritten den Winkel AEG gleich dem Winkel Aeg, als welches Winkel sind in den Dreyecken AEF, Aef, von welchen wir gesehen, daß sie einander gleich sind. Und hieraus folget, IV, 112. daß in den Dreyecken AEG, Aeg, auch die Seiten AG, Ag einander gleich sind. Und dieses kan man wieder leicht vor sich einsehen, wenn man nur betrachtet, daß um die Linie Ag zu ziehen, man auf der einen Seite vollkommen so verfahren, und alles eben so gemacht habe, wie man auf der andern Seite verfahren, die Linie AG zu erhalten, und daß also gar kein Grund sey, warum die eine AG größer oder kleiner seyn sollte, als die andere Ag.

§. 34. Ist nun also $Ag = AG$, wie auch $gB = GB$, welches wir vorher gesehen, so sind, weil AB die dritte Seite in den Dreyecken ABG und ABg abgiebet, diese Dreyecke gleich und ähnlich; also sind auch die Winkel derselben bey B, nämlich ABG und ABg einander gleich, als welche in diesen Dreyecken zwischen gleichen Seiten liegen. Es fällt demnach die gerade Linie AB auf Gg, welche man in der Ebene CD gezogen dergestalt, daß sie mit derselben bey B zween gleiche Winkel machet. Also ist, nach den ersten Begriffen, AB auf Gg perpendicular, welches von dieser Linie zu erweisen war. Und weil man diese Linie Gg legen konnte wie man wolte; so siehet man leicht, daß eben dieser Beweis zeige, daß eben die AB auf alle Linien, die in der Fläche CD durch B können gezogen werden, perpendicular sey. AB ist auf Gg perpendicular, welche man in der Fläche CD durch B zie-

hen kan, wie man wil. Was heisset dieses anders als AB ist auf eine jede gerade Linie perpendicular, die man in der Fläche CD durch B ziehen kan? X. Abschnitt.

35. Dieser Beweis ist etwas lang, wegen der vielen Dreyecke, deren eines man nach dem andern zu betrachten hat, aber im übrigen gar nicht schwer, weil er sich bloß auf die ersten und leichtesten Sätze gründet, welche nunmehr, nachdem sie so oft angewandt werden, ganz natürlich seyn müssen; und in der That gewöhnet man sich endlich dergleichen Beweise, so zu reden, in einem Blicke zu überschauen. Dieses ist dasjenige, so wir zuerst zu bemerken haben. Die Sache selbst aber noch deutlicher zu machen, und sie dem Gedächtnisse einzuprägen, wollen wir ein Werkzeug beschreiben, mit welchem auf einmal eine Perpendicularlinie auf eine jede gegebene Fläche zu setzen ist. Denn ein gemeiner Winkelhacken ist dazu etwas unbequem. Man muß zwey Winkelhacken ABC, ABD, bey welchen nemlich ABC, ABD gerade Winkel sind, so zusammen setzen, daß ihre Schärffen AB in eines zusammen fallen, die anderen Seiten aber aus einander gehen, und einen Winkel DBC machen, der so groß seyn kan als man wil, doch mache man ihn lieber etwas groß als klein. Wenn man nun dieses Instrument dergestalt auf eine Fläche setzt, daß die Schärffen BD, BC beide in dieselbe fallen, so ist AB auf diese Fläche perpendicular, weil AB so wohl auf der BD als auch auf der BC perpendicular stehet, und diese Linien in der Ebene liegen, auf welche man die Perpendicularlinie setzen sollen. F. 278.

§. 36. Man siehet hieraus, daß, wenn ein Punct in einer Ebene gegeben ist, man durch dasselbe nicht mehr als eine gerade Linie ziehen könne, welche auf derselben Ebene perpendicular stehe. Denn hat man durch das Punct B, so in der Ebene CD lieget, die Perpendicularlinie AB gezogen, wie allezeit geschehen kan: und man wil durch B noch eine andere gerade Linie BE ziehen, welche von der AB verschieden sey, so muß sie mit der AB bey B nothwendig einen Winkel machen, und sich demnach auf der einen oder der andern Seite nach der Ebene CD mehr neigen, als die Perpendicularlinie AB: Woraus folget, daß die Winkel, welche BE mit den geraden Linien machet, die in der Ebene CD durch B gezogen werden können, ohnmöglich alle gerade seyn können. Man lege durch die beiden Linien AB, BE, die Fläche AF, welche die vorige CD in BF schneidet: wenn nun so wohl AB als EB auf der CD perpendicular stehen, so sind die Winkel ABE F. 279.

X. ABF und EBF, welche beide in der Fläche AF liegen, beide gerade, Abschnitt und folgend einander gleich, welches widersinnisch ist.

F. 280. §. 37. Auf eben die Art siehet man, daß sich die Ebene CD nicht an dem Puncte B auf diese oder jene Seite neigen lasse, ohne daß so gleich AB aufhöre auf dieselbe perpendicular zu seyn, oder daß, wenn AB auf CD perpendicular stehet, keine andere Fläche EF durch B könne gelegt werden, auf welcher eben diese AB perpendicular stünde. Denn weil die Winkel, welche AB mit allen geraden Linien macht, die in der Fläche CD durch B gezogen sind, gerade sind X, 30. so ist es nicht möglich, daß auch die Winkel, welche eben die AB mit allen Linien einschließet, die in der Fläche EF durch B gehen, gerade seyn sollten. Man lege durch AB die Fläche AG, welche die CD in BG und die EF in BH, schneidet: Wäre nun AB so wohl auf CD als auch auf EF perpendicular; so müßten die Winkel ABH, ABG beide gerade seyn, welches ohnmöglich ist, weil diese Winkel beide in der Ebene AG liegen IV, 55.

F. 281. §. 38. Es kan aber auch durch ein jedes Punct A außer der Fläche CD nur eine einzige Perpendicularlinie AB auf die Fläche CD gezogen werden. Denn wenn man setzen wolte, daß durch eben das Punct A noch eine andere Perpendicularlinie auf CD könne gezogen werden als AE; so müßte folgen, daß ein Dreieck zweien gerade Winkel haben könne. Denn ziehet man BE in der Ebene CD; so ist der Winkel ABE, welchen die Perpendicularlinie AB mit der BE macht, nothwendig gerade. Wäre nun AE auch auf CD perpendicular, so wäre der Winkel AEB auch gerade, und es hätte also das Dreieck ABE zweien gerade Winkel B und E, welches nicht seyn kan IV, 214.

F. 276. §. 39. Wir können nunmehr den Satz, welchen wir bisher betrachtet, verkehren; und sagen: wenn man in einer geraden Linie AB das Punct B nach Belieben annimmt, und durch B drey oder mehrere Linien BE, BF, BG ziehet, welche alle auf der AB perpendicular stehen, und mit derselben die rechten Winkel ABE, ABF, ABG einschließen; so werden diese Linien BE, BF, BG alle in die Ebene CD fallen, welche durch das Punct B dergestalt gelegt werden kan, daß AB auf derselben perpendicular stehe. Wir müssen bey diesem Satze erst ein und anderes anmerken, ehe wir ihn beweisen. Da wir nemlich gesagt, es sollen BE, BF, BG alle durch das Punct B gehen, und doch auf die AB perpendicular seyn; so kan dieses nicht so verstanden

den werden, als ob diese Perpendicularlinien BE, BF, BG alle mit X. der AB in einerley Ebene liegen sollten. In diesem Verstande ist die Ausschnitt-Sache ohnmöglich. Denn wir haben IV, 55. gewiesen und eben wiederholt, daß in einer gegebenen Ebene nur eine gerade Linie auf einer andern perpendicular stehen könne, wenn zugleich das Punct bestimmt ist, durch welches sie gehen sol. Wenn man sich aber durch AB verschiedene Flächen gezeiget vorstellt, so kan in einer jeden derselben eine Linie auf die AB perpendicular gezogen werden, welche durch B gehet, und dieses ist der einzige Verstand, welchen der Satz leidet. Ferner aber ist nicht nöthig zu beweisen, daß zwei dieser Perpendicularlinien BE, BF in einer Ebene liegen werden, auf welche AB perpendicular steht. Denn dieses siehet man aus dem X, 16. gewiesenen gar leicht. Weil BE, BF in dem Puncte B zusammen lauffen, so kan allerdings durch dieselbe eine Ebene CD gezeiget werden, und auf dieser Ebene muß AB perpendicular stehen, weil sie auf den zwei Linien BE, BF in der Ebene CD perpendicular steht X, 31. Das einzigt also, so zu beweisen übrig ist, ist, daß auch die dritte Perpendicularlinie BG in eben die Ebene CD fallen werde. Alleta, wenn dieses nicht wäre, so könnte man doch auch durch BF und BG eine Ebene legen, auf welcher AB perpendicular stehen würde X, 31. Wäre nun diese Ebene von der CD, die durch EBF gehet, verschieden, so stünde die AB auf zwei verschiedenen Ebenen, welche beide durch B gehen perpendicular. Dieses ist nicht möglich X, 37. also kan die Ebene durch FBG von der Ebene CD nicht verschieden seyn, sondern GB fällt in eben die Ebene CD, welche durch EBF gehet. Und eben so ist es mit der vierten, fünften und allen übrigen Linien, welche man durch B auf AB perpendicular ziehen kan.

§. 40. Wenn AB auf der Ebene CD perpendicular steht, und man beschreibet um das Punct B, auf welchem sie steht, einen Kreis FEG; so ist ein jedes Punct der Perpendicularlinie A von allen Puncten des Umkreises EFG gleich weit entfernt. Denn wenn man in dem Umkreise die beiden Puncte E und F nach Belieben annimmt, und an dieselbe die Halbmesser BE, BF zieht; und ferner AE und AF, so haben die zwey Drehe ABE, ABF, deren Winkel bey B gerade sind, zwö gleiche Seiten $AB = AB$ und $BE = BF$. Also sind auch ihre übrigen Seiten gleich, AE nemlich = AF. Diese Seiten AE und AF aber sind die Entfernungen des Punctes A von den Puncten E und F des Umkreises. ...

X. §. 41. Dieses war dasjenige, so wir von den Lagen der geraden Abschnitt. Linien gegen eine Fläche, welche insonderheit zu betrachten nöthig sind, zu bemerken hatten. Nun können wir die Lagen der Flächen gegen einander selbst einsehen; welche Erkenntniß aber uns wieder auf verschiedenes, so wir von den Lagen der geraden Linien gegen einander, und gegen die Flächen, an welchen sie liegen, noch nicht deutlich übersehen können, zurück führen wird.

Neigung einer Fläche gegen eine andere.

F. 283. §. 42. Zwei Flächen, welche einander in einer geraden Linie schneiden, haben eine gewisse Neigung gegen einander. Die Flächen sind ABC und CBD, die gerade Linie, in welcher sie einander schneiden ist BC. Diese Neigung, welche die Flächen gegen einander haben, welche man auch den Winkel nennet, welchen sie einschließen, wird dergestalt ausgedrückt. Man ziehet in der einen dieser Flächen EF auf CB perpendicular; und in der andern FG ebenfalls auf CB perpendicular, und zwar so, daß diese Perpendicularlinien in dem Punkte F zusammen stoßen, und einen Winkel EFG machen: dieser ist der Winkel, durch welchen man die Neigung der Flächen AB, BD gegen einander ausdrückt, und man hält EFG vor eben den Winkel, welchen die Flächen mit einander machen.

§. 43. Man hätte diese Linien EF, FG auch anders ziehen können, zum Exempel so, daß die Winkel EFC, GFC die Helften von geraden Winkeln, oder etwas dergleichen geworden wären, um hernach aus der Grösse des Winkels EFG die Grösse der Neigung, welche die Flächen AB, BD gegen einander haben, auszudrücken. Allein man siehet leicht, daß dieses Weitläufigkeiten verursacht haben würde, welche in der Geometrie mehr, als in einiger anderen Wissenschaft, zu vermeiden ist, da hingegen diejenige Art die Grösse der Winkel, welche die Flächen mit einander einschließen, durch den Winkel der Perpendicularlinie EFG zu messen, welche wir erklärt haben, und die von allen angenommen wird, ganz natürlich ist.

Fig. 1. §. 44. Dieses siehet man hieher leicht ein, daß es einerley sey, wo man die Perpendicularlinien EF, FG ziehet, und daß die Grösse des Winkels nicht anders wäre gefunden worden, wenn man an statt der EF, FG die Linien ef, fg auf BC perpendicular gezogen hätte. Denn weil EF, ef beide in der Ebene AB auf die BC perpendicular sind, so sind sie einander parallel, und aus eben der Ursache ist auch fg

fg der FG parallel. Da nun aber Parallelinien, wenn sie, wie hier \angle EF und FG, wie auch ef und fg, zusammen laufen, jederzeit gleiche Winkel einschließen \angle , 28. so sind auch die Winkel EFG und efg einander gleich. Es ist also eines, welchen von den Winkeln EFG oder efg man nehme, den Winkel, welchen die Flächen AB, BD mit einander einschließen, auszudrücken.

S. 45. Machen zwei Flächen einen geraden Winkel mit einander, oder, ist der Winkel EFG, welchem die Neigung der Fläche ABC gegen die Fläche CBD gleich ist, ein gerader Winkel: so steht die erstere Fläche auf der andern gerade oder perpendicular. Dieses ist die Redensart, womit der eben erwähnte Stand einer dieser Flächen an der andern ausgedrückt wird. Die 284 Zeichnung zeigt diesen Stand der Flächen, so gut es sich thun läßt, an: die Fläche AB ist auf die Fläche BD perpendicular, und der Winkel EFG ist gerade.

S. 46. Es ist in diesem Falle, wenn AB auf der BD gerade steht, eine gerade Linie, welche wie EF in der einen Fläche AB auf die F. 284. Schneidungslinie BC perpendicular gezogen wird, nicht nur auf FG perpendicular, welche in der Ebene BD auf BC perpendicular gezogen worden ist, sondern auch auf eine jede andere gerade Linie, welche man in der Fläche BD nach dem Puncte F ziehen kan. Denn daß EF auf die GF perpendicular sey, siehet man daraus, weil, wenn dieses nicht wäre, die Fläche AB auf der Fläche BD nicht gerade stehen würde, wie doch angenommen wird. Es ist demnach EF auf zwei Linien FC und FG, welche beide in der Fläche BD liegen perpendicular, folgender ist sie auch selbst auf die Fläche BD perpendicular \angle , 31. und machet also mit allen geraden Linien, welche in dieser Fläche durch das Punct F gezogen werden können, gerade Winkel.

S. 47. Man siehet auch, daß wenn eine gerade Linie EF auf der Fläche BD perpendicular steht, und man leget durch diese Linie EF eine Fläche AB, wie man im übrigen wil; diese Fläche AB auch gewiß auf die Fläche BD perpendicular zu stehen kommen werde. Denn wenn wieder BC die gerade Linie ist, in welcher die beiden Flächen einander schneiden; so ist EF auf FC perpendicular, weil FC in der Fläche BD lieget, und EF auf allen geraden Linien perpendicular steht, welche in dieser Fläche BD durch das Punct F gezogen werden können. Aus eben der Ursache ist auch EF auf FG perpendicular, wel-

X. welche man in eben der Fläche BD auf BC perpendicular gezogen, sich vorstellt: es ist demnach der Winkel EFG, welchen die zwei geraden Linien EF, FG einschließen, die auf der Schneidungslinie CB perpendicular stehen, gerade, folgender ist AB auf CD perpendicular X, 45.

F. 285. S. 48. Wiederum, wenn die Fläche AB auf der BD perpendicular steht, und man wil durch ein Punct des Durchschnittes der beiden Flächen CB, als F, eine gerade Linie auf BD perpendicular setzen: so kan diese Linie ohnmöglich ausser der Fläche AB fallen. Denn, wie wir X, 46. gesehen, so kan in der Fläche AB durch F eine gerade Linie EF gezogen werden, welche auf der Fläche BD perpendicular steht. Wenn nun auch eine Perpendicularlinie auf BD möglich wäre, welche ebenfalls durch F gieng, aber nicht in die Fläche AB fiel, FG zum Exempel, so giengen durch F zwei gerade Linien, welche beide auf BD perpendicular stünden, nemlich die EF, welche in der Fläche AB gezogen worden ist, und die FG, von welcher man annimmt, daß sie nicht in dieselbe Fläche AB falle. Wir haben aber X, 36. gesehen, daß es ohnmöglich sey, daß durch ein Punct F zwei gerade Linien EF, GF gehen, welche beide auf einer Fläche BD perpendicular stehen: also so kan die beschriebene Perpendicularlinie nicht ausser der Perpendicularfläche AB fallen.

F. 286. S. 49. Nichts ist leichter, als hieraus ferner zu schließen, daß wenn man zwei Flächen dergestalt aufrichtet, daß sie beide auf einer dritten Fläche perpendicular stehen, und einander in einer geraden Linie schneiden, diese gerade Linie auch selbst auf die Fläche, auf welcher jene perpendicular stehen, perpendicular seyn werde. Zwei Wände unserer Zimmer, welche mit einander einen Winkel machen, stehen auf dem Boden perpendicular, oder sollen doch wenigstens so stehen. Ist aber dieses, so ist auch die gerade Linie, in welcher sie einander berühren, auf den Boden perpendicular. Eben so ist es mit den beiden Flächen AB und CD welche beide auf der Fläche EF perpendicular stehen, und einander in der geraden Linie GH durchschneiden. Diese gerade Linie GH ist auf die Fläche EF perpendicular. Man siehet es dergestalt ein. Man stelle sich vor, daß man durch H eine gerade Linie ziehen sol, welche auf EF perpendicular stehe. Weil H in der Fläche CD angenommen worden, so muß diese Perpendicularlinie in die Fläche CD fallen, wie wir eben gesehen. Es ist aber eben das Punct H auch in der Perpendicularfläche AB; also wird die Perpendicular-

dicularlinie auch in diese Fläche AB fallen müssen, folachend ist dieselbe X .
den beyden Flächen AB und CD gemeinschaftlich. Nun aber haben AB und CD keine andere Linie gemeinschaftlich, als
die gerade Linie GH , in welcher sie einander schneiden: $X, 9$. Demnach
ist selbst diese Linie die Perpendicularlinie, welche auf die Fläche EF
durch das Punct H kan gezogen werden.

§. 50. Wir haben bey dieser Materie von den Flächen und Li-
nien, die auf einer andern Fläche perpendicular stehen, nur noch ein
paar Sätze übrig. Wenn eine gerade Linie AB auf einer Fläche CD ,
perpendicular stehet, und man hat mit dieser Linie AB eine andere EF
parallel ge-
Denn weil
nothwendig
sie durch B
geschehen,
sey $ABFE$
Fläche auf
linie AB gehet. $X, 47$. Es ist auch der Winkel ABF gerade, weil BF
in der Fläche CD durch das Punct B gehet, und AB auf die Fläche
 CD perpendicular ist. Nun aber sind jederzeit die zween Winkel zwi-
schen zweo Parallellinien, die von einer dritten geschnitten werden,
zweo geraden Winkeln gleich, $IV, 189$. und diese Bewandniß muß
es auch mit den beyden geraden Linien AB und EF haben, welche von
der BF geschnitten werden. Da nun aber der Winkel B selbst ein ge-
rader Winkel ist, so muß auch der bey F ein gerader Winkel seyn.
Demnach ist die Linie EF in der Fläche AF , welche auf der Fläche
 CD perpendicular stehet, dergestalt gezogen, daß sie mit dem Durch-
schnitte der beyden Flächen BF einen geraden Winkel machet. Es ist
also EF selbst auf die Fläche CD perpendicular, wie dieses von allen
auf die Art gezogenen Linien erwiesen worden ist. $X, 46$.

F. 287.

F. 288.

§. 51. Und wenn die geraden Linien AB, EF beyde auf einer
Fläche CD perpendicular stehen, so sind sie parallel. Dieses ist der
eben erwiesene Satz verkehrt gesetzt, und man kan ihn also vermit-
telst desselben ziemlich leicht einsehen. Wäre nemlich die EF , die so
wohl als AB auf der Ebene CD perpendicular stehet, dieser AB nicht
parallel, so könnte man durch das Punct F eine andere Linie ziehen,
welche der AB parallel wäre. Es sey diese Linie FG , so muß FG ,
vermöge des eben erwiesenen Satzes, auf CD perpendicular stehen.
Da nun aber gesetzt wird, es stehe auch EF auf CD perpendicular;

Nun 2

so

X. so gehen durch das Punct F zwei gerade Linien FE, FG, welche beide auf die Fläche CD perpendicular sind. Dieses ist ohnmöglich; X, 36. also ist die von der FE verschiedene Linie FG nicht der AB parallel, und weil man doch durch F eine Linie ziehen kan, welche der AB parallel ist, so muß die Perpendicularlinie EF selbst dieselbe seyn: welches zu erweisen war.

Flächen, deren eine der anderen parallel lieget.

§. 52. Nun sind noch die Parallelf Flächen zu betrachten übrig. Diese liegen dergestalt, daß sie nicht zusammen laufen, man mag sie vergrößern wie man wil, und nach welcher Seite man wil. Es ist nicht nöthig, daß die Seiten der Flächen parallel liegen, wenn sie welche haben. Denn man siehet bey der Lage der Flächen niemals auf die Seiten derselben. Und derowegen hindert es nicht, wenn eine der Flächen die Figur eines Circels, und die andere die Figur eines Viereckes hat. Es kan der Circel dem Vierecke doch parallel seyn, ob man sich zwar nicht einmal vorstellen kan, auf was Art ein Theil des Umkreises des Circels einer Seite des Viereckes parallel laufen solle. Wenn man die Fläche des Circels so wohl als die Fläche des Viereckes fortführen kan, wie man wil, ohne daß die eine die andere erreicht, so ist der Circel dem Vierecke parallel. Auf die Art ist die Oberfläche eines jeden Tischblattes, es mag dasselbe eckicht oder rund seyn, dem Boden des Zimmers, wie auch seiner Decke, parallel, oder sollte es wenigstens seyn.

F. 289.

§. 53. Eines der Kennzeichen nun, daß zwei Flächen AB und CD einander parallel liegen, ist, wenn die gerade Linie EF, welche auf einer derselben CD perpendicular stehet, auch auf die andere AB perpendicular fällt. Oder, wenn auf die Fläche CD eine gerade Linie EF, wo man wil, perpendicular aufgerichtet ist, und eine andere Fläche AB ist dergestalt geleyet, daß eben die gerade Linie EF auch auf AB perpendicular stehet; so ist die letztere Fläche AB der erstern CD parallel. Es ist dieses leicht einzusehen. Man lege durch EF eine Fläche GH, welche auf beyden der gegebenen Flächen AB, CD perpendicular stehen wird, weil die EF, durch welche man sie geleyet hat, auf beyden der eben genannten Flächen AB, CD perpendicular stehet. X, 47. Wir sehen diese Fläche GH schneide die eine der beyden Parallelf Flächen in GI und die andere in KH, so sind diese Linien beyde auf EF perpendicular, denn sie liegen in den Flächen AB, CD, auf welchen EF perpendicular stehet, und gehen durch die Puncte E und

und F. Stehen aber diese beide Linien auf EF perpendicular, so sind sie einander parallel und laufen nicht zusammen. IV, 82. Und man sieht leicht, daß wenn man die Fläche GH versetzt, man wieder andere Schneidungslinien bekomme, wie GI und KH waren, welche einander parallel laufen und niemals zusammen kommen; ja man sieht, daß von den Puncten E und F aus, nach allen Seiten dergleichen Linien liegen. Erreichen aber diese Linien, welche dergestalt von E und F aus, in den Ebenen AB und CD nach allen Seiten fortlaufen, und deren zwei jederzeit in einer gemeinschaftlichen Ebene GH befindlich sind, einander niemals, so können auch die Flächen einander niemals erreichen, man mag sie nach dieser oder jener Seite vergrößern, wie man will. Folgendes liegen die Flächen AB, CD einander parallel.

S. 54. Wäre EF gends der Winkel EFK denn spitzig; so würden und mit ihnen auch die IV, 212. Wenn also nicht zugleich auf die A. CD gewiß irgendwo auf die gerade Linie EF, so nicht zugleich auf AB; verschiedenen der gerader zogen werden können ein mit der Fläche CD durch das gegebene Punct E keine andere Fläche parallel gelegt werden als die einzige AB. Denn wenn man aus E die Perpendicularlinie EF auf CD fallen läßt, so kan man durch E nur eine einzige Fläche AB legen, auf welche EF perpendicular ist. X, 37. Diese AB also ist der CD parallel, und keine andere.

und fol-
de, son-
laufen;
und AB;
r steht;
den AB,
in, wenn
r steht,
dig mit
h E ge-
egen kan

S. 55. Und wenn zwei Flächen AB, CD parallel liegen, und man zieht zwischen denselben wo man will eine Linie EF, welche auf einer der Parallelfächen CD perpendicular steht, so muß sie auch auf die andere AB perpendicular seyn. Denn wäre dieses nicht, so wären die Flächen nicht parallel, sondern liefen irgendwo zusammen.

S. 56. Hieraus sieht man so gleich, daß zwei Flächen A und B die einer dritten C parallel sind, auch einander selbst parallel seyn müssen. Denn wenn man auf C eine Perpendicularlinie setzt, und ver-
längert sie gehörig, so muß sie so wohl auf B, als auf A perpendicu-
lar stehen, sonst wäre entweder A oder B der C nicht parallel. Ist

P. 290.

X. aber eine gerade Linie so wohl auf A als auf B perpendicular, so sind die Flächen A und B einander parallel. X, 53.

F. 291.

§. 57. Ein anderes Kennzeichen der Parallellflächen ist, wenn dieselbe wie AB, CD dergestalt liegen, daß in der einen AB zwei gerade Linien EF und FG gezogen werden können, welche in einem Puncte F zusammen laufen, und in der andern CD zwei andere HI, IK welche ebenfalls in einem Puncte I zusammen laufen, und den vorigen parallel sind, HI nemlich der FG und IK der EF. Ist dieses, so sind die Flächen AB, CD parallel. Oder anders, wenn zwei gerade Linien EF und IK parallel liegen, und dieselben zwei andere FG und HI berühren, welche einander ebenfalls parallel sind: so sind die Flächen AB und CD, welche durch jede zwei der Linien gehen, die einander dergestalt berühren, parallel.

§. 58. Auch hievon hat der Beweis nicht viel Schwierigkeit. Wie wollen auf unsern ersten Satz zurück gehen, und zeigen, daß bey den gesetzten Bedingungen eine gerade Linie gezogen werden könne, welche so wohl auf die eine als auf die andere der zwei Flächen AB, CD perpendicular sey; welches folgendergestalt einzusehen ist. Man stelle sich vor, daß aus dem Puncte F die Linie Fi auf CD falle, welche auf die Fläche AB perpendicular ist, und folgendes mit den beyden Linien EF und FG gerade Winkel machet. Hat nun diese Fi die Fläche CD in i erreicht, so ziehe man durch i in der Fläche CD die Linie ik mit der IK und ih mit der IH parallel. Weil nun also ik der IK parallel lieget, aber auch gleich Anfangs angenommen worden, daß auch EF der IK parallel sey: das ist, weil beyde gerade Linien ik EF der IK parallel laufen, so ist auch EF der ik parallel. Denn dieses ist von solchen Linien X, 27. überhaupt gezeigt worden. Und da also die Parallellinien EF und ik von der geraden Linie Fi geschnitten werden, und EFi ein gerader Winkel ist, so ist auch der Winkel Fik gerade. IV, 139. Eben dieser Beweis findet auch bey den Linien FG und ih statt. Sie sind beyde der Linie HI, und folgendes einander, parallel. Der Winkel GFi ist gerade, folgendes auch der Winkel Fih. Es stehet demnach die gerade Linie Fi auf den beyden Linien ik und ih, welche in der Ebene CD liegen, perpendicular. Sie ist also auch auf diese Ebene CD selbst perpendicular, und weil man sie gleich Anfangs auf die Fläche AB perpendicular gesetzt hat, so ist sie auf beyden Flächen AB und CD perpendicular. Demnach sind die beyden Flächen AB, CD auf welchen die einzige Linie Fi perpendicular stehet, einander parallel. X, 53.

§. 59. Sind

§. 52. Sind nun nach diesen Gründen zwei Flächen AB und CD einander parallel geleyet worden, und es schneidet sie beyde eine dritte Fläche EF, in den geraden Linien GH und IK; so sind diese Schnitte einander parallel. Dieses kan ohne Schwierigkeit eingeesehen werden. Die Kennzeichen der Parallellinien sind, daß sie in einer Fläche liegen, und doch niemals zusammen laufen, wie man sie auch verlängere. Beyde Kennzeichen haben die Schnitte GH und IK. Sie liegen beyde in der Ebene EF: und daß sie nicht zusammen laufen, siehet man daher, weil sie auch in den Ebenen AB und CD liegen, welche zusammen laufen müßten, wenn die Linien GH und IK zusammen laufen sollten. Das letztere gehet nicht an, weil die Flächen AB und CD parallel sind, also können auch die Linien GH, IK nicht zusammen laufen.

§. 60. Es erhellet hieraus so gleich, daß wenn man zwischen zwei Parallellflächen AB, CD zwei gerade Linien GI, HK einander parallel leget; diese Linien, GI, HK auch einander gleich seyn werden. Denn man lege durch diese Parallellinien die Fläche EF, wie allezeit geschehen kan, und schneide vermittelst derselben die Parallellflächen AB, CD in GH und IK: So sind diese Schnitte, GH, IK einander parallel. Da man also gesetzet, es sey auch GI der HK parallel, so ist das Viereck GK ein Parallelogrammum, und es sind in demselben die einander entgegen gesetzeten Seiten gleich $GI=HK$, welches wir erweisen sollten. Man siehet aber zugleich, daß auch GH der IK gleich sey.

§. 61. Ferner ist aus eben dem Satze nachfolgendes zu schließen: wenn zwei Flächen AB, CD einander in BC schneiden, und man schneidet sie nochmals durch zwei andere Flächen EFG und HIK, die einander parallel laufen, in FE, FG, und HI, IK: so sind die Winkel EFG, und HIK einander gleich. Denn weil die Fläche AB die beyden Parallellflächen EFG, HIK in EF und HI schneidet, so sind die Schnitte EF, HI parallel: und weil eben die Parallellflächen EFG, HIK auch von der Fläche CD geschnitten werden, so sind auch die Schnitte FG und IK parallel; und werden demnach die Winkel EFG und HIK von solchen Linien eingeschlossen, deren zwei und zwei einander parallel liegen: wir haben oben X, 28. gesehen, daß dergleichen Winkel jederzeit einander gleich sind.

§. 62. Noch einen einzigen Satz müssen wir bey dieser Sache zum Behufe des folgenden merken, wie denn diese ganze Betrachtung, wel-

X.
Abschnitt.
F. 292.

F. 293.

X. **Schnitt.** welche wir von den Flächen und ihren Lagen angestellet, hauptsächlich dazu dienen sol, daß wir dasjenige, so von den Körpern zu sagen seyn wird, deutlicher einsehen können. Wir stellen uns drey Flächen vor, welche einander parallel liegen, AB, CD und EF; In ihrer Entfernung von einander ist nichts gelegen: Die mag so groß oder so klein seyn, als man will. Wir ziehen zwey gerade Linien GI und KM zwischen den äußersten dieser Flächen AB und EF, welche von der mittleren CD in H und L geschnitten werden. Es ist im übrigen frey diese Linien zu ziehen wie man wil, und wird nicht erfordert, daß sie beyde in einer Fläche liegen. Wenn dieses alles geschehen ist, so sind die Theile der Linien, welche zwischen den Flächen auf einerley Art liegen, einander proportional, und man hat $GH:HI=KL:LM$.

S. 63. Denn wenn man eine dritte Linie KI von dem obersten Punkte der einen Linie K nach dem untersten Punkte der zweyten I zieht, und das Punct, in welchem diese dritte Linie KI die mittellste Fläche CD durchstichet, mit N bezeichnet, auch ferner in der obersten Fläche AB die GK zieht: so liegen X. 17. die drey Seiten des Dreyeckes KGI in einer Ebene, welche die Fläche CD in HN durchschneidet, und die Fläche AB in GK. Weil nun die Flächen AB und CD parallel sind, so sind die Schnitte GK und HN ebenfalls parallel, X. 59. und es ist in dem Dreyecke KGI mit der Seite G-K die gerade Linie HN parallel gezogen. Es ist demnach die Proportion $GH:HI=KN:NI$, richtig. Denn man kan bey allen Dreyecken, da man mit der einen Seite derselben eine Parallellinie gezogen, dergestalt schliessen. V. 12. Ziehet man aber auch IM in der Fläche EF, und bemerket die Linie NL, in welcher die Fläche des Dreyeckes KIM die Fläche CD schneidet: so ist bey dem Dreyecke KIM alle dasjenige richtig, so eben von dem Dreyecke GIK gewiesen worden. Demnach haben wir hier $KL:LM=KN:NI$. Vergleichen man aber diese Proportion mit der vorigen $GH:HI=KN:NI$, so siehet man, daß in der ersten die Verhältniß $GH:HI$, und in der zweyten die Verhältniß $KL:LM$ der Verhältniß $KN:NI$ gleich gesetzt wird, welche zwey Verhältnisse demnach einander selbst gleich seyn müssen. Also ist die Proportion $GH:HI=KL:LM$ richtig, und diese ist eben diejenige, welche wir in dem Satze angegeben, und erweisen solten.

Zweiter Abschnitt.

Von den Körpern und deren Oberflächen.

Allgemeine Begriffe.

§. 1.

Sie sind also nunmehr bis an die Betrachtung solcher Gröſſen, welche nicht nur in die Länge und Breite, sondern auch in die Tiefe ausgedehnet sind, gekommen. Dergleichen sind alle natürliche Körper, welche wir vor uns haben. Allein diese Körper haben auſſer der erwähnten Ausdehnung noch eine Menge anderer Eigenschaften, welche ein Naturkündiger zu untersuchen hat, die aber vor die Geometrie nicht gehören. Dergleichen sind das Gewicht der Körper, ihr Vermögen sich zu bewegen, andere Körper anzustoſſen, oder ihnen zu widerstehen, und was dergleichen Dinge mehr sind; bey welchen allen man zwar ebenfalls auf die Gröſſe sehen kan, wie bey der Ausdehnung; und welche deswegen, wie die Linien und Oberflächen, und die Ausdehnung der Körper selbst, mit einander verglichen werden können. Aber alle diese Eigenschaften gehören hieher nicht, und man betrachtet in der Geometrie einen Körper nicht weiter, als in so ferne er ein ausgedehnetes Wesen ist. Das übrige alles, so bey demselben vorkommet, wird hier in Gedanken von ihm abgesondert.

§. 2. Die Ausdehnung eines Körpers ist mit der Ausdehnung des Raumes, welchen er füllet, in allen Stücken einerley, das ist, so wohl in Ansehung der Gröſſe, als auch in Ansehung der Figur: und der Begriff des einen ist von dem Begriffe des andern nicht verschieden. Eben deswegen, weil der Körper einen Raum von dieser oder jenen Gröſſe, und von dieser oder jenen Figur, füllet, schreibet man ihm diese Gröſſe und diese Figur zu. Er würde gröſſer seyn, wenn er einen gröſſern Raum füllte; und eine andere Gestalt haben, wenn er einen Raum von einer andern Figur füllte. Eine Kugel ist deswegen eine Kugel, weil sie einen von allen Seiten gleich gerundeten Raum füllet; und würde keine Kugel seyn, wenn sie einen eckigten Raum einnahm. Allein, da ein Körper, auſſer seiner Ausdehnung und Figur, noch viele
 E r r an

XI. andere Eigenschaften hat, welche sich nicht auf die bloße Ausdehnung gründen: so begreifen wir bey dem Raume, welchen der Körper einnimmet, ausser der Ausdehnung und demjenigen, so sich auf derselben unmittelbar gründet, sonst gar nichts. Und wir können also, wie bereits Anfangs erinnert worden, sagen, daß diejenigen Grössen, welche von allen Seiten ausgedehnet sind, und welche wir noch zu betrachten haben, nichts anders seyn, als der Raum, welchen die Körper einnehmen.

§. 3. Ob wir zwar also uns der gewöhnlichen Redensarten bedienen, und die nach allen Seiten, und also in die Länge, Breite und Tiefe ausgedehnete Grössen, Körper nennen werden: so wird doch unter dieser Redensart nichts anders, als dieser Raum derselben, zu verstehen seyn. Oder will man ja Körper nehmen, so wird man auf die bloße Ausdehnung derselben Acht haben, und die übrigen Eigenschaften derselben alle eben so wohl von den Körpern absondern müssen, als ob sie zu den Körpern gar nicht gehörten. Was bleibt aber nach dieser Absonderung übrig, als wieder der bloße Raum, den die Körper füllen?

§. 4. Alle Körper sind in Oberflächen eingeschlossen, und diese sind entweder eben oder gekrümmt, IV. 34. Die ebenen Oberflächen sind nach ihrer Figur und Grösse genugsam betrachtet worden: wohl aber wird noch ein und anderes, von der Lage derselben, bey verschiedenen Körpern, anzumerken seyn. Was aber die gekrümmten Oberflächen anlangt, so stehet deren Betrachtung uns noch ganz vor: wie auch die Betrachtung einiger Linien, welche in diesen Oberflächen können gezogen werden.

§. 5. Es sind der Körper selbst unendlich viele, und unter denselben sind die meisten in gekrümmte Oberflächen eingeschlossen. Von noch viel mehreren Arten sind die Linien, welche in diesen Oberflächen können gezogen werden. Wir werden uns hier also gar sehr einschränken müssen, wenn wir unsers Zweckes nicht verfehlen wollen, nur die ersten Anfangsgründe, und unter denselben die nöthigsten und nützlichsten beyzubringen. Dieses wird geschehen, wenn wir auch hier keine andere Oberflächen betrachten, als die sich auf die Beschreibung des Kreises und der geraden Linie gründen; und keine Körper als diejenigen, welche in dergleichen Oberflächen eingeschlossen sind. Dadurch werden der Körper, welche wir zu betrachten haben, sehr wenige; und wir

wir werden sehen, daß dieselbe, nach ihren Haupteigenschaften, sich alle in drey Classen bringen lassen.

XI.
Abschnitt.

§. 6. Wir werden von der Grösse der Körper anfangen, und zeigen, wie die Körper von den erwähnten Figuren, welche nach und nach deutlich beschrieben werden sollen, unter allen Umständen und verschiedenen Einschränkungen derselben, mit einander zu vergleichen sind. Der Grundsatz, dessen wir uns dabey bedienen werden, ist eben derjenige, dessen wir uns bey der Vergleichung der ebenen Figuren bedient haben IX, 4; nur muß derselbe so ausgedrückt werden, daß er sich auch vor die Körper schicket.

§. 7. Es sind AB und CD zwei ebene Flächen, die einander parallel liegen, und zwischen denselben stehen zwey Körper EF, GH dergestalt, daß sie beide von der Fläche AB bis an die CD reichen, und sich in diesen Flächen mit Punkten, Linien oder ebenen Flächen endigen. Sonst kan man diese Körper will, rund oder nach Belieben EF und GH beide, vermittelst ten worden; welche man den I und daß durch diesen Schnitt in LM zum Vorschein gekommen L M einander gleich, und ist die mit einer Fläche, die der AB p so sagen wir, es seyen die beiden Körper EF und GH einander gleich, eben wie wir dieses von den ebenen Figuren; aus eben dergleichen Kennzeichen, geschlossen haben.

F. 295.

Figur man
se Körper
geschnit-
geführt,
n I K und
uren I K;
ie Körper
nan will:

§. 8. Es ist hierbey zu bemerken, daß eben nicht erfordert wird, daß die Schnitte IK, LM, oder eigentlicher zu sprechen, die Figuren IK, LM, welche durch den Schnitt hervor kommen, einander auch ähnlich seyn. Wenn sie nur einander gleich sind, so mag die eine rund, die andere eckigt seyn, oder sie mögen sonst einander unähnlich seyn wie sie wollen; die Körper sind bey den gesetzten Bedingungen dennoch gleich. Auch wird nicht erfordert, daß alle Schnitte des einen Körpers EF einander gleich seyn sollen; ja es wird nicht einmal erfordert, daß die verschiedenen Schnitte dieses Körpers EF einander ähnlich seyn. Die oberen Schnitte dieses Körpers EF können rund seyn, und die unteren eckigt. Es können die oberen klein seyn, und die unteren groß. Wenn nur ein jeder Schnitt, wie I K, dem Schnitte L M

Fig 2

gleich

XI. gleich ist, welcher LM von der AB oder CD eben so weit als IK absteht, und so wohl als IK denselben parallel lieget, so sind die Körper EF und GH einander gleich.

§. 9. Da wir diesen Satz als einen eigentlichen Grundsatz angeben, so ist nicht nöthig, etwas zu dem Beweise desselben anzubringen. Es wäre kein Grundsatz, wenn er Beweis bedürfte. Zur Erleuterung desselben kan aber alles dasjenige dienen, so wir bey der vorigen Anwendung desselben IX, 6. gesagt haben. Welcher von den beiden Körpern EF, GH ist der grössere, und welcher ist der kleinere, wenn sie ungleich sind, und worinnen lieget der Grund ihrer Ungleichheit? Wenn man die Entfernung der Fläche AB von der Fläche CD vor die Höhe der Körper annimmt, wie man allerdings thun kan; so sind diese Körper in die Höhe oder Tiefe gleich ausgedehnet, weil sie beide von einer dieser ebenen Flächen AB bis an die andere CD reichen. Ihre Ausdehnungen in die Längen und Breiten aber, in einem jeden Abstände von der Fläche AB, messen die Figuren, dergleichen IK und LM sind. Denn diese Ausdehnungen müssen der Fläche AB parallel genommen werden, und die eben erwähneten Figuren IK, LM liegen der AB parallel. Sind nun diese Figuren aller Orten einander gleich, so sind auch die Körper EF, GH aller Orten in die Längen und Breiten gleich ausgedehnet. Es ist nemlich EF bey IK in die Länge und Breite, oder mit einem Worte, der AB parallel, eben so weit ausgedehnet als GH bey LM nach eben diesen Strecken, oder der AB parallel, ausgedehnet ist, und so ist es überall. Wie kan also einer dieser Körper EF, GH grösser seyn als der andere?

Erste Art der Körper.

§. 10. Wir werden diesen Satz am allerleichtesten auf die erste Art unserer Körper anwenden können, von welchem wir vor allen Dingen nunmehr einen deutlichen Begriff geben müssen. Man beschreibe eine geradlinichte und ebene Figur ABCDE, von wie viel Seiten man wil, gänzlich, nach Belieben. An die Spitze eines der Winkel dieser Figur A setze man eine gerade Linie von beliebiger Länge AF, so daß sie nicht in die Ebene falle, in welcher die Figur ABCDE lieget, sondern auf dieser Ebene, nach Belieben, gerade oder schief stehe. Durch B, die Spitze des zweiten Winkels der Figur ABCDE, ziehe man die gerade Linie BG der vorigen AF parallel, und eben dieses mache man bey der Spitze C des dritten Winkels, wie auch bey allen übris

F. 296.

297.

übrigen. Diese gerade Linien AF, BG, CH, DI, EK, werden einander alle parallel liegen, weil eine jede derselben der zuerst gezogenen AF parallel lieget, X, 27. Und man kan sich also durch AF, BG eine ebene Fläche vorstellen, wie auch durch BG und CH eine andere, welche mit der vorigen in BG zusammen laufen wird, und durch CH und DI die dritte, welche die zwote in CH schneidet, und so rings herum. Diese Flächen sind oben nicht geschlossen. Denn wir haben die Längen der Linien AF, BG, CH noch nicht bestimmt, und also noch viel weniger die Flächen FABG, GBCH und die übrigen, bey F, G, H geschlossen. Dieses aber nunmehr zu thun, und zugleich den Körper, welchen wir beschreiben wollen, von allen Seiten einzuschließen, lege man durch das in der AF nach Belieben angenommene Punct a eine andere ebene Fläche der Figur ABCDE parallel, welche von allen Seiten an die Flächen anstosse, in welchen die Parallellinien AF, BG, wie auch BG, CH und so fort, liegen: so ist der Körper ABCDE a b c d geübrig eingeschränket.

XI.
Abchnitt.

S. II. Und die Oberflächen, welche ihn einschließen, sind nachfolgende: Erstlich, die nach Belieben angenommene geradelinichte Figur ABCDE, welche wir die eine Grundfläche nennen wollen, weil sie der ebenen Fläche a b c d e gleich und ähnlich ist, welche dannenhero mit Recht die zwote Grundfläche kan genennet werden. Daß dieses sey, erhellet folgender massen: Man hat die Ebene a b c d e der ABCDE parallel geleyet, und diese beiden Flächen werden in AB, a b von der Fläche geschnitten, in welcher die Parallellinien AF, BG liegen. Diese Linien also a b, AB liegen einander parallel, X, 19. Weil aber auch Aa, Bb einander parallel liegen, so ist A b ein Parallelogrammum, und ab der AB gleich, IV, 18. Auf eben die Art erhellet, daß auch b c der BC parallel liege, daß BC ein Parallelogrammum, und b c der BC gleich sey, und eben dieses ist rings herum richtig. Der CD ist die c d parallel und gleich, der DE die d e, und der EA die e a. Hieraus aber folget, daß auch der Winkel a b c dem Winkel ABC gleich sey, und der Winkel b c d dem Winkel BCD. Denn die Winkel, deren Seiten einander parallel sind, sind allezeit gleich, es mögen diese Seiten übrigen liesen wie sie wollen, X, 28: und aus eben dem Grunde ist b c d = BCD und c d e = CDE, und so ferner. Demnach sind die Winkel der Figur a b c d e den Winkeln der Figur ABCDE gleich, wie sie auf einander folgen; und die Seiten dieser beiden Figuren, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, sind einan-

XI. **Abchnitt.** der ebenfalls gleich. Also sind die Figuren gleich und ähnlich. Und aus eben diesem Beweise erhellet, daß die Körper der ersten Art, ausser den Grundflächen, um und um in Parallelogramme Ab, Bc, Cd &c. eingeschlossen seyn, deren an der Zahl so viele sind, als viele Seiten die Grundfläche $ABCDE$ hat. Diese Parallelogramme heißen die Seiten des Körpers. Der dergestalt beschriebene Körper selbst aber wird ein Prisma genennet.

§. 12. Wir haben die Beschreibung dieses ersten Körpers deswegen etwas weitläufig gemacht, damit zugleich erhellen möge, daß derselbe möglich sey, welches nicht bey einer jeden Beschreibung so leicht einzusehen ist, sondern öfters erst muß erwiesen werden. Nunmehr können wir ein Prisma kürzer beschreiben, indem wir sagen, ein Prisma sey ein Körper, welcher von zwei ebenen und geradelinigten Figuren, die einander parallel liegen, $ABCDE, abcde$, und übrigens von Parallelogrammen beschlossen wird. Denn daß das übrige alles aus diesen Gründen fließe, ist aus der weitläufigeren Beschreibung leicht einzusehen.

§. 13. Da das Punct a , durch welches man die Fläche $abcde$ ge-
 leget hat, nach Belieben angenommen worden ist, \sim XI, 10. so folget daß, wenn man anderswo in der Linie AF ein Punct genommen, und durch dasselbe eine Fläche so geleyet hätte, wie $abcde$ durch a geleyet worden ist; die Figur dieser Fläche ebenfalls der $ABCDE$ gleich und ähnlich geworden wäre. Es hindert nichts, daß dieses nicht auch nunmehr geschehe, nachdem man, vermittelst der $abcde$, das Prisma geschlossen hat. Es wird aber durch eine dergleichen Fläche, wenn sie durch ein Punct zwischen A und a durchgehet, das Prisma geschnitten: und man muß demnach schließen, daß, wenn man ein Prisma dergestalt schneidet, daß der Schnitt der Grundfläche $ABCDE$ parallel wird, dieser Schnitt auch der Grundfläche gleich und ähnlich seyn werde.

§. 14. Die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee sind einander alle gleich, weil die Seiten des Prisma Parallelogrammen sind; und also $Aa = Bb = Cc$ und so fort: aber die Winkel der Parallelogrammen Ab, Bc, Cd sind einander nicht nothwendig gleich, und zwar sind diese Parallelogramme niemals alle gleichwinklicht, wenn die Linien Aa, Bb, Cc auf der Grundfläche AD schief stehen, wie man leicht siehet. Stiehet aber Aa auf der Grundfläche AD perpendicular, so stehen auch alle übrige

übrige dergleichen Linien Bb, Cc, Dd, Ee auf den Grundflächen AD, ad perpendicular, weil sie einander parallel sind, X, 50. und der Winkel \angle AB ist gerade, wie auch die Winkel bBC, cCD und so fort. Demnach sind in diesem Falle die Vierecke Ab, Bc, Cd alle geradewinklicht, IV, 203. und haben noch dazu einerley Höhe. Ein dergleichen Prisma in welchem Aa auf der Fläche AD gerade steht, wird ein gerades Prisma genant, die übrigen alle sind und heißen schiefe Prismen. Die 297 Zeichnung stellet ein gerades, und die 296 ein schiefes Prisma vor.

XI.

Abchnitt.

§. 15. Dieses ist die erste Eintheilung dieser Körper in gerade und schiefe. Eine andere Eintheilung gründet sich auf die Zahl der Seiten der Grundfläche, welche allezeit mit der Zahl der Seiten des Prismas einerley ist. Man nennet aus dieser Betrachtung die Prisma dreys, vier-, viel-seitig. Die Bedeutung ist selbst aus dem Namen klar.

§. 16. In einem Prisma von vier Seiten können die Grundflächen Parallelogramme seyn: Da nun die Seiten eines jeden Prismas ebenfalls Parallelogramme sind, so ist ein dergleichen Körper in sechs Parallelogramme eingeschlossen. Denn der Seiten sind viere, und die zwö Grundflächen dazu sind sechs Parallelogramme. Ein Prisma von dieser Art heißet ein Parallelepipedum. Es kan dasselbe gerade oder schief seyn wie ein jedes anderes Prisma. Die 298 Zeichnung stellet ein gerades Parallelepipedum vor, denn mit dem schiefen werden wir nichts zu schaffen haben.

§. 17. In einem jeden Parallelepipedum sind jede zwö Seiten, die einander entgegen gesetzt sind, einander gleich und parallel. Dieses ist von den Grundflächen ABCD, EFGH nicht nöthig zu erweisen, weil es in dem Begriffe eines jeden Prismas liegt. Daß aber auch die Seite ABFE der Seite DCGH gleich und parallel sey, erhellet folgender gestalt. AC ist ein Parallelogrammum, und folgendes ist AB der DC gleich und parallel. Nun ist auch AE der DH gleich und parallel, denn dieses ist von einem jeden Prisma richtig. Also ist der Winkel BAE dem Winkel CDH gleich, X, 28. und folgendes das Parallelogrammum BE gleich dem Parallelogrammum CH, weil in denselben die gleichen Winkel BAE, CDH von gleichen Seiten eingeschlossen werden. Ueber dieses sind die Flächen, in welchen diese Seiten BE, CH liegen, einander auch parallel, weil die eine durch die zwö geraden Linien AB, AE gehet, die in A zusammen stossen, und welche

XI. welche den geraden Linien DC, DH parallel sind, die in der Fläche
 Abchnitt. CH liegen. X, 57. Ist nun AC ein rechtwinkliges Viereck und der
 Körper EC gerade, so sind alle Parallelogramme, welche ihn einschlies-
 sen geradewinklig. Denn die Seiten eines jeden geraden Prisma
 sind rechtwinklige Vierecke. XI, 14.

§. 18. Man kan also bey einem jeden Parallelepipedium diejeni-
 gen einander entgegen gesetzten Seiten als die Grundflächen betrach-
 ten, welche man wil, und hernach diesen Körper als ein Prisma anse-
 hen; welches bey einem Prisma von einer andern Art nicht angehet.
 Denn wenn man die Vierecke AH und BG vor die Grundflächen an-
 nimmt, so sind dieselben gleich und ähnlich, und der Körper AG ist
 übrigens in die Parallelogramme AF, EG, HC, AC eingeschlossen.
 Dieses aber sind die allgemeinen Kennzeichen eines jeden Prisma. XI, 12.
 Und sind die sechs Seiten des Parallelepipedium geradewinklig, so ist
 dasselbe allezeit ein gerades Prisma, man mag unter den sechs Seiten
 desselben vor die Grundflächen annehmen, welche man wil.

F. 299. §. 19. Ist nun in einem solchen geraden Parallelepipedium, als
 wir eben beschrieben haben, die Grundfläche AB nicht allein ein gera-
 dewinkliges Viereck, sondern auch ein Quadrat, und ist über dieses
 die Seite BC der Seite des Quadrats AD gleich, so wird es in sechs
 gleiche Quadrate eingeschlossen. Denn da bey einem jeden Prisma
 die zwei Grundflächen einander gleich und ähnlich sind, so muß auch
 hier die der AB entgegen gesetzte Grundfläche ein der AB gleiches Qua-
 drat seyn. Und daß die Seiten, welche den Körper rings herum ein-
 schliessen bey der gesetzten Bedingung, daß BC so groß sey als BD =
 AD nicht nur geradewinklige Vierecke, sondern auch Quadrate und
 einander gleich sind; siehet man bloß aus der Figur gar leicht. Ein
 solcher Körper heisset ein Würfel oder ein Cubus. Und diese sind
 die Arten der Prisma, welche mit besonderen Namen zu belegen waren.

F. 300. §. 20. Es sind aber dieses die Körper noch nicht alle, welche unter
 die erste Classe derjenigen, die wir uns zu betrachten vorgesetzt haben, gehö-
 ren. Man stelle sich zween Cirkel vor, AB und CD die einander gleich
 301. sind, und parallel liegen; deren Mittelpuncte sind E und F. Man
 ziehe diese Mittelpuncte vermittelst der geraden Linie EF zusammen,
 und stelle sich vor, daß an dem Umkreise der Cirkel AB, CD eine ge-
 krümmete Oberfläche ringes herum dergestalt anliege, daß, wenn man
 durch ein Punct derselben, wo man es annehmen wil, A, eine gerade
 Linie

Linie AC, der EF parallel ziehet, dieselbe ganz in die gekrümmete Oberfläche AEDC falle, so hat man den Begriff einer Walze oder eines Cylinders ABDC. Dieses ist der Körper welchen wir noch mit dem Prisma unter eine Classe bringen müssen.

XL.
Wahrscheinlich

S. 21. Denn es kommt der Cylinder mit dem Prisma in allen Stücken überein, außer daß bey dem Prisma die Grundflächen eine geradelinichte Figur, und bey dem Cylinder ein Cirkel ist. Die entgegen gesetzeten Grundflächen sind auch hier einander gleich. Es kan auch hier eine Linie AC, welche der EF parallel laufet, gerade oder schief auf den Grundflächen AB, CD stehen, weil man die Cirkel AB, CD, übrigens legen kan, wie man wil, wenn nur ihre Flächen einander parallel bleiben. Es kan also ein Cylinder ebenfalls gerade oder schief seyn. Er ist schief, wenn EF auf den Grundflächen AB, CD schief stehet, wie in der 300 Zeichnung und gerade, wenn diese EF, auf die Grundfläche perpendicular ist, wie in der 301. Alle gerade Linien, die wie AC, DB zwischen den Grundflächen der Cylinder der EF parallel gezogen werden, sind hier ebenfalls gleich, weil diese Gleichheit bloß daraus folget, daß die Grundflächen AB, CD einander parallel liegen. X, 60. Man pfleget die gerade Linie EF, welche zwischen den Mittelpuncten der Grundcirkel AB, CD lieget, die Axe des Cylinders zu nennen.

F. 300.
301.

F. 302.

S. 22. Daß aber auch ein Cylinder von einer jeden Fläche, welche der Grundfläche desselben parallel lieget, dergestalt geschnitten werde, daß die Figur, die durch den Schnitt hervor gebracht wird, der Grundfläche gleich und ähnlich wird, wie dieses ebenfalls von dem Prisma gezeigt worden ist, XI, 13. siehet man nachfolgender gestalt. Gesezet der Cylinder AD sey vermittelst einer der AB parallel laufenden Fläche geschnitten, und der Schnitt sey GH, so ist zu erweisen daß GH ein Cirkel, und dem AB gleich sey. Man nehme in dem Umkreiße des Cirkels AB das Punct I nach Belieben, und ziehe den Halbmesser EI; durch I ziehe man eine gerade Linie IK der EF parallel, welche ganz in der gekrümmten Oberfläche des Cylinders liegen wird: XI, 20. folgendes gehet diese Linie durch K in den Umkreis des Cirkels CD, und FK ist ein Radius dieses Cirkels CD: EK aber ist ein Parallelogrammum, und dieses Parallelogrammum schneidet die Ebene GH nach einer geraden Linie, welche wir mit LM bezeichnen haben. Das Punct M dieser LM lieget in dem Umkreiße des Schnittes GH, weil es in der geraden Linie IK lieget, die ganz in die

XI. gekrümmete Oberfläche des Cylinders gefallen; und L lieget in der
 Abschnitt. Axe EF. Es ist aber LM der EI parallel, weil die Flächen GH
 und AB parallel sind, welche beyde von der Fläche EK geschnitten
 werden, X, 59. und weil EK ein Parallelogrammum ist, so ist auch
 LM dem Radius EI des Cirkels AB gleich. Das Punct L bleibt be-
 ständig einerley, man mag das Punct I in dem Umkreise AB genom-
 men haben, wo man wil, weil dadurch EF nicht verändertet wird.
 Nachdem man aber I da oder dort in dem Umkreise AB ausnimmet,
 fällt auch M in ein anderes Punct des Umkreisses GH; aber bestän-
 dig ist eine jede LM dem Radius des Cirkels AB gleich. Also sind
 alle Puncte des Umkreisses des Schnittes GH von dem Puncte L
 gleich weit entfernt: dieser Schnitt GH ist demnach ein Cirkel, und
 weil sein Radius LM der EI gleich ist, so ist auch dieser Cirkel GH
 dem AB gleich.

§. 23. Wegen diesen gemeinschaftlichen Eigenschaften nun brin-
 gen wir alle bisher erklärte Körper unter eine Classe, und wir werden
 sie, die Weitläufigkeit desto mehr zu vermeiden künftighin Körper
 der ersten Art nennen, und also unter den Körpern der ersten Art
 alle Arten der Prisma und der Cylinder verstehen. Es haben diese
 Körper eine grosse Gemeinschaft mit dem Parallelogrammum, und die
 meisten Sätze, welche bey der Vergleichung der Parallelogrammen ge-
 wiesen worden, sind von denselben richtig, wie wir gleich sehen werden.

§. 24. Die Höhe eines Körpers von dieser ersten Art ist die Ent-
 fernung der einander entgegen gesetzten Grundflächen desselben: das
 ist, die gerade Linie zwischen diesen Grundflächen, welche auf denselben
 perpendicular stehet. Man siehet leicht, daß nichts daran gelegen sey,
 wo man diese Perpendicularlinie ziehe, weil alle gerade Linien, die zwi-
 schen Parallelsflächen liegen, und auf eine derselben perpendicular stehen,
 einander gleich sind. X, 60. Es ist auch dieses hier eben so wie bey dem
 Parallelogrammum; nur hat man hier Grundflächen, und bey den
 Parallelogrammen Grundlinien.

**Wie ein Körper der ersten Art mit einem andern solchen
 Körper verglichen wird.**

§. 25. Wenn nun zween Körper der ersten Art AB und CD glei-
 che Grundflächen und gleiche Höhen haben; so sind sie einander gleich,
 sie mögen im übrigen beschaffen seyn wie sie wollen. Denn weil die
 C

Körper einerley Höhe haben, so kan man sie beyde zwischen zwey Parallellflächen dergestalt setzen, daß die Grundflächen der Körper in diese Flächen fallen. Wir setzen, es sey dieses geschehen, und die Parallellflächen seyn AE, FG. Man schneide nunmehr die Körper beyde vermittelst der Ebene HI, welche den vorigen AE, FG ebenfalls parallel sey, wo man wil. Wenn nun dadurch die Schnitte HK, LM zum Vorschein kommen; so ist HK der Grundfläche FB, und LM der ND gleich: XI, 13. und, da diese Grundflächen FB, ND einander gleich sind, so sind auch die Schnitte HK, LM einander gleich. Dieses aber, daß dergleichen Schnitte, als HK, LM sind, einander beständig gleich fallen, war das Kennzeichen, aus welchem auf die Gleichheit der Körper beständig konnte geschlossen werden. XI, 7. Man wird derothalben in dem gegenwärtigen Falle eben den Schluß machen, und sagen müssen, die Körper der ersten Art AB, CD, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, seyn einander gleich.

§. 26. Man siehet auch leicht ein, daß die Theile AK und CM wie auch HB und LD in welche die Körper AB, CD vermittelst der Ebene HI zerschnitten worden, einander gleich sind. Denn sie haben ebenfalls gleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Ubrigens werden wir unsere Beweise von dieser Art Körper künftig nur auf diejenigen besondern Arten derselben einschränken können, welche man sich am leichtesten vorstellen kan, nemlich auf die geraden Prisma und Cylinder, und die Beweise werden doch von allen Körpern dieser Art, welche eben so große Grundflächen und Höhen haben, richtig seyn, so lange wir bey den Körpern nichts als ihre Größe betrachten werden. Weil man nemlich an die Stelle eines jeden Körpers von dieser Art einen anderen setzen kan, welcher eine eben so große Grundfläche und Höhe hat, als jener, ohne daß dadurch in der Größe des Körpers etwas veränderet werde.

§. 27. Wenn zweyen Körper der ersten Art AB und CD gleiche Grundflächen haben, so verhalten sie sich wie ihre Höhen, das ist; wenn AE die Höhe des Körpers AB ist, und CF ist die Höhe des Körpers CD, so ist $AB:CD=AE:CF$. Denn, nachdem man die beyden Körper auf eine Ebene ED gesetzt hat, so führe man die Oberfläche des kleineren AG fort, und schneide dadurch den grösseren Körper in HI. Weil nun die Körper AB und HD gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, so sind sie einander gleich, und man kan an statt des AB den Körper HD, und an statt der Höhe AE die Höhe

XI. HF nennen. Nun theile man die Höhe CF in eine beliebige Zahl *n* gleiches Theile: so fällt entweder ein Theilungspunct in H oder nicht. Es mag dieses oder jenes seyn, so stelle man sich vor, daß man durch alle Theilungspuncte der Linie CF ebene Flächen der FD parallel gelegt habe, welche folgendes auch der HI parallel seyn werden: so hat man dadurch den Körper CD in eine Zahl gleicher Theile zerschnitten, welche so groß ist als die Zahl der gleichen Theile in der geraden Linie CF. Und, fällt H in ein Theilungspunct der Linie CF, so fällt auch die Ebene HI, welche vom CD den Körper HD abschneidet, in eine der theilenden Flächen, zwischen welcher und der untersten FD so viele theilende Flächen liegen, als viele Theilungspuncte zwischen H und F fallen: und eben dieses ist auch richtig, wenn H nicht in ein Theilungspunct der FC, und folgendes die Fläche HI in keine der Flächen fällt, welche den Körper CD theilen. Es liegen auch in diesem Falle zwischen H und F so viele Theilungspuncte, als viele theilende Flächen zwischen HI und FD liegen, und so ist es immer, man mag der gleichen Theilchen in der CF so viele gemacht haben, als man wil.

§. 28. Wir sind also wieder an dem allgemeinen Kennzeichen der Proportion, VI, 61. welches wir bereits zu verschiedenen malen angewendet haben. Denn wenn man die Zahl der gleichen Theilchen in der Höhe CF sich unter *m* vorstellt, und nennet eine jede andere Zahl solcher Theile *n*, so ist $\frac{1}{m}$ CF eines der Theilchen, in welche man die CF getheilet, und $\frac{1}{m}$ CD ist eines der Theilchen, in welche man den Körper CD zerschnitten, $\frac{n}{m}$ CF aber bedeutet eine jede Zahl der Theile der CF, und $\frac{n}{m}$ CD bedeutet eben die Zahl der Theile des Körpers CD. Bey der Theilung welche die Figur vorstellet ist $m=6$, und $\frac{n}{m}$ kan $\frac{1}{6}$ oder $\frac{2}{6}$ oder $\frac{3}{6}$, und so fort, bedeuten. Nun siehet man aus der Figur und demjenigen, so bereits gesagt worden ist, daß bey einer jeden Bedeutung, die man dem *m* und *n* geben wil, wenn $\frac{n}{m}$ CF größer ist als HF, auch $\frac{n}{m}$ CD größer seyn werde als HD: und

wenn

wenn $\frac{a}{b}$ CF der HF gleich ist, auch $\frac{b}{c}$ CD dem HD gleich seyn wer-

de: wie auch daß, wenn $\frac{a}{b}$ CF kleiner ist als HF, zugleich $\frac{b}{c}$ CD kleiner seyn werde als HD. Folgendes verhält sich allerdings wie HF zu CF, so der Körper HD zu dem Körper CD. Obet, wenn man gleiches vor gleiches setzt, so hat man $AE:CF = AB:CD$, und umgekehret $CF:AE = CD:AB$, welches zu erweisen war.

§. 29. Ein Leser, welcher sich das bisher abgehandelte wohl bekannt gemacht, und sich dadurch an dergleichen Schlüsse gewöhnet hat; wird ohnfehlbar dieses in einem Blicke übersehen, zumalen der Satz selbst fast von Natur bekannt ist. Es ist leicht einzusehen, wenn die Grundflächen der beiden Körper AB und CD nicht allein gleich, sondern auch ähnlich sind, und die Körper AB und CD sind gerade; die Höhe aber des Körpers CD ist zwey, drey, viermal so groß als die Höhe des Körpers AB; daß auch der Körper CD, zwey, drey, viermal so groß seyn werde, als der Körper AB; und daß in diesem Falle überhaupt AE zur CF sich verhalten werde, wie sich der Körper AB zu den Körper CD verhält. Dieses ist auch den Handwerkern bekannt; und niemand zweifelt, ob, wenn man von einem Balken, der als ein Prisma angesehen werden kan, ein prismatisches Stück abschneidet, dessen Länge $\frac{1}{2}$ der Länge des ganzen Balkens beträgt, auch dieses abgeschnittene Stück $\frac{1}{2}$ des ganzen Balkens, dem körperlichen Inhalte nach, betragen werde. Daß aber eben dieses richtig sey, wenn die Körper der ersten Art, welche wir betrachten, schief, und ihre Grundflächen nicht ähnlich sind, siehet man daraus, weil weder die Schiefe noch die Figur der Grundflächen in der Größe der Körper etwas änderet, wenn nur die Größe ihrer Höhen und ihrer Grundflächen beybehalten wird XI, 25.

§. 30. Man kan auch hier auf die Erzeugung der Körper HD und CD zurücke gehen, und aus derselben die Proportion schließen, die wir betrachten. Denn gesetzt, es bewege sich die Fläche FD, auf eine gleichförmige Art, dergestalt aufwärts, daß indem das Punct F in der geraden Linie FC fortgehet; die Seiten der Figur FD nachdem sie in HI gekommen, und sonst überall den Seiten der FD, wie sie im Anfang gelegen, parallel bleiben: so werden die Körper HD, CD so wohl als die Höhen FH, FC durch eine gleichförmige Bewegung erzeugt; die Körper nemlich durch die Bewegung der Grund-

XL. Fläche FD , und die Höhen durch die Bewegung des Punktes F . Es entstehen aber auch HD und HF , wie auch CD und CF zugleich: also verhält sich allerdings HF zur CF , wie sich HD zu CD verhält VI, 67.

F. 305. S. 31. Hieraus aber ist nun ohne Weitläufigkeit zu schließen, daß jede zweien Körper der ersten Art, welche gleiche Höhen haben, sich gegen einander, wie ihre Grundflächen verhalten werden, und daß folgendes, wenn man zweien Körper dieser Art hat, von was Beschaffenheit sie im übrigen seyn mögen ABC , DEF , welche gleiche Höhen haben, aber verschiedene Grundflächen AB , DE , man nur diese Grundflächen nach der Regel, welche wir zur Vergleichung der geradelinihten Figuren IX, angegeben haben mit einander vergleichen dürfe, wenn man die Körper ABC , DEF mit einander vergleichen wil. Denn wie sich AB zu der DE verhält, so verhält sich auch der Körper ABC zum DEF .

F. 305.
306. S. 32. Dieses einzusehen, verwandele man AB in ein geradenwinklichtes Viereck ab , und der Figur DE mache man ein anderes geradenwinklichtes Viereck de gleich, welches mit dem vorigen ab einerley Höhe habe, daß also diese zwey Vierecke ab und de beyde zwischen die Parallellinien ae , GH können gesetzt werden. Wir haben IX, 60. gewiesen, wie dieses zu thun sey. Hier aber ist es genug, daß man sich diese Verwandlung in Gedanken vorstelle, nachdem man eingesehen, daß sie möglich sey. Man setze auf ab das gerade Parallelepipedum abc , dessen Höhe bc der Höhe BC gleich sey, und auf de setze man das gerade Parallelepipedum def , von eben der Höhe. Weil nun $ab = AB$ und $bc = BC$, so sind auch die Körper abc , ABC einander gleich XI, 25. Und, weil $de = DE$, und über dieses die Körper def , DEF gleiche Höhen haben, so sind auch diese Körper einander gleich.

S. 33. Nun siehet man ferner leicht, daß die geradenwinklichten Vierecke bj , hf einander gleich sind; denn ihre Seiten sind gleich, wie ohne Weitläufigkeit aus dem, so gesaget worden ist, und aus der Figur erhellet. Und wenn man also diese Vierecke bj , hf als die Grundflächen der Körper abc , def ansiehet, so haben diese Körper gleiche Grundflächen, und ihre Höhen sind Gb , dH . Demnach ist, nach dem Satz XI, 28. welchen wir eben bewiesen haben $abc : def = Gb : dH$. Diese gerade Linien Gb , dH aber sind die Grundlinien der geraden

radewinklichten Vierecke ab, de , welche zwischen den Parallelen ac, GH stehen, und also gleiche Höhen haben. Diese Vierecke verhalten sich wie ihre Grundlinien, und die Verhältniß $Gb: dH$ ist der Verhältniß $ab: de$ gleich IX, 40. Man kan also diese vor jene in der bereits bemerketen Proportion $abc: def = Gb: dH$, setzen, wodurch sich diese Proportion in die nachstehende verwandelt; $abc: def = ab: de$. Nun schreibe man ABC an statt abc ; und an statt def setze man DEF ; vor ab nehme man AB , und vor de die DE ; denn wir haben gezeigt, daß diese Größen gleich seyn: so wird durch diese Verwechselung in der Proportion nichts geändert. Es kommt aber dadurch die Proportion $ABC: DEF = AB: DE$, deren Richtigkeit wir erweisen sollten.

S. 34. Also wissen wir nunmehr, wie die Körper der ersten Art zu vergleichen seyn, wenn sie gleiche Grundflächen haben, wie wissen auch, wie man verfahren müsse, wenn ihre Höhen einander gleich sind: Wie ist es aber, wenn so wohl die Grundflächen als auch die Höhen solcher Körper ungleich sind, und auf was Art hat man in dem Falle bey der Vergleichung der Körper zu verfahren? Wenn die Beweise, die wir bey dem Parallelogramm gegeben, noch im Gedächtniß schweben, der siehet so gleich, daß sich dieselben auch hier anwenden lassen, und man kan daraus ohne Weitläufigkeit schließen, daß bey der Vergleichung zweier Körper von der ersten Art, man wie bey der Vergleichung der Parallelogrammen, verfahren, und so wohl auf die Verhältniß der Grundflächen, als auch auf die Verhältniß der Höhen werde Acht haben müssen, weil durch die Zusammensetzung dieser zwei Verhältnisse die Verhältniß der Körper heraus gebracht wird.

S. 35. E
einander zu
ne Höhe BC
desselben bc
vor DEF , d
des zweyten a
gleich seyn.
und die Körper
stehende zwei

ersten Art ABC , abc mit F 307.
be des ersten sey AB und sei-
werten sey a b und die Höhe
n Körper von eben der Art
is sey, als die Grundfläche
Höhe des ersten Körpers BC
und DEF gleiche Höhen,
flächen haben, so sind nach-

$$ABC: DEF = AB: DE = AB: ab \text{ XI, 31.}$$

$$DEF: abc = EF: bc = BC: bc \text{ XI, 27.}$$

aus

XL Aus welchem man siehet, daß die Verhältniß der Körper $ABC : abc$ aus den zwei Verhältnissen $AB : ab$ und $BC : bc$ zusammen gesetzt sey, deren erstere die Verhältniß der Grundflächen dieser Körper ist, und die zweite die Verhältniß ihrer Höhen.

S. 36. Wenn man also die Grundfläche des ersten Körpers ABC sich unter B vorstellt, und die Grundfläche des zweiten abc unter b , die Höhe aber des ersten unter A , und die Höhe des zweiten unter a ; den ersten Körper ABC aber selbst C nennet, und c den zweiten abc bedeuten läßt; so kan man den gegenwärtigen Satz, daß nemlich die Verhältniß $C : c$ aus den zwei Verhältnissen $B : b$ und $A : a$ zusammen gesetzt sey, folgender gestalt kurz ausdrücken: $C : c = B \times A : b \times a$.

S. 37. Man siehet hieraus so gleich, daß, wenn bey zween Körpern der ersten Art sich die Grundflächen verhalten, wie die Höhen verkehrt gesetzt, das ist, wenn $B : b = a : A$, diese Körper gleich seyn müssen. Denn in diesem Falle sind die Glieder der Verhältniß, welche aus den zween $B : b$ und $A : a$ zusammen gesetzt wird, einander nöthwendig gleich; das ist, es ist bey der gesetzten Bedingung $A \times B = a \times b$ **VIII, 46.** Also können auch in der Proportion $C : c = A \times B : a \times b$ die ersten Glieder C, c keine verschiedene Größe haben: Wäre dieses, so könnte bey der Gleichheit der letzteren Glieder die Proportion ohnmöglich bestehen.

S. 38. Und wenn Körper von dieser ersten Art einander gleich sind, so kan man auch umgekehrt schließen, daß ihre Grundflächen sich verhalten werden, wie ihre Höhen verkehrt gesetzt: oder, daß die Grundfläche des ersten Körpers sich zu der Grundfläche des zweiten verhalten werde, wie sich die Höhe des zweiten zu der Höhe des ersten verhält. Denn wenn in der allgemeinen Proportion $C : c = B \times A : b \times a$, die ersten zwei Glieder, welche die Körper bedeuten gleich sind $C = c$, so müssen auch die zwey letztern Glieder gleich seyn $B \times A = b \times a$. Die Verhältniß $B \times A : b \times a$ aber ist aus den zween $B : b$ und $A : a$ zusammen gesetzt, und wenn die Glieder einer Verhältniß, die aus zwei andern zusammen gesetzt ist, einander gleich sind, so sind allezeit die Verhältnisse gleich, welche man zusammen gesetzt hat, **VIII, 48.** wenn man nur die Glieder der einen dieser Verhältnisse versetzt, und folgendes ist hier $B : b = a : A$. Oder wenn man sich diesen Satz unter den Zeichen vorgestellt hat, so kan man nur kurz sagen, wenn $B \times A = b \times a$, so

so ist allezeit $B:b = a:A$, und diese ist die Proportion, von welcher wir angegeben, daß sie allezeit, bey den gleichen Körpern der ersten Art, statt finde. XI,

Einige besondere Sätze zur Vergleichung der Körper der ersten Art.

S. 32. Sind die Körper, welche man mit einander vergleicht, beide geradewinklichte Parallelepipeda: so bleibet die allgemeine Proportion $C:c = B \times A: b \times a$. Es ist aber hier die Verhältniß $B:b$, das ist $AC:ac$ aus den zwei Verhältnissen $AB:ab$ und $BC:bc$ zusammen gesetzt, IX, 47. und also $B:b = AB \times BC: ab \times bc$. Denn dieses ist überhaupt von allen geradewinklichten Vierecken richtig. Wenn man nun auch die Verhältniß $A:a$ durch die Buchstaben der Figur ausdrucket, und also in der Verhältniß $B \times A: b \times a$ vor $B:b$ schreibet $AB \times BC: ab \times bc$, und vor $A:a$ setzet $CD:cd$, so wird $C:c = AB \times BC \times CD: ab \times bc \times cd$. Woraus man siehet, daß die Verhältniß zweyer geradewinklichten Parallelepipeden $ABCD:abcd$ aus der Verhältniß ihrer Längen $AB:ab$, ihrer Breiten $BC:bc$ und ihrer Tiefen $CD:cd$ zusammen gesetzt sey. Wer diese drey Verhältnisse übersiehet, übersiehet auch die Verhältniß des Körpers $ABCD$ zu dem Körper $abcd$. F. 308.

S. 40. Alle Würfel stehen mit unter den Körpern, von welchen wir gegenwärtig reden, und es ist also die Verhältniß jeder zweyen Würfel aus der Verhältniß ihrer Längen, ihrer Breiten und ihrer Tiefen zusammen gesetzt. Allein bey den Würfeln sind diese Verhältnisse nicht verschieden. Denn weil $AB=BC=CD$, und $ab=bc=cd$, so ist auch die Verhältniß $AB:ab$ der Verhältniß $BC:bc$, wie auch der Verhältniß $CD:cd$ gleich. Und wenn man AB oder BC oder CD die Seite des Würfels nennet, und mit L bezeichnet, und $ab=bc=cd$ mit l , so kan die Verhältniß $L:l$ anstatt einer jeden der Verhältnisse gebraucht werden, aus welchen die Verhältniß des Würfels $ABCD$ zu dem Würfel $abcd$ zusammen gesetzt ist. Daraus siehet man, daß die Verhältniß $ABCD:abcd$ aus der Verhältniß der Seiten $L:l$ dreyimal gesetzt, bestehe, oder daß $ABCD:abcd = L \times L \times L: l \times l \times l$. F. 309.

S. 41. Noch müssen wir einen anderen Umstand bey den Grund-

XI. diese ähnlich sind. Auch dieses kan dasjenige, so im allgemeinen Verstande erwiesen worden ist, nicht aufheben, sondern, wenn noch
F. 310. C den Körper ABCD, B seine Grundfläche ABC, A aber dessen Höhe CD bedeutet; und c, b, a in Ansehung des Körpers abcd eben die Bedeutung haben, so ist auch hier $C : c = B \times A : b \times a$. Da aber hier die Grundflächen AC, ac einander ähnlich seyn, so kan man die Verhältniß derselben $B : b$ leichter als sonst finden. Gesezet nemlich, daß AB, ab solche Seiten der Grundflächen sind, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, so ist die Verhältniß dieser Grundflächen aus der Verhältniß $AB : ab$ zweymal genommen, zusammen gesezet, oder die Verhältniß $B : b$ ist der Verhältniß des Quadrats aus AB zu dem Quadrate aus ab gleich. IX, 80. Und wenn man demnach, wie auch sonst geschehen, diese Quadrate durch AB^2 , ab^2 anzeigt, so kan man an die Stelle der Verhältniß $B : b$ die Verhältniß $AB^2 : ab^2$ setzen, dadurch wird $C : c = AB^2 \times A : ab^2 \times a$. Woraus man siehet, daß wenn zween Körper der ersten Art ähnliche Grundflächen haben, ihre Verhältniß aus der Verhältniß der Quadrate solcher Linien, welche in ihren Grundflächen auf einerley Art liegen, und aus der Verhältniß ihrer Höhen, zusammen gesezet sey.

S. 42. Unter diesem Satze stehen alle Cylinder, sie mögen gerade oder schief seyn. Denn da die Grundflächen dieser Körper Eirkel sind, so sind sie nothwendig einander ähnlich. Vor die geraden Linien aber, welche in den Grundflächen auf einerley Art zu ziehen sind, kan man hier die Durchmesser oder die Halbmesser nehmen. IX, 82.

F. 311. Es ist also die Verhältniß der Walze ABC zu der Walze abc, deren Grundkreise die Durchmesser AB, ab haben, und deren Höhen sind BC, bc, aus den Verhältnissen $AB^2 : ab^2$ und $BC : bc$ zusammen gesezet. Die Walzen sind gleich, wenn die gedachten Quadrate sich umgekehret wie die Höhen verhalten, XI, 37. oder wenn die Proportion $AB^2 : ab^2 = bc : BC$ richtig ist; und wenn die Walzen einander gleich sind, so ist diese Proportion richtig. XI, 38.

S. 43. Wenn nun außer dem, daß die Grundflächen einander ähnlich sind, sich auch die Höhen der Körper verhalten wie solche Linien, welche in den Grundflächen zwischen gleichen Winkeln, oder sonst auf einerley Art, liegen; so ist die Verhältniß der Körper aus der Verhältniß eben dieser Linien, oder aus der Verhältniß der Höhen, zweymal genommenen zusammen gesezet. Denn daß, wenn die Grundflächen ABC, abc einander ähnlich sind, die Verhältniß der Körper

der ersten Art, die wir noch immer betrachten $ABCD : abcd$, aus der Verhältniß $AB : ab$, und aus der Verhältniß $CD : cd$ zusammen gesetzt sey, wenn AB und ab in den Grundflächen auf einerley Art liegen, haben wir XI. 41. gesehen. Nun ist die Verhältniß $AB : ab$ aus der Verhältniß $AB : ab$ zweymal genommen zusammen gesetzt, und da wir hier sehen, daß die Verhältniß $CD : cd$ der Verhältniß $AB : ab$ gleich sey, so kan diese Verhältniß $AB : ab$ an statt der vorigen $CD : cd$ in der Zusammensetzung gebraucht werden. Nimmet man nun dieses an, so siehet man, daß die Verhältniß der Körper $ABCD : abcd$ heraus gebracht werde, wenn man die Verhältniß $AB : ab$ oder eine jede andere die ihr gleich ist, als $CD : cd$ drey mal zusammen setzet.

S. 44. So ist es bey allen Epyndern, deren Höhen sich wie die Durchmesser ihrer Grundflächen verhalten, zum Exempel bey solchen, deren Höhen eben so groß sind, als die Durchmesser der Grundflächen, oder zwey, drey, viermal so groß, oder so groß als die halben Durchmesser, und so ferner. ABC und abc in der 313 Zeichnung stellen zween dergleichen Epynder vor. Die Verhältniß $ABC : abc$ ist aus der Verhältniß $AB : ab$ zweymal genommen, und aus der Verhältniß $BC : bc$ zusammen gesetzt, und da die Verhältniß $BC : bc$ der Verhältniß $AB : ab$ gleich ist, und man also an die Stelle der einen die andern setzen kan, so siehet man leicht, daß eben die Verhältniß $ABC : abc$ auch durch dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß $AB : ab$ entstehen könne.

S. 45. Wenn nun bey allen Bedingungen, welche von den Körpern der 312 und 313 Zeichnung angenommen worden sind, man sich zween Würffel vorstellt, deren Seiten, den Seiten AB , ab dieser Körper gleich sind: so ist so wohl die Verhältniß der Körper als auch die Verhältniß der Würfel aus der Verhältniß $AB : ab$ drey mal genommen zusammen gesetzt, und folgendes die Verhältniß der Körper der Verhältniß der Würfel gleich. Und weil man sich allezeit Würfel vorstellen kan, deren Seiten so groß sind als eine jede gegebene gerade Linie AB oder ab , so siehet man, daß bey diesen Bedingungen, daß nemlich die Grundflächen zweyer Körper der ersten Art einander ähnlich sind, und daß die Höhen derselben sich verhalten wie zwey gerade Linien, die in den beyden ähnlichen Grundflächen auf einerley Art liegen, diese Körper sich allezeit wie die Würfel verhalten werden, deren Seiten die gedachten Linien sind, welche in den Grund-

XI. flächen der Körper auf einerley Art liegen. Man siehet leicht, daß
Wesnitz man an die Stelle dieser Linien auch jede andere nehmen könne, welche eben die Verhältniß gegen einander haben.

S. 46. Wir erachten dasjenige, so wir bishero von den Eigenschaften dieser Körper gezeiget haben, nach unserem Zwecke vor hinlänglich. Es kommen wenige Aufgaben bey den Körpern vor, welche in der Anwendung von sonderlichem Nutzen wären, und wir wolten also den Leser mit denselben nicht aufhalten; sondern nur eine einzige beybringen, welche aus unserer Betrachtung unmittelbar fließet,
F. 314. wie man nemlich auf eine gegebene Grundfläche AB einen Körper der ersten Art setzen könne, welcher einem gegebenen Körper abc von eben dieser Art gleich sey. Dieses zu verrichten suche man erstlich IX, 50. zwei gerade Linien D, d, deren erstere D sich zu der zweiten d verhält, wie die Grundfläche AB zur Grundfläche ab, so kan man die Verhältniß D : d an statt der Verhältniß der Grundflächen AB : ab gebrauchen. Ist nun bc die Höhe des gegebenen Körpers ac; so mache man VII, 13. $D : d = bc : Q$, diese Q ist die gesuchte Höhe des Körpers, und wenn man demnach DC der Q gleich nimmt, und den Körper ABC von dieser Höhe verfertigt, so wird derselbe allerdings dem Körper abc gleich. Denn weil $B : d = bc : BC$ so verhalten sich die Grundflächen dieser Körper wie ihre Höhen verkehrt gesetzt. Dieses kan hinlänglich seyn zu zeigen; wie in andern dergleichen Fällen zu verfahren sey, wenn dergleichen in der Ausübung vorkommen sollte. Und wir können uns also nunmehr zu den Körpern der zweiten Art wenden.

Körper der zweiten Art.

F. 315. **S. 47.** Man nehme eine ebene und geradelinichte Figur von so vielen Seiten als man wil ABCDE, und außer der Ebene, in welcher diese Figur lieget, nehme man das Punct F nach Belieben. Man ziehe von F die geraden Linien FA, FB, FC und so weiter an alle Ecken der Figur, welche die Dreyecke FAB, FBC, FCD und so weiter, einschließen werden. Der Körper nun, welcher auf der erst gezeichneten Figur ABCDE steht, und um und um von den Dreyecken eingeschlossen wird, die mit ihren Spitzen oben bey F zusammen stoßen, heisset eine Pyramide.

S. 48. Und zwar heisset die Figur ABCDE die Grundfläche der Pyramide, und die Dreyecke FAB, FBC, FCD und so fort sind

sind die Seiten derselben. Diese Seiten der Pyramide sind allezeit an der Zahl so viele, als viele Seiten die Grundfläche hat, weil nemlich auf einer jeden Seite der Grundfläche eine Seite der Pyramide steht. Und es kan demnach eine Pyramide nicht weniger als drey Seiten haben, weil die Grundfläche derselben nicht weniger als drey Seiten haben kan, hingegen kan sie über drey Seiten deren so viele haben als man wil. XI. Abchnitt.

§. 49. Wenn man eine Pyramide vermittelst einer Ebene schneidet, welche der Grundfläche ABCDE parallel lauffet, so ist, wie bey den Körpern der ersten Art der Schnitt der Grundfläche ähnlich aber kleiner als diese. Es sey a b c d e die Figur eines dergleichen Schnittes. Weil nun die Ebene, in welcher er lieget, der Grundfläche ABCDE parallel lieget, und diese zwei ebene Flächen von dem Dreyecke FAB geschnitten werden, so ist auch a b der AB parallel. X. 59. Auf eben die Art schliesset man, daß b c gleichfalls der BC, und c d der CD parallel liege und so ringes herum. Da nun der Winkel, welchen zwei gerade Linien einschliessen, dem Winkel, welcher zwischen zwei andern geraden Linien lieget, die der vorigen parallel sind, allezeit gleich ist: X. 28. so ist auch a b c = ABC, und b c d = BCD, und so ringes herum. Es sind aber auch jede zwei Seiten, die in der Figur a b c d e eben so liegen, wie zwei Seiten in der Figur ABCDE liegen, diesen Seiten proportional, und man hat zum Exempel a b : AB = b c : BC = c d : CD, und so wieder ringes herum. Dieses erhellet daraus, weil in dem Dreyecke FAB die a b mit AB parallel lieget, und in dem Dreyecke FBC die b c mit der BC. Aus dieser Ursache ist die Verhältniß a b : AB der Verhältniß F b : FB gleich, VII. 12. und diese wiederum der Verhältniß b c : BC. Demnach ist auch die erste Verhältniß a b : AB der letzten b c : BC gleich. Sind aber, wie erwiesen worden, die Winkel der Figur a b c d e den Winkeln der Figur ABCDE gleich, wie sie auf einander folgen, und sind die Seiten, welche in diesen Figuren, die gleichen Winkel einschliessen, proportional, so sind allerdings die Figuren einander ähnlich. VII. 1.

§. 50. Die Pyramide ist der erste der Körper, welche wir in die zweite Abtheilung bringen. Der andere ist der Conus oder der so genannte Kegels. Diesen begreift man folgendergestalt. An statt der eckigten Figur wird hier ein Cirkel ABC beschrieben, und außer der Ebene, in welcher er lieget, wird, wo man wil, ein Punct D angenommen, so dann aber an das Punct D und an den Umkreis des

F. 316.

F. 317.
318.

XL. **Schnitt.** Ein Kreis ABC eine Oberfläche $DABCA$ dergestalt angelegt, daß die geraden DA , DB , DC , welche man von D an den Umkreis ABC ziehen kan, alle in diese Oberfläche fallen. Der Körper, welcher auf dem Kreis ABC steht, und rings herum von der gekrümmten Oberfläche $DABCA$ eingeschlossen wird, ist der **Keel**.

S. 51. Ein jeder Keel hat eine **Axe**, wie ein Cylinder, diese ist die gerade Linie, welche von der Spitze desselben D nach den Mittelpuncte E des Kreises ABC gehet, der des Keels Grundfläche abgiebet. Diese **Axe** kan auf der Grundfläche gerade oder schief stehen. Stehet DE auf der Grundfläche ABC schief wie in der 317 Zeichnung, so saget man, der Keel sey schief. Stehet aber die **Axe** auf der Grundfläche ABC gerade oder perpendicular, wie in der 318 Zeichnung; so nennet man den Keel einen geraden Keel.

S. 52. In einem geraden Keel sind alle Linien, welche wie DA , DB , DC von dessen Spitze an den Umkreis der Grundfläche ABC gezogen werden können, von einerley Länge. Dieses siehet man bloß daraus, weil alle Puncte der Linie DE welche durch den Mittelpunct des Kreises ABC gehet, und auf dessen Fläche perpendicular ist, von den Puncten des Umkreises dieses Kreises gleich weit entfernt sind. **X. 40.** Denn es ist D ein Punct der geraden Linie DE , und DA , DB , DC sind dessen Entfernungen von dem Umkreise. Eine dergleichen Linie DA oder DB wird die Seite des geraden Keels genannt.

S. 53. Man siehet aus diesen Begriffen, daß der Keel mit der Pyramide bisher in allen Stücken überein gekommen, außer daß bey der Pyramide die Grundfläche eckigt, und bey dem Keel, Kreisrund, ist. Es kommet aber auch der Keel mit der Pyramide darinnen überein, daß alle Schnitte, welche man in demselben mit der Grundfläche parallel machet, Kreise, und folgendes der Grundfläche ähnlich sind. Es ist nicht schwer auch dieses einzusehen. Man könnte es unmittelbar aus demjenigen folgern, so bey den Pyramiden gezeigt worden ist; doch wird alles deutlicher, wenn wir den Beweis davon insbesondere geben.

F. 319.

S. 54. Es sey die Figur des Schnittes des Keels $ABCD$ welcher mit der Grundfläche ABC parallel gehet, abc . Man sol erweisen, daß dieser ein Kreis sey. Man ziehe die **Axe** des Keels DE . Diese wird den Schnitt irgendwo durchstechen. Es sey dieses Punct e . Man ziehe auch von D eine gerade Linie nach einen beliebigen Punct des

des Umkreises der Grundfläche B. Diese DB wird ganz in der Oberfläche des Kegels zu liegen kommen, XI, 50. und demnach den Umkreis des Schnittes abc irgendwo schneiden. Es sey das Punct, in welchem dieses geschieht, b. Man ziehe EB, welche der Halbmesser der Grundfläche seyn wird. Weil nun die Fläche, in welcher das Dreieck DEB liegt, die Ebene des Schnittes abc in eb, und die Grundfläche in EB, schneidet, und die Ebene abc der Grundfläche ABC parallel ist, so sind auch die Linien EB, eb parallel, X, 19. und man hat $DE : De = EB : eb$, VII, 12. Stellet man sich nun vor, daß man ein Punct wie B anderswo in dem Umkreise ABC angenommen, so kan diese Proportion von diesem Puncte auf eben die Art erwiesen werden, und, wenn dieses andere Punct C ist, und man ziehet DC und EC, und bemerkt die ec, in welcher die Fläche des Dreieckes DEC die Ebene des Schnittes abc schneidet, so ist auch $DE : De = EC : ec$. Da nun in dieser und der vorigen Proportion die zwey ersten Glieder vollkommen einerley, und die dritten, als Halbmesser der Grundflächen ABC, gleich sind; so ist auch $eb = ec$: das ist, alle Puncte des Umkreises abc sind von dem Puncte e gleich weit entfernt, es ist demnach abc ein Cirkel, und e ist sein Mittelpunct.

§. 15. Diese spitzigen Körper nun, die Pyramiden nemlich und die Regel, nennen wir Körper der zwoten Art. Ihre Höhe ist allezeit die gerade Linie, welche aus der Spitze derselben D gerade oder perpendicular auf die Grundfläche ABC fällt, denn diese Perpendicularlinie ist die Entfernung der Ebene so der Grundfläche parallel läuft, zwischen welcher und die Grundfläche der Körper gesetzt werden kan, von dieser Grundfläche. Bey geraden Regeln ist die Höhe selbst der ganzen Länge der Axe gleich.

Wie die Körper der zwoten Art mit einander verglichen werden.

§. 16. Die Sätze, welche zur Vergleichung der Körper dieser Art dienen, sind mit denjenigen welche wir vor die Körper der ersten Art angegeben haben, einerley; gleichwie auch die Regeln von der Vergleichung der Dreiecke mit denjenigen überein kommen, vermittelst welcher man die Parallelogramme vergleicht. Und diese Regeln werden sich leicht zeigen lassen, wenn wir erstlich einen Umstand darthun, bey welchen die Körper der zwoten Art einander gleich sind; so dann aber weisen, wie dieser Art Körper mit den Körpern der ersten Art zu vergleichen sind.

§. 17. Es

XL
Abchnitt. S. 57. Es sind aber die Körper der zweiten Art, wie die Körper
F. 320. der ersten, einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche
 Höhen haben. Es seyen bey den zweyen Körpern der zweiten Art $ABCD$,
 EFG , die Grundfläche BD gleich der Grundfläche FG , und die Körper
 seyen von gleicher Höhe: so daß, wenn man sie beyde auf die Ebene
 BH setzet, ihre Spitzen A , E in die Ebene AE fallen, welche mit
 der Ebene BH parallel lieget. Es kan erwiesen werden, daß wenn
 man die beyden Körper $ABCD$, EFG mittelst einer dritten Fläche
 IK schneidet, welche den beyden vorigen BH , AE ebenfalls parallel
 lieget: die Schnitte IL , MN einander gleich seyn werden, woraus
 dann die Gleichheit der Körper, nach unserm Grundsatz, gar leicht
 folgen wird.

S. 58. Denn wenn einer dieser Körper ein Kegel ist, so ziehe
 man seine Axe EO , und bemerke dadurch den Mittelpunct des Schnittes
 P , und die Halbmesser FO , MP , in welchen die Ebene des Dreys
 eckes EFO die beyden Flächen FG und MN schneidet. Wir haben
 bereits gesehen, daß IL der BD , und MN der FG ähnlich sey: fol
 gends verhalten sich diese Figuren gegen einander, wie die Quadrate
 solcher geraden Linien, die in denselben auf einerley Art liegen. VIII, 80:
 Und man hat demnach $IL:BD=IQ^2:BC^2$, und $MN:FG=MP^2:FO^2$.
 Nun aber ist $IQ:BC=AI:AB$, und $MP:FO=EM:EF$. Die
 letzteren zwey dieser Verhältnisse aber sind einander gleich, $AI:AB=$
 $EM:EF$. X, 62. Denn die zwey geraden Linien AB , EF liegen zwischen
 den Parallellflächen AE , BH , und werden von der dritten Fläche IK ,
 welche den vorigen ebenfalls parallel ist, in I und M geschnitten. Al
 so sind die Verhältnisse $IQ:BC$ und $MP:FO$, welche den gleichen
 Verhältnissen $AI:AB$ und $EM:EF$ gleich sind, ebenfalls gleich, nem
 lich $IQ:BC=MP:FO$. Demnach sind auch IX, 73. die Quadrate
 dieser Linien proportional, und man hat $IQ^2:BC^2=MP^2:FO^2$.
 Nimmet man dieses mit den zwey Portionen, die gleich Anfangs ge
 wiesen worden $IL:BD=IQ^2:BC^2$ und $MN:FG=MP^2:FO^2$ zu
 sammen, so siehet man, daß die zwey ersten Verhältnisse dieser Pro
 portionen $IL:BD$, und $MN:FG$ gleichen Verhältnissen gleich sind,
 sie sind also einander auch selbst gleich, und man hat $IL:BD=MN:$
 FG , und wenn man die mittleren Glieder verwechselt. VI, 107. $IL:$
 $MN=BD:FG$. Da nun also die Figur BD der Figur FG gleich
 ist, so muß auch die Figur IL der Figur MN gleich seyn, wie zu er
 weisen war.

S. 59. Da

S. 59. Da man nun also jede zween Körper der andern Art, welche gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, zwischen zwei Parallelen AB und BH setzen, und hernach wo man wil, vermittelst einer dritten Fläche IK, welche den beiden vorigen parallel läuft, dergestalt schneiden kan, daß die Schnitte IL, MN einander gleich werden: so haben diese Körper das allgemeine Kennzeichen der Gleichheit der Körper, XI, 7, und sind also einander wirklich gleich. XI. Abschnitt.

S. 60. Wir werden demnach wieder nur einen oder den andern Körper dieser Art, an statt aller übrigen, brauchen können. Und dasjenige, so wir, zum Exempel, von einer dreyseitigen Pyramide, in Ansehung ihrer Grösse, sogleich erweisen werden, wird von der Grösse aller Körper der zwoten Art richtig seyn; deren Grundfläche der Grundfläche der Pyramide, und deren Höhe der Höhe der Pyramide gleich ist. Denn in der That kan man einen jeden Körper der zwoten Art in eine solche Pyramide verwandeln. Doch wir wollen bey diesem Beweise etwas umständlicher verfahren. Der Satz, welcher zu erweisen ist, ist nachfolgender.

S. 61. Wenn ein Körper der zwoten Art ABC eine Grundfläche BC hat, die so groß ist als die Grundfläche DE des Körpers der ersten Art DF, und die Höhen dieser Körper sind einander ebenfalls gleich; so ist der Körper der zwoten Art ABC der dritte Theil des Körpers der ersten Art DEF, wie auch im übrigen die Figur dieser Körper beschaffen seyn mag. F. 321. Denn man mache IX, 22. ein Dreieck GHI der Grundfläche DE gleich, und setze auf dasselbe den Körper der ersten Art GHIKLM. Wir stellen uns diesen Körper als gerade vor, so, daß GK, LH und MI auf die Grundflächen GHI, KLM perpendicular fallen; und der Winkel GHI kan, wenn man wil, und wenn man darinne eine grosse Deutlichkeit zu finden vermeinet, ebenfalls gerade angenommen werden. F. 322. Uebrigens haben wir den Körper dergestalt gezeichnet, als ob er auf einer seiner Seiten läge, weil uns diese Zeichnung etwas deutlicher vorkommet als in der gewöhnlichen. Ist nun also der Körper GHIKLM dem Körper DEF gleich gemacht worden, so ziehe man die Querklinie KH und KI, in dessen Seiten GL, GM. Man erhält dadurch das Dreieck KHI, dessen Fläche von dem Körper der ersten Art, welchen wir betrachten, die dreyseitige Pyramide KHGI abschneidet, welche mit dem Körper GHIL einerley Grundfläche und Höhe hat. Denn wenn man sich GHI, als die Grundfläche

XL fläche des Körpers $KGHI$, vorstellet, so wird er uns und um von den **Würfeln** KGH, KHI, KIG eingeschlossen, deren Spitzen in K zusammen laufen; und es ist also dieser Körper $KGHI$ eine Pyramide, deren Höhe KG ist, weil KG auf der Grundfläche GHI perpendicular steht. Da nun eben diese KG auch die Höhe des Körpers den ersten **Art** $GHIL$ ist, so ist allerdings die Grundfläche GHI , und die Höhe GK der Pyramide $KGHI$ mit der Grundfläche und der Höhe des Prisma $GHIL$, einerley.

§. 62. Das übrige Stück $KHIML$ ist ebenfalls eine Pyramide, deren Grundfläche das Parallelogrammum $LHIM$ ist; welche wir aber nicht ins besondere zu betrachten haben. Wir ziehen vielmehr die Querslinie dieses Vierecks HM , wodurch dasselbe in zwey gleiche Dreiecke LHM, HIM getheilet wird. Wenn man sich nun auch das Dreieck KHM vorstellet, so siehet man, daß auf einem jeden der Dreiecke LHM, HIM eine Pyramide stehe, und daß die Spitzen dieser Pyramiden oben in K zusammen stossen. Denn auf dem Dreiecke HIM steht die Pyramide $KHIM$, deren Seiten die Dreiecke KHM, KHI, KIM abgeben, und auf dem Dreiecke LHM steht die Pyramide $KHLM$, deren Seiten sind KHL, KHM und KLM . Diese zwey Pyramiden sind gleich, weil sie gleiche Grundflächen HIM und LHM haben, und, da sie mit ihren Spitzen in K zusammen stossen, auch von gleicher Höhe sind, **XL, 59.** Es kan aber auch die letztere dieser Pyramiden $KHML$ anders betrachtet werden. Man kan KLM vor ihre Grundfläche halten, so werden KHL, LHM und KHM ihre Seiten, und ihre Höhe wird die HKL , die auf der Grundfläche KLM perpendicular steht. Nimmet man dieses an, so siehet man, daß auch diese Pyramide $HLKM$ mit dem Prisma $GHIL$ einerley Grundfläche KLM , und einerley Höhe HL habe. Also ist sie derjenigen Pyramide, die wir zu allererst betrachtet haben $KHGI$, gleich, weil diese ebenfalls die Grundfläche GHI das Prisma zu ihrer Grundfläche, und die Höhe des Prisma $GK = HL$ zu ihrer Höhe hatte.

§. 63. Nimmet man nun dieses alles zusammen, so siehet man, daß durch alle die Flächen, vermittelst welcher wir das Prisma $GHILKLM$ geschnitten haben, dasselbe in drey gleiche Pyramiden $KGHI, KHLH$ und $KHIM$ zertheilet worden. Denn es ist $KHFM = KHML$, und $KHML = KGHI$, wie erwiesen worden; folgendes auch $KHIM = KGHI$. Also ist eine jede dieser Pyramiden $KGHI$ der

der dritte Theil des Prisma GHIL. Nun ist die Pyramide KGHl **XI.**
dem Körper der zweiten Art ABC gleich, weil $GHI = DE = BC$, **Wissen:**
und $GK = FE$, diese Höhe FE aber der Höhe der Pyramide ABC **F. 311.**
gleich ist; das Prisma GHIL aber ist dem Körper DEF gleich ge-
macht worden; also ist auch ABC dem dritten Theile des Körpers
DEF gleich. Und dieses ist der Satz, welchen wir erweisen sollten.

S. 64. Wenn man demnach auf AB, die Grundfläche eines Kör- **F. 313.**
pers der zweiten Art ABC, einen Körper der ersten Art ABD setzt,
dessen Höhe der dritte Theil ist der Höhe des Körpers der zweiten Art,
so ist dieser Körper ABD dem Körper ABC gleich. Denn verhöhet
man diesen Körper ABD, bis seine obere Oberfläche EF durch C, die
Spitze des Körpers CAB geht, und er folgendes einerley Höhe mit
diesem Körper erhält; so ist so wohl ABD als ABC der dritte Theil
des Körpers ABFE, und demnach ABD dem Körper ABC gleich,
weil die dritten Theile von einerley Körper ABFE nicht selbst von ver-
schiedenen Gröffen seyn können.

S. 65. Und hieraus sieht man nun, daß man bey der Verglei-
chung der Körper dieser Art keine andere Regeln gebrauche, als die-
jenigen, welche wir oben vor die Körper der ersten Art vorgeschrieben:
Denn man kan sie allezeit in Körper der ersten Art leicht verwandeln.
Es seyen die zween Körper der andern Art ABCD, abcd mit einan- **F. 324.**
der zu vergleichen. Wir setzen, daß auf die Art, die wir eben gewies-
sen, der Körper der ersten Art BCDE dem ABCD, und bcde dem
abcd, gleich gemacht worden sey; und daß B die Grundfläche BCD,
und A die Höhe des Körpers ABCD, und C den Körper ABCD
oder BCDE selbst, bedeute; folgendes $\frac{1}{3}A$ der DE gleich sey. Ferner
stellen wir uns unter c den Körper abcd oder bcde vor; unter b die
Grundfläche desselben bcd, und unter a die Höhe des Körpers abd,
so, daß wieder de dem dritten Theile dieser a gleich wird: so ist aus
dem gezeigten richtig, daß $C:c = \frac{1}{3}A \times B: \frac{1}{3}a \times b$. Denn die Ver-
hältnis der Körper BCDE: bcde ist allerdings aus der Verhältnis
ihrer Grundflächen und ihrer Höhen zusammen gesetzt, **XI, 34**, und
wir sehen hier, daß C, c diese Körper bedeuten. Man multiplicire die
zwey letzteren Glieder der Proportion durch 3, so wird $C, c = A \times B:$
 $a \times b$, **VI, 104**. Weil nun auch C, c die Körper ABCD, abcd be-
deuten können; so sieht man, daß auch die Verhältnis dieser Körper
aus

XI. aus der Verhältniß ihrer Grundflächen $B : b$, und aus der Verhältniß ihrer Höhen $A : a$ zusammen gesetzt sey.

§. 66. Hieraus nun können wir eben dergleichen Sätze ziehen, als oben von den Körpern der ersten Art erwiesen worden sind. Es sey erstlich $B = b$, und man stelle sich zween Körper der andern Art vor, welche gleiche Grundflächen, aber verschiedene Höhen haben. Weil nun hier die Verhältniß $B : b$, deren Glieder gleich sind, in der Zusammensetzung keine Wirkung hat, und also gänzlich weg bleiben kan, VIII, 40; so wird nummehr $C : c = A : a$, das ist, zween Körper der zweoten Art, welche gleiche Grundflächen haben, verhalten sich gegen einander wie ihre Höhen.

§. 67. Es sey B der b ungleich, aber $A = a$; so wird auf eben die Art aus der allgemeinen Proportion die nachfolgende $C : c = B : b$ heraus gebracht, welche angiebet, daß zween Körper der anderen Art, welche gleiche Höhen haben, sich gegen einander wie ihre Grundflächen verhalten.

§. 68. Es sey $B : b = a : A$, oder man stelle sich zween Körper der anderen Art vor, deren Grundflächen sich verhalten, wie ihre Höhen verkehrt gesetzt, so wird $B \times A = b \times a$, das ist, die Glieder der Verhältniß $B \times A : b \times a$ werden einander gleich, VIII, 46. Da nun also diese Verhältniß der Verhältniß $C : c$ gleich ist; so ist auch in diesem Falle $C = c$, das ist, die Körper sind einander selbst gleich.

§. 69. Und wenn $C = c$, so ist $B \times A = b \times a$. folgendes $B : b = a : A$, VIII, 48, das ist, wenn zween Körper der zweoten Art einander gleich sind, so verhalten sich ihre Grundflächen wie ihre Höhen verkehrt gesetzt.

§. 70. Sind die Grundflächen solcher Körper einander ähnlich, wie denn alle Grundflächen der Regel einander ähnlich sind, weil sie Kreise sind: und bedeuten L, l solche Linien, welche in den beiden Grundflächen auf einerley Art liegen, so ist $B : b = L^2 : l^2$; und es wird also aus der allgemeinen Proportion $C : c = B \times A : b \times a$ nummehr $C : c = L^2 \times A : l^2 \times a$, und die Verhältniß dieser Körper wird aus der Verhältniß der Quadrate $L^2 : l^2$, und aus der Verhältniß der Höhen der Körper $A : a$ zusammen gesetzt.

§. 71. Ist nun bey ähnlichen Grundflächen auch $A : a = L : l$; so kan man die letztere Verhältniß in der Zusammensetzung an statt der ersten

ersteren brauchen. Und es wird also die Verhältniß $C : c$ in diesem Falle aus der Verhältniß $L a : l a$, und aus der Verhältniß $L : l$ zusammen gesetzt. Da die Verhältniß $L a : l a$ kommt, wenn man die Verhältniß $L : l$ zweymal zusammen setzt, so entsteht die Verhältniß der Körper $C : c$ durch eine dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß $L : l$. Und da die Verhältniß zweier Würfel, deren Seiten sich verhalten wie L zu l , ebenfalls durch die dreyfache Zusammensetzung der Verhältniß $L : l$ gefunden wird; so folget, daß bey diesen Bedingungen die Körper C, c sich verhalten wie die Würfel, deren Seiten die Verhältniß $L : l$ haben.

XI.
Abschnitt.

§. 72. Ueberleget man diese Verweise, die wir von den Körpern der ersten und andern Art gegeben haben, etwas genauer; so wird man finden, daß sie auch vor viel mehr andere Arten von Körpern gelten, als diejenige sind, die bey dem Anfange dieser Abhandlungen beschrieben worden sind. Beider Arten Körper können auch andere Grundflächen haben, als geradelinichte Figuren oder Eitel. Es können die Grundflächen in krumme Linien eingeschlossen seyn, die keine Eitel sind: es können auch die Umkreise dieser Grundflächen, aus geraden und krummen Linien, zugleich bestehen. Die Körper selbst aber können auf dergleichen Grundflächen ohngefehr in Form einer gewundenen Säule stehen; und bey dem allen kan es doch mit den Durchschnitten derselben eben die Beschaffenheit haben, welche bey den Körpern gezeigt worden ist, die wir betrachtet haben. Von dergleichen Körpern sind die Sätze von der Größe der Körper der ersten und andern Art, die wir angegeben, ebenfalls richtig. Doch diese und dergleichen Betrachtungen fallen demjenigen gar leicht bey, welcher die gegebenen Verweise vollkommen eingesehen hat; und es ist also nicht nöthig, daß wir uns bey dieser Art Körper, die ohnedem in der Anwendung selten vorkommen, aufhalten.

Körper der dritten Art.

§. 73. Was nun die Körper der dritten Art anlanget, so pfleget man von denselben gemeinlich in den Anfangsgründen die einzige Kugel zu betrachten. Es wird aber eine Kugel ein solcher Körper genannt, welcher von einer einzigen gekrümmeten Oberfläche beschlossen wird, deren Punkte alle von einem gewissen Punkte, innerhalb der Kugel, gleich weit entfernt sind. Es stellt ABC einen dergleichen Körper vor. Das gegebene Punkt, innerhalb derselben, ist D und B ;

F. 315.

A a a 3

EF

XL. EF sollen Punkte in der gekrümmten Oberfläche seyn. Wir setzen, *Nachsatz.* daß die gerade Linie DE der geraden Linie DB gleich sey: und daß dieses beständig so zutreffe, wo man auch die Punkte B und E in der Oberfläche annehmen wil, so wird $DB = DE$ der Radius, oder der Halbmesser der Kugel genennet, und D ihr Mittelpunct. Verlängert man aber den Radius durch den Mittelpunct D, bis wieder an die Oberfläche in G, so ist BG ein Durchmesser der Kugel. Man sieht, daß bey einer Kugel alle Durchmesser einander gleich seyn werden, weil alle Halbmesser gleich sind.

S. 74. Wir könnten uns hier ebenfalls mit der Abhandlung der einzigen Kugel begnügen lassen: allein da die Beweise, mittelst welcher *Archimedes* eine Kugel mit einem Cylinder verglichen hat; deren wir uns hier bedienen werden, weil sie unmittelbar aus unserm Grundsatze fließen, sich nicht nur auf die Kugeln, sondern auch auf viele andere Körper erstrecken, welche keine Kugeln sind: so halten wir davor, es werde dem Leser nicht unangenehm seyn, wenn wir diese Lehre etwas erweitern; zumalen die Beweise dadurch nicht schwerer, sondern vielmehr in einigen Fällen leichter werden. Doch müssen wir gestehen, daß bey dem allen wir doch nicht alle Körper werden beybringen können, welche unter den Sätzen begriffen sind, die wir hier erweisen werden: wie wir denn auch nicht alle Körper abhandeln konnten, welche auf eben die Art mit einander verglichen werden, wie die Körper der ersten und zweiten Art. Indessen hoffen wir, es werde dasjenige, so wir hier zeigen werden, hinlänglich seyn, von den übrigen Körpern allen, welche unter den folgenden Beweisen begriffen sind, zu theilen.

F. 226. S. 75. Man nehme eine ebene Figur, deren Ecken alle von einem
227. gegebenen Punkte gleich weit entfernt sind. Ein gleichschenkliges Dreieck ABC ist unter diesen die einfachste. Bey demselben ist die Ecke A so weit als B von C entfernt. Die übrigen Figuren von dieser Art ABDE sind aus gleichschenkligen Dreiecken ACB, BCD, DCE, ECA zusammen gesetzt, deren an der Zahl so viele seyn können als man wil. Die Seiten dieser Dreiecke CA, CB, CD, CE, sind alle gleich, aber die Winkel an den Spitzen derselben bey C können so groß seyn als man wil. Folgende sind auch die Seiten der Figur AB, BD, DE, EA nicht notwendig gleich. Doch kan auch dieses seyn, und wenn man es annimmt, so wird die Figur ABDE regulär.

guld. Diese Figur ABC oder ABDE giebet die Grundfläche des Körpers ab, welchen wir zusammen setzen wollen. XI.
Werschnitt.

S. 76. Man setze auf diese Grundfläche und an das Punkt derselben C die gerade Linie CF perpendicular, und mache sie so groß als $AC=BC$. Man beschreibe um C als den Mittelpunct, in der Ebene FCA, den Quadranten FA; und in der Ebene FCB beschreibe man, um eben den Mittelpunct C, den Quadranten FB: eben so verfähre man bey allen übrigen Ecken D und E, wann die Grundfläche mehr als zwei Ecken hat, die außer C fallen. An die zwey Quadranten FA, FB krümme man eine Oberfläche dergestalt, daß alle Linien ab, welche in derselben so gezogen werden können, daß sie zugleich ganz in eine Ebene fallen, welche der ACB parallel lieget, gerade Linien sind. Und eben so verfähre man rings herum, wenn die Grundfläche mehr als zwei von der C verschiedene Ecken hat: so ist der Körper, welcher auf der Grundfläche ABC steht, und in die Quadranten FAC, FBC, und die gekrümmte Oberfläche FAB eingeschlossen ist, oder derjenige, welchen wir in der 327 Figur, aus dergleichen Körpern FCBA, FCDB, FCED und so fort, zusammen gesetzt haben, ein Körper der dritten Art, welcher aber noch keinen besondern Namen bekommen hat.

S. 77. Schneidet man einen solchen Körper, dessen Grundfläche ein gleichschenkeliges Dreieck ist FCBA, durch ein beliebig angenommenes Punct a mit der Grundfläche ABC parallel, so wird der Schnitt abc der Grundfläche ABC ähnlich. Denn die Seite ab liegt in der gekrümmten Oberfläche FAB, und zugleich in der schneidenden Fläche, und ist demnach eine gerade Linie. XI, 76. Es sind aber auch ac, bc gerade Linien, und folgendes ist abc ein geradenlinichtes Dreieck. Weil FC auf der Fläche ABC perpendicular steht, und die Fläche acb der ACB parallel lieget; so steht eben diese FC auch auf der acb perpendicular, X, 53. und folgendes sind ac, bc in den gleichen Quadranten FCA, FCB in einerley Entfernung von dem Mittelpuncte C, auf den Halbmesser CF perpendicular. Also sind diese Linien ac, bc einander gleich, V, 36. und das Dreieck acb ist gleichschenkelig. Und weil auch dessen Winkel a cb dem Winkel ACB gleich ist, wie man leicht siehet, X, 61. so sind auch die Dreiecke acb, ACB einander ähnlich. VII, 28. Ist nun die Grundfläche ABDE aus verschiedenen gleichschenkeligen Dreiecken zusammen gesetzt, so ist acb dem ACB ähnlich, bcd dem BCD, dee dem DCE und so fort; also sind die Figur

XI. Figuren $abde$, $ABDE$ aus ähnlichen Dreiecken auf einerley Art zu Abschnitt. sammen gesetzt; sie sind demnach einander ebenfalls ähnlich. VII, 44.

F. 328. §. 78. Nimmet man an die Stelle des gleichschenkligten Dreieckes einen Ausschnitt eines Kreises ABC zur Grundfläche, und verfähret im übrigen wie vorher, so bekommt man einen Ausschnitt einer Kugel. Nämlich, man muß wieder an den Mittelpunct C die gerade Linie FC auf die Ebene, in welcher der Ausschnitt ACB liegt, perpendicular setzen, und um C die zween Quadranten FA , FB beschreiben; so dann aber an diese Quadranten FA , FB , und an den Bogen, AB eine gekrümmte Oberfläche FAB anbringen, welche überall gleich weit von dem Puncte C entfernt sey. Der Körper, welcher auf der Grundfläche ACB steht, und übrigens von den Quadranten FAC , FCB , und von der gekrümmten Oberfläche FAB beschloffen wird, ist der Ausschnitt der Kugel, welchen wir verfertigen wolten.

§. 79. Auch hier ist ein jeder Schnitt abc der Grundfläche ABC ähnlich, welcher derselben parallel liegt. Denn daß ac der bc gleich sey, erhellet bloß aus dem bereits XI, 77. gegebenen Beweise. Nimmet man aber in der krummen Linie ab , welche den Schnitt acb an der dritten Seite schließet, ein Punct d nach Belieben, und leget durch FC und dieses Punct d die Fläche FDC , welche eben dadurch auf die Grundfläche ACB perpendicular wird X, 47; so erhält diese Fläche FDC , indem sie den Körper schneidet, ebenfalls die Figur eines Quadranten, und dc wird der ac oder bc gleich. Also sind alle Puncte der krummen Linie adb von dem Puncte c gleich weit entfernt, und adb ist also ein Kreisbogen, die Figur $cadb$ aber ein Ausschnitt eines Kreises, und dem Ausschnitte ACB ähnlich, weil der Winkel acb dem Winkel ACB gleich ist.

F. 329. §. 80. Nimmet man an die Stelle des Ausschnittes einen ganzen Kreis $ABDE$ zur Grundfläche, und machet übrigens alles wie vorhin, so bekommt man eine halbe Kugel $ABFDE$. Denn daß die Oberfläche $ABFDE$ die Eigenschaften der Oberfläche einer Kugel habe, liegt selbst in dem Begriffe, XI, 78. folgendes ist der Körper $ABFDE$ ein Theil einer Kugel. Daß er aber eben die Hälfte einer Kugel sey, kan man daraus schließen, weil, wenn man an den Kreis $ABDE$ einen andern Körper von der Figur und Größe des $ABFDE$ ansetzet, die Kugel ganz wird, wie man gar leicht siehet. Man siehet auch dieses leicht, daß aus dem vorigen Beweise fließe, daß ein jeder Schnitt dieser halben Kugel, $abde$ welcher mittelst einer ebenen Fläche geschieht, die

die der Grundfläche ABDE parallel liegt, einen Cirkel gebe, dessen Mittelpunkt c. in die Linie CF fällt. XI. -
Schnitt.

§. 81. Es haben also die Körper der dritten Art dieses mit den Körpern der ersten und zweiten Art gemeinschaftlich, daß, wenn man sie mit einer Ebene schneidet, welche der Grundfläche parallel liegt, die Figur des Schnittes der Grundfläche ähnlich wird. Auch kommen alle Körper der dritten Art darinne mit einander überein, daß wenn man sie durch FC, und durch eine Ecke der Grundfläche, (wenn nemlich die Grundfläche Ecken hat, sonst aber, wenn sie keinen Cirkelrand ist, durch ein beliebiges Punct des Umkreises B) schneidet, der Schnitt FCB ein Quadrant wird: und hierdurch wird diese Art Körper, von den Körpern der ersten und zweiten Art unterschieden. Es folget aber hieraus, daß dasjenige, so wir aus der angegebenen Figur des Perpendicularschnittes FBC, und aus der Ähnlichkeit der Schnitte, welche der Grundfläche parallel geschehen, mit der Grundfläche, herführen werden, von allen Körpern der dritten Art richtig seyn werde; ob wir zwar bey unseren Beweisen, nur die einfachsten dieser Körper vorstellen wollen.

Vergleich der Körper der dritten Art mit den Körpern der ersten.

§. 82. Es sey das Dreieck ABC gleichschenkligh, und FABC sey ein Körper der dritten Art. Man setze auf die Grundfläche desselben das gerade Prisma ABCFGH, dessen Obergrundfläche GHF der untern ABC gleich seyn wird. Auf diese Grundfläche FGH setze man die dreieckigte Pyramide FGHC, deren Spitze unterwärts gekehrt ist, und sich in C, dem Mittelpuncte der Quadranten FA, FB, endiget: so haben die zweyen Körper, das Prisma ABCFGH, und die Pyramide FGHC, einerley Grundflächen FGH, und einerley Höhen FC, folgendes ist die Pyramide der dritte Theil des Prismas. XI, 61. So hoch aber einer dieser Körper ist, so hoch ist auch der Körper der dritten Art FABC, denn seine Höhe ist ebenfalls FC. F. 330.

§. 83. Nun schneide man diese Pyramide und den Körper der dritten Art mit einer Ebene IKL, die den Grundflächen die Figur dieses Schnittes in dem Körper der dritten

als Prisma, die Pyramide, mit einer parallel lauft; und die Figur des Schnittes

XI. Schnittes der Pyramide OPL: so wird durch diesen Schnitt von dem Prisma, das Prisma IKLEFGH abgeschnitten; von dem Körper der dritten Art aber der Theil FMNL, und von der Pyramide wird das Stück FGHPLO abgesondert. Man kan darthun, daß jederzeit FMNL so groß sey, als der Unterschied der beyden Stücke IKLEFGH und FGHPLO. Und weil der Unterschied IKLEFGH — FGHPLO dem Körper IKHPOG gleich ist, wie man aus der Figur siehet, so wird eben dieser Satz ausgedrucket, wenn man saget; daß jederzeit FMNL dem Körper IHKPOG gleich sey. Dieses ist dasjenige, so wir gegenwärtig auf eine Art beweisen wollen, aus welcher erhellen wird, daß eben dieses von allen Körpern der ersten, andern und dritten Art, welche auf einer gemeinschaftlichen Grundfläche stehen, und einerley Höhe haben, richtig sey. Aus dieser Ursache wollen wir uns bey diesem Beweise allgemeiner Redensarten bedienen, welche denselben eben nicht auf unsere Figur einschränken, sondern von allen übrigen zugleich gelten können.

§. 84. Die Figur des Schnittes des Körpers der ersten Art IKL ist der Grundfläche desselben ABC oder GHF gleich und ähnlich. Von der Figur des Schnittes des Körpers der dritten Art MNL ist ebenfals bewiesen worden, daß sie der Grundfläche ABC ähnlich sey, und wir wissen auch, daß die Figur des Schnittes des Körpers der zweiten Art POL, der Grundfläche desselben HGF, und folgendes auch der ABC ähnlich ist. Also sind die drey Schnitte IKL, MNL, OPL einander ähnlich, weil ein jeder derselben der ABC ähnlich ist: und die Linien KL, NL, PL liegen in denselben zwischen den Spitzen gleicher Winkel, oder sonst auf einerley Art. Nun ist das Viereck CFHB ein Quadrat; weil $CF = BC$, und der Winkel FCB gerade ist, und HC ist der Durchmesser dieses Quadrates. Da nun PL in der Fläche eben dieses Quadrates der HF parallel läuft, so ist auch $CL = PL$, gleich wie $FC = HF$, VII, 12. und man kan CL vor PL setzen. Man ziehe auch in der Fläche eben dieses Quadrates den Radius des Quadranten FNB; welcher dem Radius BC, und folgendes auch der KL, gleich seyn wird, und an statt dieser KL kan gebraucht werden. Nun ist das Dreieck NLC bey L rechtwinklicht, und wenn die drey Seiten desselben NC, NL, LC in ähnlichen Figuren auf einerley Art liegen, so ist die Figur, in welcher NC lieget, denen beyden Figuren, in welchen NL, CL auf eben die Art liegen, zusammen genommen gleich, IX, 37. folgendes mag man auch schließen; wenn man vor NC die KL, und

vor LC die PL setzt, daß wenn KL, NL, PL in ähnlichen Figuren auf einerley Art liegen, die Figur, in welcher KL lieget, den beyden Figuren, in welchen NL, PL eben so liegen, zusammen genommen gleich seyn werde. Es liegen aber diese Linien KL, NL, PL in den ähnlichen Figuren IKL, MNL, OPL auf einerley Art; also ist die Figur IKL den beyden Figuren MNL und OPL zusammen genommen gleich, oder $IKL = MNL + OPL$.

§. 85. Wir sind also vermittelst dieser Schlüsse so weit gekommen, daß wir gesehen haben, daß, wenn wir die drey Körper, welche wir betrachten, mit einer Fläche schneiden, die deren Grundfläche ABC parallel läuft: allezeit der Schnitt des Körpers der ersten Art IKL dem Schnitte des Körpers der dritten Art MNL, zu dem Körper der zwoten Art OPL zusammen, gleich aber fließet, daß der Schnitt des Körpers der dritten Art MNL, wenn man den Schnitt des Körpers der zwoten Art OPL abziehet, diesem Abzuge IKPO, der Schnitt des Körpers der ersten Art IKL liegt: so ist überall $MNL = IKPO$. Und weil zwischen den Körpern GOIKPH, FMNL zwischen den Körpern IKL liegen: so folget nach unserem Grundsatz, daß der Körper FMNL dem Körper GOIKPH, das ist dem Körper der dritten Art FMNL, dem Unterschiede der ersten und andern Art $FGHKLI - FGHP$

§. 86. Man schließet auf eben die Art, daß auch der Theil des Körpers der dritten Art LMNBAC dem Körper POIKBCA, gleich sey, und daß folgendes der Theil des Körpers der dritten Art LMNBAC übrig bleibe, wenn man den Theil des Körpers der zwoten Art LOPQ von dem Theile des Körpers der ersten Art LIKBCA abziehet. Denn es bleibet nach diesem Abzuge der Körper POIKBCA übrig.

§. 87. So wohl aus diesen beyden Sätzen, als auch unmittelbar aus dem Beweise, welchen wir geführt haben, folget, daß der ganze Körper der dritten Art FABC dem Unterschiede der Körper der ersten und der zwoten Art, die eben die Grundfläche und Höhe haben $FGHBCA - FGHC$ gleich sey. Denn dieser Unterschied ist GH CAB, und dieser Körper ist dem Körper FABC gleich, wie man aus demjenigen leicht schließet, so eben gezeigt worden ist. In dem Falle, welchen die Figur vorstellet, wenn nemlich die Grundfläche ABC ein gleichschenkeliges Dreieck ist, ist dieser Körper GH CAB

XI. selbst eine Pyramide, denn er hat zu seiner Grundfläche das Parallelogramm ABHG, und ist um und um in die Dreiecke ABC, BCH, HCG, GCA eingeschlossen, deren Spitzen in C zusammen laufen.

F. 331.

§. 88. Es verhält sich aber dieses nicht in allen Fällen so. Wenn auf dem Cirkel ABDE eine halbe Kugel ABDFE und ein Cylinder AGHD, und auf der andern Grundfläche dieses Cylinders der gerade Kegel GCH, stehet, wie es der Satz und dessen Beweis erfordern; und man schneidet diese drey Körper durch IL, vermittelst einer Ebene, die der ABDE parallel lauft; so ist zwar der Theil der Kugel MFN dem Körper gleich, welcher übrig bleibt, wenn man den Theil des Kegels GOPH von dem Theile des Cylinders GILH abziehet: und der Theil der Kugel AMND wird ebenfalls durch den Abzug des Kegels OCP von dem Cylinder IADL gefunden: die halbe Kugel AFD aber ist der Ueberschuß des ganzen Cylinders AGHD über den ganzen Kegel GCH. Allein dieser Ueberschuß hat hier weder die Figur eines Kegels, noch die Figur eines Cylinders. Denn wenn man aus dem Cylinder GADH den Kegel GCH heraus nimmt, und also den Ueberschuß des Cylinders GADH über den Kegel GCH übrig läßt: so hat dieser Ueberschuß einiger massen die Figur eines Beckens GCHDA, aber mit einer Pyramide oder einem Cylinder hat er gar keine Ähnlichkeit.

F. 330.

§. 89. Indessen siehet man hieraus, daß ein jeder Körper der dritten Art FABC zwey Drittel eines Körpers der ersten Art FGHBCA betrage, welcher mit dem Körper der dritten Art auf eben der Grundfläche ABC stehet, und mit demselben einerley Höhe hat. Denn der Körper der zweiten Art FGHC ist ohnstreitig der dritte Theil des Körpers der ersten Art FGHBCA; XI, 61. und wenn man also jenen Körper FGHC von diesem FGHBCA abziehet, so bleiben zwey Drittel des Körpers der ersten Art übrig. Diesem Unterschiede aber, das ist, dem Körper GABHC, ist der Körper der dritten Art FABC gleich; es beträgt also derselbe zwey Drittel des Körpers der ersten Art.

F. 331.

§. 90. Demnach ist auch die halbe Kugel FABDE so groß als zwey Drittel der geraden Walze ADHG, deren Grundfläche dem Cirkel ABDE gleich ist, auf welchem die halbe Kugel stehet, und deren Höhe DH der halbe Durchmesser eben dieses Cirkels ist.

§. 91. Stet

§. 91. Stellet man sich nun vor, daß man an die Grundfläche XL.
des Körpers der dritten Art $FABC$, noch einen andern Körper der dritten Art $ABCF$ gesetzt habe, welcher dem vorigen $FABC$ in allen F. 332.
Strücken gleich und ähnlich ist; und man habe auch den Körper der ersten Art $FHGBCA$ verlängert, bis $fg hBCA$ dem $FGHBCA$,
gleich geworden; so ist $FABC = \frac{2}{3} FGHBCA$, und $fABC = \frac{1}{3} fg hBCA$, und folgendes auch $FABC + fABC = \frac{2}{3} FGHBCA + \frac{1}{3} fg hBCA$, das ist, der ganze Körper $AfBF$ beträgt zwey Drittel des Körpers der ersten Art $GghfFH$. Es sind in diesem Falle FAf , und Fbf halbe Cirkel, und der Körper $AfBF$ ist in zwey halbe Cirkel, und die gekrümmete Oberfläche $FAfBF$ eingeschlossen. Wenn man auf die Grundfläche GHF einen Körper der zweiten Art $gGHF$ setzt, welcher mit seiner Spitze bis in f reicht, und ziehet diesen Körper von dem Körper der ersten Art gF ab, so enthält das Ueberbleibsel $gGHf$ ebenfalls zwey Drittel des Körpers der ersten Art gF , weil $gGHF$ ein Drittel desselben beträgt. Und es ist demnach der Körper $gGHf$ dem Körper $AfBF$ gleich. Der Körper $gGHf$ ist wieder eine Pyramide, wenn die Grundfläche GHF ein Dreieck ist; in andern Fällen ist er aus Pyramiden zusammen gesetzt, oder hat mit einer Pyramide gar nichts gemeinschaftliches.

§. 92. Eben so ist es auch, wenn man an die halbe Kugel AFB die andere Helfte AFB setzt, und den Cylinder zugleich verlängert, und F. 333.
macht, daß die Höhe des Cylinders $GghH$ dem Durchmesser der Kugel gleich werde. Es ist wieder die Kugel $FAfB$ zweyen Dritteln des Cylinders $GghH$ gleich; und wenn man auf eben die Grundfläche gh einen Kegel gFh beschreibt, dessen Höhe ebenfalls dem Durchmesser der Kugel gleich ist, so wird dieser der Helfte der Kugel gleich; weil er einem Drittel des Cylinders $GghH$ gleich ist, und die Kugel zwey Drittel dieses Körpers beträgt.

§. 93. Dieses ist eine vollkommen schöne Eigenschaft der Körper der ersten, andern und dritten Art, und derjenigen, welche entstehen, indem man zweyen Körper der dritten Art zusammen setzt. Wenn alle drey Arten dieser Körper auf gleichen Grundflächen stehen, und gleiche Höhen haben, und man nennet den Körper der zweiten Art 1, so wird der Körper der dritten Art durch die Zahl 2, und der Körper der ersten Art, durch die Zahl 3 ausgedrucket. Aus diesen Eigenschaften können wir alles übrige so von den Körpern der dritten Art noch zu
Bbbb 3

XI. sagen ist, herleiten. Es wird aber bey einem jeden besonderen Satze Abschnitt. leicht einzusehen seyn, ob er sich auch auf solche Körper anwenden lasse, welche aus zweyen Körpern der dritten Art zusammen gesetzt sind, wie eine Kugel aus zwey halben Kugeln: doch wollen wir, dem Leser die Mühe des Nachdenkens zu ersparen, dieses überall kurz erinnern.

Wie zweyen Körper der dritten Art mit einander verglichen werden.

F. 334. §. 94. Zweyen Körper der dritten Art, welche gleiche Grundflächen ABC und abc , wie auch gleiche Höhen haben FC und fc , sind einander gleich, obgleich ihre Grundflächen einander nicht ähnlich sind. Denn wenn man auf diese Grundflächen die Körper der ersten Art $ABCEFGH$ $abcefg h$ setzt; so sind diese Körper einander gleich, weil sie gleiche Grundflächen und Höhen haben. Also sind auch zwey Drittel des ersten $ABCEFGH$ gleich zweyen Dritteln des andern $abcefg h$; folgendes, weil die Körper der dritten Art zwey Drittel der Körper der ersten Art betragen, so ist auch $FABC = fabc$. Und man sieht leicht, daß eben dieses auch richtig sey, wenn man zweyen Körper der dritten Art, mit ihren Grundflächen zusammen gesetzt, weil die Verhältniß $\frac{2}{3} A$: $\frac{2}{3} B$ allezeit der Verhältniß A : B gleich ist, es mag A und B bedeuten was man will; und folgendes, wenn $A = B$, auch nothwendig zwey Drittel der A zweyen Dritteln der Größe B gleich seyn müssen.

§. 95. Wir können hiebey bemerken, daß, wenn die Höhen zweyer Körper der dritten Art gleich seyn sollen $FC = fc$, auch die Linien AC , ac einander gleich seyn müssen: weil diese AC , ac , nach dem Begriffe der Körper dieser Art, den Höhen FC , fc gleich sind XI, 76. Indessen kan ABC ein gleichschenkeliges Dreyeck seyn und abc der Ausschnitt eines Kreises, oder ein Vieleck, dessen Ecken alle von C gleichweit entfernt sind, und so fort.

F. 335. §. 96. Sind aber die Grundflächen zweyer Körper der dritten Art der Größe nach von einander verschieden und zugleich die Höhen; so verhält sich der Körper $FABC$ zu dem Körper $fabc$, wie sich drey Helften des ersteren zu dreyen Helften des andern verhalten; das ist, wie der Körper der ersten Art $ABCEFGH$ zu dem Körper der ersten Art $abcefg h$. Nun ist die Verhältniß $ABCEFGH$: $abcefg h$ aus der Verhältniß der Grundflächen ABC : abc , und aus der Verhältniß der Höhen CF : cf zusammen gesetzt XI, 35. also geben eben diese Ver-

Verhältnisse, die Verhältniß nemlich der Grundflächen $ABC:abc$, XI. und die Verhältniß der Höhen $CF:cf$, wenn man sie zusammen setzt, auch die Verhältniß der Körper der dritten Art $FABC:fab c$.

S. 97. Da aber hier die Höhe FC allezeit der Seite BC gleich ist, so sieht man, daß hier noch ein oder anderer besondeter Satz anzubringen wäre, welcher die Vergleichung dieser Körper etwas erleichterte. Wir wollen uns aber dabei nicht aufhalten, sondern nur den einzigen Fall betrachten, wenn AB und ab Bogen, und folgendes die Grundflächen ABC, abc Ausschnitte aus Circeln sind. In diesem Falle ist die Verhältniß der Grundflächen aus der Verhältniß der Bogen $AB:ab$, und aus der Verhältniß der Höhen $BC:bc$ zusammen gesetzt IX, 36. $FABC:fab c$ haben, so n die Verhältniß $CF:cf$, da bc , hinzusetzen, damit man Verhältniß der Grundfläche niß der Körper $FABC:fa$ nissen $AB:ab$, $BC:bc$ und $BC:bc$ zusammen gesetzt. Oder, weil die zwei letzteren Verhältnisse gleich sind, u gesetzt werden, die Verhältniß des Quadrats aus bc , kurz die Verhältniß BC^2 man auch sagen, daß in dem Falle, wenn Circeln, und folgendes $FABC, fab c$ Aus sind, die Verhältniß $FABC:fab c$ aus $AB:ab$, und aus der Verhältniß der $BC^2:bc^2$ zusammen gesetzt sey.

bc zu-
sammen
gesetzt
haben
noch
die
Verhältniß
der
Höhen
mit der
Verhältniß
der
Grundflächen
zusammen
erhalten

S. 98. Sind nun aber die Grundflächen zweier Körper der dritten Art einander ähnlich, so ist die Verhältniß der Körper $FABC:fab c$ aus der Verhältniß der Halbmesser, oder der Höhen $BC:bc$, oder $FC:fc$ dreymal genommen, zusammen gesetzt. Denn die Verhältniß der ähnlichen Grundflächen $ABC:abc$ bestehet aus der Verhältniß $BC:bc$ zweymal genommen, weil diese Linien in den beiden Grundflächen auf einerley Art liegen IX, 80. Und wenn man zu dieser Verhältniß der Grundflächen noch die Verhältniß der Höhen $FC:fc$, welche der Verhältniß $BC:bc$ gleich ist, hinzusetzt: so bekommt man allerdings eine Verhältniß, welche aus der Verhältniß $BC:bc$ dreymal genommen, bestehet. Und diese ist die Verhältniß der Körper

F. 336.

KL. per $FABC:fab c$, weil jederzeit durch die Zusammensetzung der
 Abschnit. Verhältniß der Höhen mit der Verhältniß der Grundflächen die Ver-
 hältniß der Körper $FABC:fab c$ heraus gebracht wird. Auch dieses
 ist von Körpern richtig, welche entstehen, wenn man die ähnlichen
 Körper $FABC, fab c$ verdoppelt, weil die Verhältniß nicht geän-
 dert wird, wenn man die Glieder derselben verdoppelt.

F. 337. §. 99. Wenn die Grundflächen Ausschnitte aus Circeln, und
 die Winkel derselben $ACB, a c b$ einander gleich sind, so sind die
 Ausschnitte ähnlich, und folgendes stehen die Körper unter denjeni-
 gen, von welchen der gegenwärtige Satz lautet. Es verhalten sich

F. 338.

Verhältniß der Höhen $FC:fc$ zusammen gesetzt. Nun bestehet aber
 wieder die Verhältniß der Grundflächen aus der Verhältniß der
 Halbmesser $AC:ac$, oder $FC:fc$ zweymal genommen IX, 82;
 und wenn man demnach zu der Verhältniß der Grundflächen
 $FC \times FC:fc \times fc$ die Verhältniß der Höhen $FC:fc$ hinzusetzt,
 so bekommt man allerdings eine Verhältniß, welche aus der Ver-
 hältniß $FC:fc$ dreymal genommen bestehet.

§. 101. Man siehet vor sich, daß man in diesen Verhältni-
 sen an die Stelle der Halbmesser FC, fc jederzeit die verdoppelt-
 en Halbmesser, oder die ganzen Durchmesser, AD, ad nehmen
 könn-

Könn, weil dadurch die Verhältniß nicht geändert wird, wie auch daß eine ganze Kugel sich zu einer andern ganzen Kugel nicht anders verhalte, als die Hälfte der ersten zu der Hälfte der zweiten. Demnach ist auch die Verhältniß der ganzen Kugel, von welcher ABDE die Hälfte ist, zu der Kugel, deren Hälfte abdf ist, aus der Verhältniß der Halbmesser AC: ac, oder aus der Verhältniß der Durchmesser AD: ad dreymal genommen, zusammen gesetzt: und die erstere Kugel verhält sich zu der letzteren, wie der Würfel dessen Seite AC ist, zu dem Würfel, welchen man aus der Seite ac machen kan, oder auch wie der Würfel aus dem ganzen Durchmesser AD, zu dem Würfel aus dem ganzen Durchmesser ad.

Von den regulären Körpern.

102. Dieses war dasjenige, so wir von der Vergleichung der Körper, welche in den Anfangsgründen zu betrachten am nöthigsten sind, zu sagen hatten. Denn man kan aus den gemiesenen Gründen noch die Eigenschaften anderer Körper herleiten, welche von denjenigen, die wir abgehandelt haben, verschieden sind, und unter diesen sind die so genannten regulären Körper. Es scheint uns aber die Betrachtung derselben von viel zu geringem Nutzen, als daß wir unsere Leser damit aufhalten sollten. Wir wollen indessen erklären, welche Körper regulär genennet werden, damit wenigstens niemand durch das Wort aufgehalten werde. Man nehme bey dieser Erklärung einen Würfel zum Exempel, denn dieser Körper ist auch regulär, so wird man dieselbe desto leichter einsehen. Ein Würfel läßt sich in einen andern Würfel von eben der GröÙe hinein legen, wie man ihn auch kehren mag, so daß er denselben beständig ganz voll füllet. Eben dieses müssen alle reguläre Körper thun, sie müssen andere reguläre Körper füllen können, wie ein Würfel den andern füllet, welche Lage man ihnen auch geben mag, wenn man nur die Ecken beständig in die Ecken pafset, wie man dieses auch bey den Würfeln beobachten muß.

§. 103. Doch diese Erklärung ist nicht hinlänglich, sich solche Körper recht deutlich vorzustellen, und man kan demnach bemerken, daß zu einem regulären Körper nachfolgendes erfordert werde. Er muß erstlich überall in Figuren von einerley Art eingeschlossen seyn, als in Dreyecke oder in Vierecke, oder in Fünfecke, und es müssen nicht einige Seiten desselben Dreyecke, und die andern Vierecke oder Fünfecke seyn. Diese Seiten des Körpers müssen zweytenz alle regulär

XI. Ist und einander gleich seyn, das ist, sie müssen entweder gleiche und **Abchnitt.** gleichseitige Dreiecke, oder gleiche gleichwinklichte und gleichseitige Vierecke, oder gleiche gleichwinklichte und gleichseitige Fünfecke seyn: und drittens müssen alle Ecken des Körpers gleich viele Seiten haben, wie eine jede Ecke des Würfels drey Seiten hat, und entsteht in dem Dreie der Quadrate, welche den Würfel einschließen, mit den Spitzen ihrer Winkel in einem Puncte zusammen lauffen. Es ist übrigens nichts daran gelegen, ob eine jede dieser Ecken nur aus drey oder auch aus vier oder fünf Flächen bestehe.

S. 104. Man hat nicht mehr als fünf solcher Körper. Der erste ist vierseitig, und seine Seiten sind Dreiecke. Der andere ist sechs seitig, und seine Seiten sind quadrate. Dieses ist eben der Würfel. Der dritte ist achtsseitig und seine Seiten sind wieder Dreiecke. Der vierte ist zwölfsseitig, und seine Seiten sind reguläre Fünfecke, und der fünfte hat zwanzig Seiten, welche Dreiecke sind. Wil man sich dieselben deutlich vorstellen, so kan man ihre Seiten aus Papier ausschneiden, und hernach zusammen leimen. Man findet dazu in den gemeinen Büchern eine weitläufigte Anweisung. Wir können uns dabey nicht aufhalten: Denn eigentlich ist es unschicklich, Dinge zu erklären, welche man nicht weiter betrachtet.

Von den Oberflächen der Körper.

S. 105. Wir sind also nunmehr an der Betrachtung der gekrümmten Oberflächen der Körper der ersten, der zweyten und der dritten Art. Denn wir haben bereits **X, 4.** erinnert, daß die geraden Oberflächen der Körper zu betrachten etwas überflüssiges wäre. Diese Betrachtung sol hauptsächlich dahin gehen, daß wir in Stand gesetzt werden, einzusehen, wie die gekrümmten mit geraden Oberflächen zu vergleichen sind. So bald dieses bekannt seyn wird, werden wir auch die krummen Flächen eben wie die geraden mit einander vergleichen können, und dieses ist das Hauptsächliche, so man bey denselben suchet.

S. 106. Wie werden aber nicht alle gekrümmte Oberflächen der Körper, welche wir betrachtet haben, auf diese Art abhandeln können. Einige derselben lassen sich nicht vermittelst der Grundsätze, auf welche man in den Anfangsgründen bauet, mit geradelinichten Flächen vergleichen. Sie erfordern die Kenntniß noch anderer krummen Linien, als der bloßen Cirkelkreise, und fallen also ausser die Gränzen derjenigen Linien, welche man in den Anfangsgründen brauchet. Der-

gleichen sind die Oberflächen der schiefen Cylinder und Regel, und es gehört also bloß die Betrachtung der gekrümmten Oberflächen der geraden Cylinder und Regel, wie auch einiger Körper der dritten Art, hierher, und unter diesen insonderheit die Oberfläche der Kugel selbst.

S. 107. Damit wir in diesen Beweisen etwas kürzer verfahren können, wollen wir anmerken, daß ein jeder Cirkel als ein Vieleck von unendlich kleinen Seiten betrachtet werden könne, in welchem die Spitzen der Winkel, so die Seiten einschließen, alle gleich weit von dem Mittelpunkte entfernt sind. Wir haben dieses oben IX, 33, da wir ins besondere von dem Cirkel handelten, nicht zum Grunde legen mögen, weil doch immer dabey sich noch einige Schwierigkeit findet; und man glauben kan, daß, indem man dergleichen annimmt, man zwar sehr wenig, aber doch etwas fehle. Nach den Beweisen aber, die wir von dem Cirkel gegeben haben, fällt die Undeutlichkeit, welche die Redensart verursachen möchte, und die daraus entspringende Furcht eines Fehlers, hoffentlich ganz weg. Man kan, wenn man eigentlich reden wil, einen Umkreis, oder überhaupt eine Grösse, nicht in unendlich kleine Theile theilen. Wie klein man auch die Theile machen wil, so haben sie doch immer ihre bestimmte Grösse: und die Theile des Umkreises werden niemals gerade Linien, sondern bleiben immer krumm. Es wil aber auch die Redensart, wenn man sagt, daß man einen Cirkel sich als ein Vieleck von unendlich kleinen Theilen vorstellen könne, dieses nicht sagen, daß jemals die Theile des krummen Umkreises des Cirkels gerade Linien werden können; sondern bloß, daß, wenn man den Umkreis immer weiter und weiter theilet, und die Sehnen dieser Theile ziehet, diese Sehnen immer dem Umkreisse näher kommen, und daß die Entfernung einer jeden derselben von dem Mittelpunkte, von dem Halbmesser des Cirkels, immer weniger verschieden werde: wie auch, daß, weil man niemals gezwungen wird, in der Theilung aufzuhören, sondern einen jeden noch so kleinen Bogen immer weiter und weiter theilen kan, man auch den Umkreis eines in einem Cirkel beschriebenen Vieleckes, dem Umkreisse des Cirkels, und die Entfernung einer jeden Seite desselben von dem Mittelpunkte dem Halbmesser des Cirkels, so nahe bringen könne als man wil. Dieses wil man allein anzeigen, wenn man sagt, daß der Cirkel durch die fortgesetzte Theilung seines Umkreises endlich in ein Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten verwandelt werde, welche alle von dem Mittelpunkte gleich weit entfernt sind; und daß man ei-

XL **Abchnitt.** nen jeden Cirkel als ein dergleichen Vieleck ansehen könne. Wir haben aber IX, 33 gesehen, daß eben daraus, so jedermann bey dem Cirkel zugeben muß, nemlich, daß die Theilchen des Umkreiffes desselben immer weiter getheilet werden können, und dadurch geraden Linien immer näher und näher kommen, keine andere als solche Fälle geflossen sind; welche man auch würde heraus gebracht haben, wenn man sich den Cirkel als eine geradelinichte Figur, wie wir sie eben beschrieben haben, vorgestellt hätte: und es wird also auch in ähnlichen Fällen aus diesem Begriffe des Cirkels nichts anders fließen können, als was durch Beweise, welche denjenigen ähnlich sind, vermittelt welcher wir einen Cirkel mit einem Dreyecke verglichen haben, gefolgert werden könnte. Man kan also, wenn man den Cirkel ein Vieleck von unendlich kleinen Seiten nennet, dessen Ecken alle gleich weit von dem Mittelpuncte entfernt sind, dieses als eine Redensart annehmen, welche dasjenige alles, so in dem weitläufigen Beweise enthalten ist, den wir bey der Cirkelmessung gegeben, kurz ins Gedächtniß bringet, weil in der That nicht anders als durch jenen Beweis dargethan werden kan, daß man in der Anwendung nicht im geringsten fehle, wenn man sich den Cirkel als eine geradlinichte Figur von unendlich kleinen Seiten vorstellt.

Oberflächen der geraden Cylinder.

F. 339. §. 108. Es sey nunmehr $ABCD$ ein gerader Cylinder. Man ziehe in der Oberfläche desselben die gerade Linie AB : man mache derselben die ab gleich, und setze auf die äußersten Puncte dieser ab die Perpendicularlinien ad , bc von unbestimmter Länge. Ferner nehme man in dem Umkreisse BC das Theilchen BE so klein, daß es von einer geraden Linie nicht zu unterscheiden ist, und mache $be = BE$. Wenn man nun auch durch BE , in der Oberfläche des Cylinders, die gerade Linie EF zieht, welche der AB parallel seyn wird, und durch e die ef , parallel mit der ab : so ist AE von dem geradenwinklichten Vierecke ae nicht zu unterscheiden, sondern AE ist der ae gleich und ähnlich. Führet man nun fort, in dem Umkreisse BC ein Theilchen EG zu nehmen, so von einer geraden Linie nicht verschieden ist, machet wieder $eg = EG$, und ziehet die geraden Linien HG , hg , wie vorher; so wird wieder $EH = eh$: und folgendes ist die Summe der beiden rechtwinklichten Vierecke $AE + FG$, das ist, der Theil der Oberfläche der Walze AG , der Summe der geradenwinklichten Vierecke $ae + fg$, das ist, dem Vierecke ag , gleich. Versolget man aber diese Schlüsse noch

noch ferner bis endlich bi , dem Bogen BI gleich wird: so wird man durch dieselbe dahin geleitet, daß man einsehet, es sey das geraderwinklichte Viereck $abik$ dem Theile der Cylindrischen Oberfläche $ABIK$ gleich. Man ist also im Stande, eine geraderwinklichte Figur anzugeben, von welcher man zeigen kan, daß sie einem Theil der Oberfläche einer Walze gleich sey. XI. Abschnitt.

§. 109. Es ist nemlich diese der Cylindrischen Oberfläche $ABIK$ gleiche Figur $abik$ ein geraderwinklichtes Viereck, dessen Höhe ab so groß ist, als die Höhe des Cylinders AB , und dessen Grundlinie bi dem Theile des Umkreises der Grundfläche BI gleich ist, welcher zwischen den geraden Linien AB , IK liegt, die die Cylindrische Oberfläche $ABIK$ von beiden Seiten einschließen. Man siehet leicht, daß hieraus folgen müsse, daß die ganze Cylindrische Oberfläche einem geraderwinklichten Vierecke gleich sey, dessen Grundlinie dem ganzen Umkreise der Grundfläche BCB gleich, und dessen Höhe von der Höhe des Cylinders AB nicht verschieden ist.

Oberflächen der geraden Regel.

§. 110. Auf eben die Art stellet man sich eine geradelinichte Figur vor, welche einem Theile der Oberfläche eines geraden Kegels ABC gleich ist. Man mache ab der Seite des Kegels AB gleich, und setze an dieselbe durch b die Perpendiculararlinie bc von unbestimmter Länge. Man nehme in dem Umkreise der Grundfläche des Kegels BD so klein, daß sie von einer geraden Linie nicht unterschieden werden kan, und dieser BD mache man die bd gleich. Man ziehe die geraden Linien AD in der Oberfläche des Kegels, wie ad in der Ebene, in welcher a , b , c liegen; so ist ABD ein geradelinichtetes Dreieck, dessen Höhe von der Länge der Seite des Kegels nicht verschieden ist. Denn eigentlich ist das Dreieck BAD gleichschenkligt, weil $AB = AD$. Dieses verhält sich bey einem geraden Regel jederzeit so; und demnach fällt die Höhe dieses Dreieckes in die Mitte zwischen AB und AD , und theilet BD in zwey gleiche Theile. Nun aber ist XI, 52 eine jede gerade Linie, die von A an BD , oder sonst an den Umkreis der Grundfläche kan gezogen werden, der Seite des Kegels, und folgendes auch der ab gleich. Also haben die Dreiecke ABD , abd gleiche Höhen. Es ist aber auch die Grundlinie BD der Grundlinie bd gleich, und folgendes ist auch das Dreieck abd gleich dem Dreiecke ABD , IX, 14. Führet man nun wieder in dieser Betrachtung weiter fort, und machet in Ge-

F. 340.

XI.
Abschnitt.

denken auch $de = DE$, denn wirklich kan man DE nicht so klein nehmen, daß sie von einer geraden Linie nicht verschieden wäre, und ziehet sodann AE, ae ; so siehet man, vermittelst eben der Schlüsse, daß die Dreiecke ADE, ade gleich seyn, weil so wohl ihre Grundlinien DE, de gleich sind, als auch ihre Höhen. Denn die Höhe des Dreiecks ADE ist wieder die Seite des Kegels; und die Höhe des Dreiecks ade ist die Perpendicularlinie ab , welche man gleich Anfangs der Seite des Kegels gleich gemacht hat. Und wenn durch die Wiederholung dieser Schlüsse endlich bf dem Bogen BF gleich wird, und man ziehet AF, af , so siehet man, daß das Dreieck abf dem Theile der Conischen Oberfläche ABF gleich seyn müsse, weil $ABD = abd$, $ADE = ade$ und so fort, und also die Summen dieser Theile ABF, abf nicht verschieden seyn können.

S. III. Also ist ein jeder Theil einer Conischen Oberfläche ABF , welcher von zweien Seiten derselben AB, AF , und einem Theile des Umkreises der Grundfläche BF beschloffen wird, der zwischen diesen zwei Seiten liegt, einem Dreiecke abf gleich, dessen Höhe ab der Seite des Kegels, und dessen Grundfläche bf dem gedachten Bogen BF gleich ist. Dieses ist jederzeit richtig, es mag der Bogen BF groß oder klein seyn: also muß es auch statt haben, wenn man an statt des BF den ganzen Umkreis der Grundfläche des Kegels nimmt. In diesem Falle aber bekommt man auch die ganze Oberfläche des Kegels: und demnach ist die ganze Oberfläche eines geraden Kegels einem Dreiecke gleich, dessen Höhe der Seite des Kegels, und dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche desselben, gleich ist.

F. 341.

S. III2. Hat man nun auf die Art dem Theile der Conischen Oberfläche ABF das Dreieck abf gleich gemacht, aber auch den Kegelein ABC mit einer Fläche, die der Grundfläche BC parallel liegt, geschnitten, und durch diesen Schnitt, wie nothwendig geschehen muß, einen Cirkel DE hervor gebracht, dessen Bogen DG zwischen den zwei Seiten des Kegels AB und AF liegt: so kan man ohne grosse Weitläufigkeit eine geradlinichte und ebene Figur schaffen, welche der gekrümmeten Figur $DBFG$ gleich ist, die von den beiden Cirkelbogen DG und BF , und von den geraden Linien DB und GF in der Oberfläche des Kegels beschloffen wird. Man mache nur in dem bereits gefertigten Dreiecke abf die ad der AD gleich, und ziehe dg mit der bf parallel, so ist das Viereck $dbfg$ der Figur $DBFG$ gleich.

S. III3.

S. 113. Man siehet, daß, wenn man dieses erweisen sol, nichts zu XI. zeigen sey, als daß das Dreyeck adg der gekrümmten Figur ADG gleich sey. Denn man hat vorher abf der ABF gleich gemacht. Ist nun auch $adg = ADG$, und man ziehet gleiches von gleichem ab, so bleibet allerdings $abf - adg = ABF - ADG$; das ist, wie man aus der Figur siehet, $DBFG = dbfg$. Wiederum, wenn man beweisen sol, daß adg der ADG gleich sey: so hat man nur zu zeigen, daß dg dem Bogen DG gleich sey. Denn wenn die gerade Linie dg dem Bogen DG gleich ist, so folget allerdings XI, 110, daß auch das Dreyeck adg der gekrümmten Oberfläche ADG gleich sey, weil man auch ad der AD gleich gemacht hat. Dieses aber, daß $dg = DG$, siehet man ein, wenn man in der Grundfläche des Kegels BC an dem Mittelpuncte H die geraden Linien BH und FH ziehet, welche mit der Arc des Kegels AH die Dreyecke ABH , AHF einschließen werden. Diese Dreyecke ABH , AHF schneiden die Fläche des Cirkels DEG in den geraden Linien DI und IG , deren erstere DI der BH , und die zweite IG der HF parallel lieget, und also ist auch der Winkel DIG dem Winkel BHF gleich, X, 61. Weil aber das Punct I , in welchem die Arc AH den Cirkel DEG durchsticht, der Mittelpunct dieses Cirkels ist, wie aus dem Beweise folget, vermittelst welchen wir gezeigt, daß der Schnitt eines Kegels, welcher seiner Grundfläche parallel lieget, ein Cirkel sey, XI, 54: so ist DIG ein Ausschnitt des Cirkels DGE , gleich wie BHF ein Ausschnitt des Cirkels BFC ist, welcher die Grundfläche abgiebet, und diese Ausschnitte DIG , BHF sind einander ähnlich, VII, 52: folgendes hat die Proportion $BH: DI = BF: DG$ ihre Richtigkeit, VII, 53. Nun aber ist auch $BH: DI = AB: AD$, und wenn man also die letzteren dieser Verhältnisse an statt der ersten in der vorigen Proportion setzet, so hat man $AB: AD = BF: DG$. Nun ist auch in dem Dreyecke abf , $ab: ad = bf: dg$, VII, 12, und es ist $ab = AB$, $ad = AD$, $bf = BF$, das ist, die drey ersten Glieder der Proportionen, die wir eben gezeigt haben, sind einander gleich: also können auch die vierten Glieder derselben nicht verschieden seyn, sondern man hat auch $dg = DG$, welches zu erweisen war.

S. 114. Es ist dieser Beweis fast etwas zu weitläufig gerathen. Wir hätten kurz sagen können $ABFH$ sey eine Art eines Körpers der zweiten Art, dessen Grundfläche der Ausschnitt BHF ist: und also müsse die Figur DIG , welche durch den Schnitt zum Vorschein kommet, der mit der Grundfläche parallel geführt wird, dieselbe Grundfläche

XL fläche BHF ähnlich, und folgendes ebenfalls der Ausschnitt eines Cirkels seyn. Denn dieses ist die allgemeine Eigenschaft aller Körper der zweiten Art, XL, 49. Man mag nun aber den Beweis auf diese oder jene Art geführt haben, so siehet man klar, daß der Theil der gekrümmten Oberfläche eines geraden Kegels DBFG einem Vierecke $abfg$ gleich sey, dessen zwei entgegen gesetzte Seiten bf , dg parallel liegen, und deren erstere bf so groß ist als der Bogen BF, und die zweite dg so groß als der Bogen DG. Die Entfernung aber der Seite dg von der ihr entgegen gesetzten bf , das ist, die Seite db ist der geraden Linie DB gleich, welche in der Oberfläche des Kegels, zwischen den Bögen DG und BF, kan gezogen werden. Dieses ist wiederum von allen dergleichen Oberflächen solcher Regel, an welchen man aber einen Theil ADGE abgenommen hat, richtig. Gehet aber eine dergleichen Oberfläche zwischen den Umkreisen der Cirkel DEG, BFC rings herum, von DB, zum Exempel bis wieder an DB; so muß man an statt der dg eine gerade Linie setzen, welche dem ganzen Umkreisse DGED gleich ist, und an statt der bf eine andere, welche so groß ist als der Umkreis BFCB; das übrige alles bleibet, wie gewiesen worden ist.

S. 115. Es ist leicht das Viereck $abfg$ in ein geradwinklichtes Viereck zu verwandeln, und also ein geradwinklichtes Viereck zu schaffen, welches einem Theile der Conischen Oberfläche von der Art, welche wir betrachten, gleich sey. Ja man kan dieses unmittelbar, und zwar mit noch größserer Leichtigkeit thun, als wir das Viereck $abfg$ zu verzeichnen gewiesen haben. Man theile db in h in zwey gleiche Theile, und ziehe hi den bf und dg parallel, bis an die af ; so ist das geradwinklichte Viereck, welches man aus db und hi zusammen setzen kan, dem Vierecke $abfg$ gleich: Wenn nemlich, wie wir angenommen haben, der Winkel bey b gerade ist. Man machet dieses Viereck, wenn man durch i die kl der db parallel ziehet, und dg bis an diese Seite in k verlängert. Denn daß dieses Viereck $dblk$ dem Vierecke $abfg$ gleich sey, siehet man daraus leicht, weil die Dreiecke gki , ilf gleich sind. Es ist in diesen Dreiecken $ki = dh = hb = il$, die Winkel derselben bey i sind gleich, und die Winkel bey k und l sind gerade. Also haben diese Dreiecke gki , ilf zween gleiche Winkel, und eine Seite des einen ist einer Seite des andern gleich. Nun aber entstehet das Viereck $dblk$ aus dem Vierecke $abfg$, wenn man von diesem das Dreieck ilf abschneidet, und an dessen Stelle das Dreieck gik anstücket. Da also dasjenige, so man weggenommen, demjen-

jenigen gleich ist, so man an dessen Stelle ansetzet, so ist allordings das Viereck $ablk$ dem Vierecke $abfg$ gleich.

XI.
Abchnitt.

§. 116. Um nun aber dieses geradwinklichte Viereck bk , welches dem Theile BG der Conischen Oberfläche gleich ist, auf einmal zu machen, oder die gerade Linie hi , welche der Grundlinie dieses Viereckes bl gleich ist, auf einmal zu finden, theile man nur DB in zwey gleiche Theile mit H , und ziehe durch H in der Oberfläche des Kegels zwischen DB und GF den Cirkelbogen HI ; oder stelle sich vor, daß durch H der Regel mit der Grundfläche BC parallel geschnitten worden sey, und daß durch diesen Schnitt der Bogen HI entstanden: so ist dieser Bogen HI der geraden Linie hi gleich. Und dieses siehet man aus dem so erwiesen worden, gar leicht ein. Denn gleichwie daraus, daß $bf = BF$, $ab = AB$, und $ad = AD$, hat können geschlossen werden, daß auch dg dem Bogen DG gleich sey: **XI.** 117. also wird man auch, wenn man das übrige behält, so gesetzt worden, und über dieses zum Grunde setzet, daß ah der AH gleich sey, auf eben die Weise folgern können, es müsse hi dem Bogen HI gleich seyn. Nun aber ist $db = DB$ in h in zwey gleiche Theile geschnitten, und DB ist in H eben so getheilet: es ist demnach $dh = DH$. Weil aber auch $ad = AD$, so ist $ad + dh = AD + DH$, das ist $ah = AH$; folgendes ist an der Gleichheit der Linien HL , hi keinesweges zu zweifeln.

§. 117. Ist aber der Theil der Oberfläche des Kegels $DGFH$ einem geradwinklichten Vierecke gleich, dessen Grundlinie dem Bogen HI , und dessen Höhe der geraden Linie DB gleich ist, so muß auch die ganze gekrümmte Oberfläche, die zwischen den Umkreisen der Cirkel $DGED$ und $BFCB$ enthalten ist, einem geradwinklichten Vierecke gleich seyn, welches ebenfalls zur Höhe die DB hat, und auf einer geraden Linie steht, welche dem ganzen Umkreise des Cirkels, von welchem der Bogen HI einen Theil abgiebet, gleich ist, welcher Cirkel nemlich entstehet, wenn man den Regel durch das Punct H , welches von D und B gleich weit entfernt ist, mit der Grundfläche desselben parallel schneidet, und dessen Fläche folgendes von der Fläche DGE eben so weit entfernt ist, als von der Fläche BFC .

§. 118. Hieraus nun läßt sich ein Theil der Oberfläche eines abgekürzten Kegels, dergleichen wir bisher betrachtet haben, oder auch die ganze Oberfläche eines abgekürzten Kegels, mit der Oberfläche eines Cylinders vergleichen; und zwar ist man im Stande, zwey gerade

$D d d d$

Linien

XI. Linien zu schaffen, welche sich gegen einander, wie diese Oberflächen, verhalten: unter den Umständen nemlich, die wir gleich angeben werden. Es sey ABC der Ausschnitt eines Kreises, und auf demselben stehe der gerade Körper der ersten Art ABCDEF, welcher ein Theil eines Cylinders seyn wird. Man beschreibe in der Ebene ABC um den Mittelpunkt C mit einer beliebigen Oefnung des Kreises, den Bogen GH zwischen ACB, und mit einem kleineren Halbmesser beschreibe man um D innerhalb EDF den Bogen IK. Wenn man nun auch IG, KH zieht, so siehet man, daß der Körper DCHGIK ein Theil eines abgekürzten Kegels seyn werde, wenn man nur auch die Oberfläche IKHG sich also gebogen vorstellt, wie die Oberfläche eines Kegels gebogen seyn muß. Die Oberfläche nun dieses Körpers IGHK wollen wir mit der Cylindrischen Oberfläche ABFE vergleichen. Man theile zu dem Ende DC in L in zwey gleiche Theile, und ziehe die Ebene LMN mit der Grundfläche ABC parallel, welche die Cylindrische Oberfläche in dem Bogen MN und die Conische in dem Bogen OP schneiden wird. Man ziehe auch KQ der DL oder FM parallel, und setze auf KH in der Fläche BCDE die PR perpendicular, welche die DC in R erreiche.

S. 119. Diese Fläche LMN wird auch die gerade Linien KH und FB in zwey gleiche Theile theilen; X, 62. und da also der Bogen OP durch P, die Mitte der Seite KH gehet, so wird die Conische Oberfläche IGHK einem geradewinklichten Vierecke gleich seyn, dessen Seiten sind der Bogen OP, oder eine gerade Linie, die demselben gleich ist, und KH. XI, 116. Nun ist die Cylindrische Oberfläche EB ebenfalls einem geradewinklichten Vierecke gleich, dessen Seiten sind AB = NM und FB, XI, 108. und die Verhältniß jeder Vierecke von dieser Art ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten zusammen gesetzt. IX, 47. Demnach kommt die Verhältniß der IGHK zu der EABF, wenn man die Verhältniß KH:FB, der Verhältniß OP:MN zusetzt. An die Stelle der ersten dieser Verhältnisse KH:FB kan man die Verhältniß der Helften dieser Linien KP:FM nehmen, oder auch KP:KQ, weil $KQ = FM$. Was aber die Verhältniß OP:NM anlanget, so ist dieselbe der Verhältniß der Halbmesser PL:ML gleich, weil die Ausschnitte MLN, PLO gleichwinklicht sind; VII, 52. folgendes wird auch die Verhältniß IGHK:EABF aus den zwey Verhältnissen KP:KQ und PL:ML zusammen gesetzt. Da nun aber der Winkel KPR gerade ist, so ist LPR die Ergänzung des Winkels KPL zu einem

nem geraden Winkel. Und weil das Dreieck PKQ bey Q ebenfalls geradewinklicht ist, so ersetzt auch PKQ dasjenige, was dem Winkel LPR an einem geraden Winkel fehlet: denn die zween spitzige Winkel eines geradewinklichten Dreieckes geben allezeit einen geraden Winkel, wenn man sie zusammen setzt. Demnach ist der Winkel LPR dem Winkel PKQ gleich, und also sind die rechtwinklichten Dreiecke PLR , PKQ einander ähnlich, VII, 23. die Verhältniß der Seiten $PK:KQ$ ist der Verhältniß $PR:PL$ gleich, und man kan die letztere dieser Verhältnisse an statt der ersteren in der Zusammensetzung gebrauchen. Thut man aber dieses, in dem Falle welchen wir vor uns haben, so findet man, daß die Verhältniß der Oberflächen $IGHK:EABF$, welche aus den Verhältnissen $KP:KQ$ und $PL:ML$ zusammen gesetzt ist, auch aus den Verhältnissen $PR:PL$, und $PL:ML$ zusammen gesetzt sey. Da aber in diesen Verhältnissen PL einmal als das zweite, und das andere mal als das erste Glied vorkommet: so ist die Verhältniß $PR \times PL:PL \times ML$ mit der Verhältniß $PR:ML$ einerley, VIII, 40. und also auch $IGHK:EABF = PR:ML$, oder $PR:BC$.

S. 120. Ist nun also PR der BC gleich, so ist auch die Conische Oberfläche $IGHK$ der Cylindrischen $EABF$ gleich. Und man kan also, nachdem man PR gezogen hat, gar leicht eine Cylindrische Oberfläche machen, welche so groß sey als die Conische $IGHK$, weil man allezeit die CB der PR gleich nehmen, und so dann das übrige ausmachen kan wie die Zeichnung weist. Man siehet leicht, daß dieses auch richtig sey, wenn man vor die Grundflächen keine Ausschnitte von Eirkeln, sondern halbe oder ganze Eirkel annimmt. Ja weil nichts daran gelegen ist, wie groß man die obere Fläche des abgekürzten Kegels IDK annehme, so muß auch eben der Beweis sich auf den Fall erstrecken, wenn IDK gar keine Größe hat, und also von dem Kegel nichts abgeschnitten worden ist, sondern derselbe ganz geblieben. Es ist aber nicht nöthig, daß wir uns hieby aufhalten, weil die Oberflächen der Kegel bereits betrachtet worden sind, und wir nur in dasjenige zurück fallen würden, so wir schon abgehandelt, wenn wir diesen Sätzen weiter nachhängen wolten.

Oberflächen der Kugeln.

S. 121. Wir wollen also weiter gehen, und uns nach und nach der letzten Betrachtung nähern, die wir hier zu machen haben, welche

XI. die Oberfläche der Kugel und der Theile derselben zum Inhalte hat.
Wfschnitt. Man setze die Theile verschiedener abgekürzten Regel ABCDEF,
F. 344. DEFGHI, IGHK, dergleichen wir bishero betrachtet haben, und deren Grundflächen alle einander ähnlich sind, dergestalt auf einander, daß die Axen derselben die gerade Linie CK geben, und die geraden Seiten BF, FG, GK einen Theil eines regulären Vielecks BFGK ausmachen, dessen Mittelpunkt C ist. Es wird die Perpendicular-Linie, welche, wie LC, auf der Mitte einer dieser Seiten steht, nach dem Mittelpunkt C gehen, V, 23. und alle dergleichen Perpendicular-Linien werden einander gleich seyn. V, 34. Man setze auf die Grundfläche ABC auch den Körper der ersten Art ABCKMN, und verlängere die Grundflächen der abgekürzten Regel, bis sie die gekrümmte Oberfläche ABNM in OP, QR schneiden: so wird sich die Conische Oberfläche ABFE zu der Cylindrischen ABRQ verhalten, wie LC zur BC, und die Conische Oberfläche EFGI wird zu der Cylindrischen QRPO eben die Verhältniß LC:BC haben, weil die Perpendicular-Linie auf die Mitte der EG, die bis in C reicht, der LC gleich ist: und aus eben der Ursach wird auch die Conische Oberfläche IGK sich zu der Cylindrischen MNPO verhalten wie LC:BC.

S. 122. Betrachtet man diese Proportionen:

$$ABFE : ABRQ = LC : BC$$

$$EFGI : QRPO = LC : BC$$

$$IGK : OPNM = LC : BC \text{ etwas genauer, so sieht}$$

man, daß man auch je zwey oder drey oder mehrere der ersteren Glieder zusammen setzen könne, ohne die Verhältniß zu verändern, weil die Verhältniß jeder solcher Theile der Verhältniß LC:BC gleich ist. VI, 102. Es ist nemlich, wenn man die ersteren Glieder der zwey ersten Proportionen, wie sie unter einander stehen, zusammen setzt: $AF+FI:AR+RO=LC:BC$, und wenn man die ersteren Glieder aller Proportionen addiret, so wird: $AF+FI+IGK:AR+RO+ON=LC:BC$, und dieses beständig. Woraus man sieht, daß auch ein jedes Theil der gekrümmten Oberfläche ABK sich zu einem jeden Theile der gekrümmten Oberfläche ABNM verhalte, wie sich LC zur BC verhält, wenn diese Theile zwischen zweyen der Flächen MKN, OHP, QDR und so fort, liegen, man mag diese zwey Flächen übriggens annehmen wie man wil. Als, der Theil der einen Oberfläche KIEFGK liegt mit dem Theile der andern MQRN zwischen den zweyen

zweo Flächen MKN und QDR. Also verhält sich HIEFGK zu XI.
MQRN, wie LC zur BC. Abchnitt

§. 123. Alles dieses ist wieder richtig, es mag der Bogen AB so groß seyn als man wil, und er kan also auch ein ganzer Cirkelkreis seyn, in welchem Falle man an die Stelle des Körpers ABCMKN, einen Cylinder bekommt, und an statt der ABCDEF, und so weiter, abgekürzte Regel. Wir haben diese Körper in der 345 Zeichnung vorge-
F. 345.
stellt. ABDE ist der Cylinder, und ABF der aus abgekürzten Regeln dergestalt zusammen gesetzte Körper, daß die Seiten derselben die Hälfte des Umkreises eines regulären Vielecks AFB ausmachen. Die ebene Fläche GH, welche zweo dieser Regel von einander absondert, schneidet die Oberfläche des Cylinders bey IK: Und es verhält sich die Oberfläche GFH zur Oberfläche EIKD wie CL zur CA. Eben so verhält sich auch AGHB zur AIKB, und die ganze Oberfläche AFB zur ganzen Oberfläche EABD.

§. 124. Weil CL, die Entfernung einer Seite des Vielecks von dem Mittelpuncte C, immer kleiner ist als BC, die Entfernung der Spitze eines Winkels desselben, oder der Halbmesser des Cirkels, in welchem das Vieleck kan beschrieben werden: so ist auch die Oberfläche KAB kleiner als die Oberfläche ABNM, and eben so ist es mit den Theilen dieser Oberflächen beschaffen, welche sich ebenfalls wie LC: BC verhalten. Und zwar ist die Oberfläche KAB desto kleiner als ABNM, je weniger Seiten BFGK hat. Denn je kleiner die Zahl der Seiten eines regulären Vielecks ist, und je grösser also diese Seiten sind, je weniger sind dieselben von dem Mittelpuncte entfernt. V, 37. Und es wird also LC in Ansehung der BC desto kleiner, je weniger dieser Seiten in BFGK sind. Im Gegentheile wächst die LC, wenn die Seiten an der Zahl mehrere werden, und kommet der BC nach und nach ziemlich nahe, wenn AFGK sehr viele Seiten bekommt. In diesem Falle muß also auch die Oberfläche KAB der Oberfläche MABN gar nahe kommen. Sind derer Seiten in BFGK gar sehr viele, so ist LC kaum mehr von dem Halbmesser BC zu unterscheiden, und demnach auch die Oberfläche KAB ohne merklichem Fehler so groß, als die Oberfläche MABN.

§. 125. Vollkommen gleich aber wird die Oberfläche KAB der Cylindrischen Oberfläche MABN nicht eher, als bis LC der BC gleich wird, welches geschieht, wenn der Seiten in BFGK unendlich viele
D d d d 3
wird.

XI. worden, das ist, wenn BFGK nicht ein Theil des Umkreises einer
 Abschnitt. geradelinichten Figur ist, sondern der vierte Theil eines Circels, wie
 F. 346. Dieses in der 346 Zeichnung vorgestellt wird. In diesem Falle ist
 KABC ein Theil einer Kugel, dergleichen wir unter den Körpern der
 dritten Art betrachtet haben. Wenn man nun auch hier auf ACB
 den Ausschnitt eines Cylinders ABCKMN setzt; dessen Höhe dem
 Radius der Grundfläche gleich ist; und ziehet eine Fläche QRD nach
 Belieben den Grundflächen ABC, MNK parallel, welche die Ober-
 fläche KAB in EF, und die Oberfläche MABN in QR, schneidet:
 so sind die gekrümmeten Oberflächen KEF, und MQRN einander
 vollkommen gleich, und EABF ist gleich der QABR, die ganze
 KAB aber der ganzen Cylindrisch-gekrümmeten Oberfläche MABN.

S. 126. Man siehet wieder, daß dieses ebenfalls von einer halben
 F. 347. Kugel AFB richtig seyn müsse, auf deren Grundfläche AB der Cylind-
 der ABDE steht, dessen Höhe dem Halbmesser der Kugel FC gleich
 ist. Auch hier ist der Theil der Oberfläche der Kugel GFH, der
 Oberfläche des Cylinders EIKD gleich, man mag die Fläche IK der
 Grundfläche AB parallel gelegt haben, durch welches Punct der EA
 man wil, und der Theil der Oberfläche der Kugel AGHB ist so groß,
 als die Cylindrische Oberfläche AIKB; demnach ist auch die Ober-
 fläche der halben Kugel AFB der ganzen Cylindrischen Oberfläche
 EABD gleich. Und weil überhaupt jede Oberfläche eines geraden
 Cylinders einem geradewinklichten Vierecke gleich ist, dessen Grund-
 linie dem Umkreise der Grundfläche des Cylinders gleich ist, und wel-
 ches mit dem Cylinder einerley Höhe hat: XI. 108. so ist auch ein jeder
 Theil der Oberfläche einer halben Kugel GFH einem rechtwinklischen
 Vierecke gleich, dessen Grundlinie dem Umkreise der Grundfläche
 der halben Kugel AB, und dessen Höhe der Höhe FL des abgeschnit-
 tenen Theiles der Kugel, gleich ist, von dessen Oberfläche die Rede
 ist. Eben dieses ist auch von der Oberfläche des Theils AGHB rich-
 tig. Sie ist einem geradewinklichten Vierecke gleich, dessen Grund-
 linie wieder dem Umkreise AB gleich ist, und die Höhe der CL.

S. 127. Man schließt hieraus leicht, daß auch die ganze Ober-
 F. 348. fläche einer Kugel FGCH der Oberfläche des Cylinders EABD gleich
 sey, dessen Höhe EA so wohl als der Durchmesser seiner Grundfläche
 AB dem Durchmesser der Kugel gleich ist. Und daß eine jede Fläche
 IK, welche der Grundfläche AB des Cylinders parallel ist, in welchem
 man eine Kugel gesetzt hat, die Oberfläche der Kugel in zwey Theile
 GFH,

GFH, HCG theile, deren ersterer der Oberfläche des Cylinders EIKD, und der zweyte der Oberfläche des Cylinders IABK gleich ist: und was dergleichen kleine Sätze mehr sind. XI. Abschnit.

§. 128. Will man nun ein geradewinklichtes Viereck schaffen, welches der Oberfläche des Cylinders EABD gleich sey; so muß man zur Grundlinie desselben eine gerade Linie nehmen, welche dem Umkreise des Cirkels ED oder AB gleich ist, und welches zur Höhe die Höhe des Cylinders EA hat. Da nun aber der Cirkel AB einem geradewinklichten Vierecke gleich ist, dessen Grundlinie so groß ist als der Umkreis des Cirkels AB, und dessen Höhe dem vierten Theile des Durchmessers eben des Cirkels AB gleich ist: IX, 36. so siehet man, daß das geradewinklichte Viereck, welches der ganzen Oberfläche der Kugel FGCH gleich ist, viermal so groß sey als das Viereck, welches so groß ist als der Cirkel AB. Hieraus aber folget, daß auch die Oberfläche der Kugel viermal so groß sey als der Cirkel AB, dessen Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist.

§. 129. Wir schließen hieraus ferner, daß die Oberflächen zweier Kugeln sich gegen einander allezeit so, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, verhalten. Denn die Cirkel, deren Durchmesser den Durchmessern der Kugeln gleich sind, verhalten sich gegen einander wie diese Quadrate der Durchmesser. Und wenn man einen jeden dieser Cirkel viermal so groß machet als er war, so wird dadurch die Verhältniß nicht geändert. VI, 104. Es werden aber durch diese Vergrößerung die Cirkel den Oberflächen der Kugeln gleich, welche eben die Durchmesser haben.

§. 130. Es entsteht ein Cirkel von der Größe des AB durch einen jeden Durchschnitt der Kugel, vermittelt einer ebenen Fläche, welche durch den Mittelpunct der Kugel gehet, und ein jeder solcher Cirkel theilet die Kugel in zwei Helften. Wir müssen dieses nicht allein zur völligen Ergänzung des vorhergehenden bemerken: sondern wir haben es auch wegen eines ferneren Nutzens zu betrachten, welcher einige Kenntniß der Linien, die in der Oberfläche der Kugel können gezogen werden, und der Figuren, welche zum Vorscheine kommen, wenn man eine Kugel auf verschiedene Art schneidet, erfordern. Das gesagete wird dadurch, wenn wir werden bewiesen haben, daß ein jeder Schnitt der Kugel, dessen Ebene durch den Mittelpunct

XI. Abschnitt. Mittelpunct derselben gehet, einen Cirkel, der dem AB in allen Stücken gleich ist, zum Vorschein bringe, vollständig gemacht, indem daraus folget, daß kein Cirkel, welcher durch den Mittelpunct der Kugel gehet, vor einem andern solchen Cirkel einigen Vorzug habe, sondern daß, was wir in Ansehung der Grösse der Kugel und ihrer Oberfläche bewiesen haben, allezeit richtig sey, man mag die Kugel geschnitten haben, wie man wil.

S. 131. Der Satz selbst aber, daß alle Schnitte, in deren Flächen der Mittelpunct der Kugel befindlich ist, Cirkel zum Vorschein bringen, die einander und dem Cirkel AB gleich sind, und die Kugel in zwey gleiche Theile theilen, kan auch als an sich bekannt angesehen werden; weil da die Oberfläche der Kugel von allen Seiten auf einerley Art gekrümmt ist, und alle Puncte der Oberfläche derselben von dem Mittelpuncte gleich weit abstehen, man sich nicht vorstellen kan, wie zween Schnitte, die in einer Kugel vollkommen auf einerley Art geschehen, von verschiedener Grösse oder nicht Cirkelrund seyn, oder die Kugel anders, als in zween gleiche Theile theilen sollten. Es geschehen aber alle Schnitte, die durch den Mittelpunct gehen, vollkommen auf einerley Art. Indessen ist es auch nicht schwer einen recht bündigen Beweis hievon zu geben. Wir versparen denselben in die folgende Betrachtung.

Swölfter Abschnitt.

Von den Kugelschnitten.

Die Figur dieser Schnitte.

§. 1.

Sie stelle sich vor, daß die Kugel $ABCD$, deren Mittelpunct E ist, durch $AGCH$ dergestalt geschnitten sey, daß der Mittelpunct der Kugel E in die Ebene dieses Schnittes $AG=CH$ falle: so siehet man leicht, daß eben dieses Punct E auch von allen Puncten des Umkreises $AGCH$ gleich weit entfernt seyn werde. Denn da dieser Mittelpunct E von allen Puncten der Oberfläche der Kugel gleich weit entfernt ist, so muß es nothwendig auch von allen Puncten des Umkreises $AGCH$ gleich weit abstehen, weil dieselbe nothwendig in die Oberfläche der Kugel fallen. Es ist also $AGCH$ ein Cirkel, und sein Mittelpunct fällt in E , den Mittelpunct der Kugel. Schneidet man nun eben die Kugel auch mit der Fläche $BGDH$, so ist von dieser Figur eben das zu sagen, was bey der vorigen angemerkt worden ist. Es ist also $BGDH$ ebenfalls ein Cirkel, welcher dem vorigen gleich seyn muß, weil sein Radius ebenfalls zugleich der Radius der Kugel ist, und der Mittelpunct dieses Cirkels fällt wieder in E . Wir gehen jezo nicht weiter. Daß ein jeder dieser Cirkel die Kugel in zwei Helften theile, wird aus den Sätzen erhellen, die wir wegen ihres besonderen Nutzens aus dem gegenwärtigen schließen müssen.

§. 2. Die Flächen der Cirkel $AGCH$ und $BGDH$ schneiden einander nothwendig innerhalb der Kugel; denn der Mittelpunct E liegt in einer jeden dieser Flächen, XII, 1. welches nicht seyn könnte, wenn sie einander nicht innerhalb der Kugel schnitten: also müssen die Umkreise derselben einander ebenfalls schneiden, weil sie beyde in der Oberfläche der Kugel liegen. Man verknüpfe die Puncte H und G , in welchen die Umkreise einander schneiden, vermittelst der geraden Linie HG . Weil nun diese gerade Linie durch die beyden Puncte H, G gehet, welche die Flächen der Cirkel $AGCH, BGDH$ gemeinschaftlich haben, so schneiden diese Flächen einander in der Linie HG , und alle übrigen

Ee ee

Puncte

XII. Punkte, welche die beyden Flächen gemeinschaftlich haben, fallen in diese Linie. X, 11. Nun ist der Mittelpunkt E den beyden Cirkeln gemeinschaftlich: es fällt also E in die gerade Linie HG, oder HG geht durch E, den Mittelpunkt des Cirkels AGCH, welcher zugleich der Mittelpunkt des Cirkels BGDH ist. Also ist GH ein Durchmesser so wohl des einen als auch des andern dieser Cirkel, und HAG, HBG sind halbe Cirkel. Zween Cirkel also, der Flächen, die durch den Mittelpunkt einer Kugel gehen, theilen einander in zwei gleiche Hälften: die Bogen HAG, HBG, GCH, GDH aber sind Hälften ihrer Umkreise.

F. 350. §. 3. Man schneide die Kugel ABCD, deren Mittelpunkt E ist, nochmals mit einer Ebene AGCH, die durch den Mittelpunkt E geht, und ziehe durch E die gerade Linie BD auf die Fläche des Cirkels AGCH perpendicular. Durch diese Linie BD, lege man eine andere Fläche wie man wil, welche die Kugel ebenfalls schneiden, und durch diesen Schnitt einen Cirkel DG=BH zum Vorschein bringen wird, welcher durch den Mittelpunkt E geht. Denn da die ganze DB in der Fläche des Schnittes DGBH lieget, und E in der DB befindlich ist, so muß allerdings auch E in der Fläche des Cirkels DGBH liegen. Es wird demnach dieser Cirkel von dem vorigen AGCH in zwei gleiche Theile getheilet, und der Bogen GDH ist die eine Hälfte seines Umkreises, GBH aber die andere. Weil aber auch DE mit der GH rechte Winkel macht, indem sie auf der Ebene AGCH perpendicular stehet, X, 30. so sind die Bogen GD, DH, BG, BH Quadranten. Und hieraus siehet man, wenn man sich des Begriffes erinnert, welchen wir XI. 80. von der halben Kugel gegeben, daß AGDHC so wohl als AGBHC halbe Kugeln, und folgendes einander gleich sind. Denn was von dem Cirkel DGBH gezeigt worden, ist von allen Cirkeln richtig, deren Flächen durch DB gehen, weil wir den Beweis weder auf diesen oder jenen eingeschränket haben, noch einschränken können.

F. 351. §. 4. Hieraus nun schliessen wir weiter, daß, man mag eine Kugel mit einer ebenen Fläche schneiden wie und wo man wil, die Figur des Schnittes jederzeit ein Cirkel seyn werde. Denn man schneide die Kugel ABCD, deren Mittelpunkt E ist, vermittelst der ebenen Fläche FG: so kan man eben die Kugel auch durch den Mittelpunkt E mit der Ebene FG parallel schneiden, und ADC wird dadurch eine halbe Kugel, deren Grundfläche die AC ist. Nun haben wir XI. 80. gezeigt, daß nicht nur in einer halben Kugel, sondern auch in einem jeden

Körper der dritten Art, der Schnitt, welcher der Grundfläche parallel XII.
 lauset, der Grundfläche ähnlich sey. Also ist FG der Figur AC äh-
 lich, und es kan also FG keine andere als die Figur eines Cirkels ha-
 ben, weil AC ein Cirkel ist.

S. 5. Es erhellet aber auch aus eben dem Beweise, XI, 79. auf
 welchen wir uns hier gründen, daß die gerade Linie DB, welche auf
 die Ebene des Cirkels AC perpendicular ist, und durch dessen Mittelp-
 punct E gehet, auch durch H, den Mittelpunkt des Cirkels FG gehen
 müsse, und daß dieses auch von einem jeden anderen Cirkel IK richtig
 sey, welcher entstanden, indem eben die Kugel ABCD parallel mit
 der Ebene AC oder FG geschnitten worden ist. Eben die DB nemlich
 gehet auch durch L den Mittelpunkt dieses Cirkels IK. Aber eben die
 DB ist auch auf die Flächen FG und IK perpendicular, weil dieselbe
 der Fläche AC parallel liegen, auf welcher DB perpendicular
 steht. X, 13.

S. 6. Schneidet man nun die Kugel durch diese Linie DB, welche
 nemlich durch den Mittelpunkt derselben E gehet, auf die Flächen der
 Parallelcirkel AC, FG, IK perpendicular, und in welcher folgendes
 die Mittelpuncte dieser Cirkel H und L anutreffen sind; und bringet
 durch diesen Schnitt den Cirkel zum Vorscheine, von welchem DMNB
 eine Hälfte vorstellet, nachdem man eben die Kugel bereits vorher ver-
 mittelst des Cirkels ABCD geschnitten, welcher durch eben die Linie
 DB gehet: so werden so wohl DENCD als auch BENCB Körper
 der dritten Art, und es sind demnach die Schnitte derselben GHM und
 CEN einander ähnlich, wie auch CEN und KLO. Also haben auch
 die Bogen MG und NC gegen ihre Umkreise einerley Verhältniß, oder
 es ist $MG : GMFG = NC : CNAC$. Eben dieses ist auch von den
 Bogen NC und OK richtig, und demnach verhält sich auch der Bo-
 gen MG zu seinem ganzen Umkreise; wie sich der Bogen OK zu sei-
 nem ganzen Umkreise verhält.

S. 7. Und da wir oben X, 40. gewiesen haben, daß ein jedes
 Punct einer geraden Linie, welche wie DB auf der Ebene eines Cirkels
 perpendicular steht, und durch den Mittelpunkt desselben hindurch ge-
 het, von allen Puncten des Umkreises desselben Cirkels gleich weit ent-
 fernt sey: so muß auch ein jedes Punct der geraden Linie DB, und fol-
 gends auch dasjenige, so in der Oberfläche der Kugel liegt: D, von
 allen Puncten des Umkreises FG gleich weit abstehen: oder, die gera-
 den Linien, welche man in dem inneren der Kugel von D bis an den

XII. Umkreis des Cirkels FG ziehen kan, müssen alle gleich seyn. Eben Abschnitt. Dieses ist auch von dem Puncte B zu sagen, so ebenfals in der Oberfläche der Kugel lieget, und aus eben dem Grunde sind auch die Puncte D, B von allen Puncten eines jeden der Umkreise AC, IK gleich weit entfernt, deren Flächen der Fläche FG parallel liegen. XII: 5.

§. 8. Man kan demnach auch den Umkreis des Cirkels FG in der Oberfläche der Kugel beschreiben, wenn man den einen Fuß des Cirkelinstrumentes in D einsetzet, die Spitze des andern aber in F bringet, und so dann eben so verfähret, wie man verfahren muß, wenn man den Umkreis eines Cirkels in einer Ebene beschreiben wil. Eben diesen Cirkel kan man auch aus dem Puncte B beschreiben, wenn man die gerade Linie, die man sich zwischen B und F vorstellen kan, eben so herum führet, daß nemlich das eine Ende derselben immer in B bleibe, das andere aber niemals ausser der Oberfläche der Kugel falle. Und aus eben den Puncten D und B können auch die Umkreise der Cirkel AC, IK auf gleiche Weise beschrieben werden.

Pole der Kugelschnitte. Axe der Kugel.

§. 9. Wegen dieser Eigenschaft werden die Puncte D, B der Oberfläche der Kugel, welche von allen Puncten des Umkreises des Cirkels FG gleich weit entfernt sind, die Pole dieses Cirkels genennet. Und wenn wir dieses Wort gebrauchen wollen, so können wir die bereits erwiesenen Sätze dergestalt ausdrucken: Die Pole eines Cirkels FG sind die Puncte D, B, in welchen die gerade Linie DB, die durch H den Mittelpunct des Cirkels FG, auf die Fläche desselben perpendicular gezogen ist, die Oberfläche der Kugel durchsticht. Und alle Cirkel einer Kugel FG, AC, IK deren Flächen einander parallel liegen, haben eben die Pole D, B: oder, die Pole solcher Cirkel sind nicht verschieden.

§. 10. Es kan aber der Cirkel FG in der Oberfläche der Kugel ABCD, ausser den zween Polen D und B, nicht noch mehrere andere haben. Dieses siehet man daraus, weil wenn das Punct D von allen Puncten des Umkreises des Cirkels FG gleich weit entfernt ist, und man nimmet in der Oberfläche der Kugel ein anderes Punct, zwischen dem D und dem Umkreise, wo man wil, man dasselbe nothwendig auf der einen Seite dem Umkreise näher bringen muß, als D auf eben derselben Seite dem Umkreise lieget, wodurch man es im Gegentheile auf der andern Seite von dem Umkreise weiter entfernt, als D von demselben abstehet. Also kan kein Punct der Oberfläche der Kugel, so
zwischen

zwischen D und dem Umkreise FG lieget, von allen Puncten desselben gleich weit entfernt seyn. Auf eben die Art kan man auch von den Puncten schliessen, die zwischen B und eben dem Umkreise FG liegen, und es bleiben also D und B die einzigen Pole dieses Umkreises. Wir haben nicht nöthig erachtet einen weitläufigeren Beweis hiervon zu geben, weil alles aus demjenigen, so wir von dem Cirkel gewiesen haben V, 35. überflüssig klar ist.

S. 11. Und hieraus schliesset man so gleich, daß wenn man von einem Pole D eines Cirkels FG bis an den anderen Pol desselben B die gerade Linie DB ziehet, diese durch den Mittelpunct des Cirkels H gehen, und auf die Fläche desselben perpendicular fallen werde. Denn wäre dieses nicht, so könnte man durch den Mittelpunct H eine andere gerade Linie auf den Cirkel FG perpendicular ziehen, welche in der Oberfläche der Kugel die Pole dieses Cirkels bezeichnen würde, XII, 9. und diese letztere Pole könnten mit den vorigen D und B nicht zusammen fallen, weil sonst die bereits gezogene DB die Perpendicularlinie durch den Mittelpunct H wäre, welches demjenigen widerspricht, so man angenommen hat. Demnach hätte der Cirkel FG in der Oberfläche der Kugel, ausser den beyden D und B, noch irgendwo andere Pole, welches nicht seyn kan.

S. 12. Ist nun die Fläche des Cirkels AC, welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und dessen Mittelpunct folgendes ebenfalls E ist, dem vorigen FG parallel: so sind die Puncte D und B auch die Pole dieses Cirkels AC, und BD gehet also durch den Mittelpunct desselben E, das ist, XII, 1. durch den Mittelpunct der Kugel. Und weil man sich einen Cirkel wie AC vorstellen kan, man mag den Cirkel FG genommen haben, wie man wil, so folget, daß eine jede Linie BD, welche zwischen den zween Polen B, D eines Cirkels der Kugel lieget, durch den Mittelpunct der Kugel gehe, und einen Durchmesser derselben abgebe.

S. 13. Eben so ist es auch mit den beyden Cirkeln FG, IK, welche einander in der Kugel ABCD parallel liegen, und folgendes XII, 9. einander Pole D und B haben. Die gerade Linie DB, welche diese Pole verknüpft, gehet durch den Mittelpunct des einen H, und auch durch den Mittelpunct des andern L, und stehet auf den beyden Cirkeln perpendicular. Man kan zwischen den Puncten H, L keine gerade Linie ziehen, welche von der bereits gezogenen HL verschieden wäre, und wil man von H nach L eine gerade Linie ziehen, so fällt sie mit der bereits

XII. gezogenen HL zusammen, sie gehet also, wenn man sie verlängeret, durch die Pole B und D, und fällt auf die Flächen der Cirkel FG und IK perpendicular. Setzet man an die Stelle des Cirkels IK den Cirkel AC, dessen Mittelpunct E in den Mittelpunct der Kugel fällt: so siehet man aus eben dem Satze, daß wenn man von dem Mittelpuncte der Kugel E nach H den Mittelpunct eines nach Belieben angenommenen Cirkels derselben eine gerade Linie EH ziehet, und dieselbe in D und B verlängert, diese Linie ebenfalls auf FG perpendicular fallen, und daß D und B die Pole des Cirkels FG seyn werden.

§. 14. Wir könnten noch mehrere dergleichen Sätze machen, welche wir aber, alle unnöthige Weitläufigkeit zu vermeiden, zusamt denjenigen, die wir eben gewiesen, in eine allgemeine Betrachtung verfassen und anmerken wollen, daß die einzige Linie DB alle diese Eigenschaften zusammen habe, daß sie 1) durch den Pol D, und 2) durch den Pol B, wie auch 3) durch den Mittelpunct der Kugel E, und 4) durch den Mittelpunct H des Cirkels FG, wie auch 5) durch den Mittelpunct L des Cirkels IK gehe, und 6) auf die Parallelcirkel FG, AC, IK perpendicular stehe, und daß diese Linie DB durch jede zwei dieser Eigenschaften bestimmt werde, so nemlich, daß wenn man eine Linie nennet, welche zwei der angezeigten sechs Eigenschaften hat, keine andere als die einzige Linie DB darunter verstanden werden kan. Es folget daraus überhaupt, daß eine Linie, welche zwei der eben erzehleten Eigenschaften hat, die übrigen alle habe, und daß zum Exempel die Linie, welche aus dem Mittelpuncte der Kugel E, auf die Fläche des Cirkels FG perpendicular fällt, durch den Mittelpunct desselben H, wie auch, wenn man sie beyderseits verlängeret, durch die Pole desselben B und D, und durch L, den Mittelpunct, des Cirkels IK, welcher dem vorigen AC parallel lieget, hindurch gehe. Auf eben die Art kan man sich die übrigen Sätze leicht vorstellen, welche in dieser allgemeinen Betrachtung liegen.

§. 15. Der Durchmesser der Kugel DB, welcher auf die Art bestimmt wird, wird auch die Ase der Kugel genennet, so oft man ihn auf die Cirkel FG, AC, IK beziehet, deren Pole er mit einander verknüpft. Man nennet ihn auch öfters die Ase dieser Cirkel.

§. 16. Wir können nun weiter schließen, daß keine Cirkel einer Kugel, als diejenigen deren Flächen durch den Mittelpunct der Kugel gehen, einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben können: Oder, daß

daß wenn man eine Kugel $ABCD$, deren Mittelpunct E ist, zwey mal schneidet, und dadurch die Cirkel AC und BD zum Vorschein bringet, deren einer nicht durch den Mittelpunct E gehet, es mag nun der andere durch diesen Mittelpunct gehen oder nicht, sie unmöglich ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben können. Denn sollen sie ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben, so muß demjenigen, so gesetzt worden ist zu Folge, dasselbe von dem Mittelpuncte der Kugel E verschieden seyn. Denn wenn zween Cirkel ein gemeinschaftliches Mittelpunct haben, welches mit dem Mittelpuncte der Kugel zusammen fällt, so gehen beide Cirkel durch den Mittelpunct der Kugel. Wir reden aber von solchen Cirkeln, welche nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehen. Man setze also, es sey H der gemeinschaftliche Mittelpunct der beiden Cirkel AC und BD , und ziehe von dem Mittelpuncte der Kugel E an H die gerade Linie EH . Es fließet aus demjenigen, so eben gezeigt worden ist, daß diese EH auf die Fläche des Cirkels BD perpendicular seyn werde, weil sie durch den Mittelpunct der Kugel E , und durch den Mittelpunct des Cirkels H gehet XII, 14. Da aber eben dieser H auch der Mittelpunct des Cirkels AC ist, so stehet eben die EH auch auf der Fläche des Cirkels AC perpendicular. Das ist, die einzige gerade Linie EH ist auf die zwey Flächen BD und AC perpendicular, welche einander schneiden. Dieses ist nicht möglich X, 27. also kan weder H noch einiges anderes Punct der gemeinschaftliche Mittelpunct der Cirkel AC , BD seyn; und diese Cirkel haben also keinen gemeinschaftlichen Mittelpunct.

§. 17. Demnach können auch zween solche Cirkel, derer Flächen nicht beide durch den Mittelpunct der Kugel gehen, einander nicht in gleiche Theile theilen. Dieses ist so zu verstehen: Es ist nicht möglich, daß die beiden Cirkel AC und BD , deren Flächen nicht beide durch den Mittelpunct der Kugel E gehen, einander vermittelst der geraden Linie GF so theilen solten, daß so wohl GAF als auch GBF halbe Cirkel wären. Beides zugleich kan ohnmöglich seyn: denn daß GBF allein ein halber Cirkel sey, wenn GAF größer oder kleiner ist, als ein halber Cirkel, ist gar wohl möglich; und wir werden so gleich einen Umstand angeben, bey welchem dieses allezeit zutrifft. Daß aber bey der gesetzten Bedingung nicht GAF und GBF zugleich halbe Cirkel seyn können, erhellet daraus, weil, wenn sie es wären, GF ihr gemeinschaftlicher Durchmesser seyn müste V, 11. Wäre dieses, so müßten sie auch beide nur einen Mittelpunct haben. Wir haben aber eben gesehen;
daß

XII. Daß zween Cirkel, welche nicht beide durch den Mittelpunct der Kugel schnitten, gehen, auch ohnmöglich einen gemeinschaftlichen Mittelpunct haben können.

§. 18. Können also solche Cirkel, welche nicht beide durch den Mittelpunct gehen, einander nicht in halbe Cirkel theilen, so folget, daß wenn man zween Cirkel einer Kugel hat, welche einander wirklich in vier halbe Cirkel theilen; die Flächen derselben nothwendig durch den Mittelpunct der Kugel gehen müssen. Dieses ist der einzige Umstand, bey welchem diese Theilung statt findet. Ist also die Theilung wirklich geschehen, so ist kein Zweifel, daß auch dieser Umstand zugegen sey. Man siehet übrigens vor sich, daß, was von der Theilung der Cirkel gesagt wird, auch von der Theilung der Umkreise derselben richtig sey, weil allezeit der Cirkel und dessen Umkreis zugleich getheilet wird, und eine dieser Theilungen ohne die andere nicht geschehen kan.

F. 35L

§. 19. Da aber ein solcher Cirkel, dessen Fläche nicht durch den Mittelpunct der Kugel gehet, von verschiedenen Cirkeln der Kugel in zween gleiche Theile getheilet werden kan; ohne nemlich, daß er diesen hinwiederum dergestalt theile: so erfolget diese Theilung in gleiche Theile jederzeit gewiß, wenn der theilende Cirkel durch die Aze desjenigen gehet, welchen er theilet. Wil man sich dieses ohne Weitläufigkeit vorstellen, so hat man nur zu betrachten, daß in der Kugel ABCD, deren Mittelpunct in E fällt, der Cirkel FMG durch einen jeden Cirkel in zwey gleiche Theile werde getheilet werden, dessen Fläche durch den Mittelpunct desselben H gehet, weil in dem Falle die gerade Linie, in welcher die Flächen der Cirkel einander schneiden, nothwendig ein Durchmesser des Cirkels FMG wird. Nun gehet ein jeder Cirkel, welcher durch die Aze DB gehet, auch durch den Mittelpunct H. Denn die Aze gehet nothwendig durch diesen Mittelpunct XII, 14.

§. 20. Man siehet leicht, daß man diesen Satz wieder auf so verschiedene Arten ausdrücken könne, als viele der Umstände sind, welche die Aze bestimmen. Wir wollen uns wieder hiebey nicht aufhalten, insonderheit, da das meiste, was hier zu sagen wäre, bloß eine Wiederholung des vorigen ist, und nur bemerken, daß ein jeder Cirkel, welcher wie DNP durch die Aze des Cirkels FMG gehet, nothwendig 1) durch den Pol dieses Cirkels D und 2) durch den andern Pol desselben B, wie auch 3) durch den Mittelpunct der Kugel E,

4) durch H, den Mittelpunct des Cirkels FMG, wie auch 5) durch XII. den Mittelpunct eines jeden andern Cirkels der Kugel JOK, welcher geschnitten dem FMG parallel lieget, hindurch gehe, und 6) auf die Flächen der Cirkel FMG, ANC und JOK perpendicular sey; wobei nicht aus der Acht zu lassen ist, was wir schon erinnert haben, daß eine jede ebene Fläche, welche einen Cirkel durch seinen Mittelpunct schneidet, denselben in zwei gleiche Theile theile. Weil aber, wie wir XII, 14. gesehen, die Lage der Aze durch jede zwei dieser erzehlten Bedingungen bestimmt wird, so wird auch die Lage des Cirkels, welcher durch die Aze gehet, durch eben diese Bedingungen in so ferne bestimmt, daß ein Cirkel gewiß durch die Aze gehet, welcher zum Exempel durch den Pol D und durch den Pol B, oder durch den Pol D und durch den Mittelpunct E gehet, oder welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und auf die Fläche FMG oder ANC perpendicular fällt, oder welcher andere zwei der sechs erzehlten Eigenschaften hat. Und man muß demnach wieder schließen, daß ein jeder Cirkel, welcher zwei der erzehlten Eigenschaften hat, die übrigen dieser Eigenschaften alle haben werde.

§. 21. Und wenn demnach auf einen Cirkel der Kugel FMG zwei andere Cirkel desselben DNP und DCA perpendicular stehen, welche zugleich durch den Mittelpunct desselben H, oder durch den Mittelpunct der Kugel E gehen; so kreuzen ihre Umkreise einander in D und B, den Polen des Cirkels FMG. Denn sie gehen beide durch die Aze DB, und schneiden also einander in dieser Linie.

§. 22. Ist aber die Fläche des Cirkels DNP auf der Fläche des Cirkels ANC perpendicular, welcher durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und gehet überdieses der Cirkel DNP auch durch den Mittelpunct des Cirkels ANC, das ist, durch den Mittelpunct der Kugel E: so gehet nicht nur der Cirkel DNP durch die Pole D und B des Cirkels ANC; sondern, weil hinwiederum der Cirkel ANC auf dem Cirkel DNP gerade steht, und durch dessen Mittelpunct gehet, so gehet auch der Cirkel ANC durch die Pole des Cirkels DNP. XII, 20.

Kugel-Schnitte, die einander schief schneiden, oder berühren.

§. 23. Hat man eine Kugel ADCB zweymal geschnitten, und dadurch die zwei Cirkel AD und BC zum Vorscheine gebracht, welche von dem Mittelpuncte der Kugel gleichweit entfernt sind, so sind diese Cirkel einander gleich. Haben sie aber ungleiche Entfernungen von dem

§fff

dem

F. 353.

XII. dem Mittelpunkte, so ist allezeit derjenige kleiner, welcher von dem Mittelpunkte der Kugel E weiter abstehet. Denn man ziehe von diesem Mittelpunkte der Kugel an den Mittelpunkt F des Circels AD die gerade Linie EF, welche XII, 14. auf die Fläche dieses Circels perpendicular fallen, und also die Entfernung des Punctes E von der Fläche dieses Circels anzeigen wird; und ziehe den Radius des Circels FH, dessen äußerstes Punct H in der Oberfläche der Kugel liegen wird, weil der ganze Umkreis des Circels AD in dieser Oberfläche der Kugel liegt. Von H ziehe man an den Mittelpunkt E den Radius der Kugel HE; so wird das Dreieck HFE bey F rechtwinklicht, und es ist demnach das Quadrat der größten Seite desselben HE gleich der Summe der Quadrate der übrigen Seiten HF und FE IX, 66. oder kurz, $HE^2 = HF^2 + FE^2$. Macht man nun eben dergleichen auch bey dem andern Cirkel BC, und hänget erstlich den Mittelpunkt der Kugel mit dem Mittelpunkte des Circels vermittelst der geraden Linie EG zusammen, welche wieder auf die Fläche des Circels perpendicular seyn, und folgendes die Entfernung derselben von dem Mittelpunkte der Kugel E anzeigen wird, und ziehet GB den Halbmesser des Circels und EB den Halbmesser der Kugel, so ist wieder $EB^2 = EG^2 + GB^2$. Da nun aber $HE = EB$, und folgendes $HE^2 = EB^2$, so ist auch $HF^2 + FE^2 = GB^2 + EG^2$. Ist nun $FE = EG$, und folgendes auch $FE^2 = EG^2$, so ist auch nothwendig $HF^2 = GB^2$. Denn wenn dieses nicht wäre, so könnten die Summen dieser Quadrate ohnmöglich gleich seyn. Folgendes ist auch $HF = GB$. das ist, wenn die Entfernungen der Cirkel von dem Mittelpunkte der Kugel gleich sind, so sind auch ihre Halbmesser gleich, und also auch die Cirkel selbst. Ist aber EF kleiner als EG, so ist auch $EF^2 < EG^2$, folgendes muß im Gegentheile das Quadrat von HF größer seyn als das Quadrat von GB, weil sonst durch die Zusammensetzung dieser Quadrate mit den vorigen, wieder keine gleichen Summen kommen könnten. Aus $HF^2 > GB^2$ aber folget $HF > GB$, woraus man siehet, daß der Cirkel AD, wenn er von dem Mittelpunkte der Kugel E weniger entfernt ist als der Cirkel BC, größer sey als dieser Cirkel BC.

S. 24. Demnach sind unter allen Cirkeln, welche durch den Schnitt einer Kugel zum Vorscheine gebracht werden können, diejenigen die allergrößten, welche durch den Mittelpunkt der Kugel gehen. Und man kan einen Cirkel, welcher durch den Mittelpunkt der Kugel gehet, durch die Benennung des größesten oder eines der größ

größten Cirkel der Kugel, von allen übrigen Cirkeln derselben unterscheiden. Dieses pfleget gemeiniglich zu geschehen, und man nennt einen solchen Cirkel, dessen Fläche durch den Mittelpunct der Kugel geht, gemeiniglich nicht anders als einen der größeren Cirkel der Kugel. Wir haben uns aber dieser Benennung mit Fleiß bisher enthalten, weil wir erachtet, daß die Gründe der Beweise leichter befallen werden, wenn wir, indem wir von solchen Cirkeln zu reden hatten, anzeigten, daß sie durch den Mittelpunct der Kugel gehen. Man wird nunmehr die gegebene Sätze auch unter dieser Benennung leicht verstehen. Denn inskünftige werden wir uns derselben bedienen.

S. 25. Es sey nunmehr die Kugel $ABCD$, deren Mittelpunct wieder mit E bezeichnet ist, vermittelst einer Ebene geschnitten, welche nicht durch den Mittelpunct E geht, und es sey durch diesen Schnitt der Cirkel AFC entstanden, dessen Mittelpunct G ist. Man schneide die Kugel auch vermittelst einer Fläche durch ihren Mittelpunct E , und bringe durch diesen Schnitt einen der größten Cirkel derselben zum Vorschein, welcher auch den kleineren Cirkel AFC theile, aber auf demselben nicht gerade, sondern schief stehe. Dieser Cirkel sey $HFJK$, und er schneide den Cirkel AFC in der geraden Linie KF . Man mache noch einen der größten Cirkel der Kugel auf die Linie KF , oder den Theil derselben FL , perpendicular, und dieser sey $ABCD$. Weil nun FL hinwiederum auf der Ebene des Cirkels $ABCD$ perpendicular steht, und diese LF in der Fläche des Cirkels AFC so wohl, als auch in der Fläche des Cirkels $HFJK$ liegt; so sind die beiden eben genannten Cirkel AFC und $HFJK$ auf den Cirkel $ABCD$ perpendicular $X, 47$. Und der Cirkel $ABCD$, welcher dergestalt auf dem Cirkel AFC perpendicular steht, und durch den Mittelpunct der Kugel E geht, theilet diesen Cirkel in zwei Helften AFC , AKC $XII, 20$. die gerade Linie AC aber, in welcher der Cirkel $ABCD$ den AFC schneidet, geht durch dessen Mittelpunct G . Eben dieses ist auch von dem Cirkel $HFJK$ zu sagen. Der Cirkel $ABCD$ theilet auch diesen in zwei gleiche Helften, und die gerade Linie HJ vermittelst welcher diese Theilung geschieht, geht durch den Mittelpunct dieses Cirkels E , welcher zugleich der Mittelpunct der Kugel ist $XII, 2$. Das Punct L ist nothwendig von dem Mittelpuncte G verschieden, so lange der Cirkel AFC nicht durch den Mittelpunct der Kugel geht. Denn wenn L mit G zusammen fiel, oder welches eben das ist, wenn der Cirkel $HFJK$ durch den Mittelpunct G des Cirkels AFC gieng, so wäre

XII. derselbe auf dem Cirkel AFCK perpendicular, XII, 20. und nicht Abschnitt. schief, wie gesetzt wird. Man siehet auch leicht, daß bey den gesetzeten Bedingungen eben das Punct L auch von dem Mittelpuncte der Kugel E entfernt seyn müsse, weil gesetzt wird, daß der Cirkel AFC nicht durch dieses Punct E hindurch gehen sol. Da nun eben dieses E auch der Mittelpunct ist des Cirkels HFIK, so ist KF eine Sehne so wohl des Cirkels AFCK als auch des Cirkels HFIK, welche kleiner ist als einer der Durchmesser dieser Cirkel, und diese Sehne ist auf die Durchmesser AC, IH der eben genannten Cirkel perpendicular, weil diese Durchmesser beyde in der Fläche des Cirkels ABCD liegen, auf welche Fläche FL perpendicular ist.

§. 26. Da nun ein jeder Durchmesser eines Cirkels, welcher auf einer Sehne desselben perpendicular steht, wenn er verlängert wird, auch den Bogen dieser Sehne in zwey gleiche Theile theilet: V, 19. so muß so wohl der Durchmesser AC den Bogen FCK in zwey gleiche Theile FC und CK, theilen; als auch der Durchmesser IEH bey dem Bogen FHK eine eben dergleichen Theilung verrichten, EH nemlich muß ebenfals der HK gleich seyn. Man lasse nicht aus der Acht, daß das Punct C in den Durchschnitt der Cirkel ABCD und AFCK, und H in den Durchschnitt der Cirkel IEHK und ABCD, falle.

§. 27. Setzet man nun, daß das übrige alles bleibe, wie wir es beschrieben haben, und entfernet bloß in den Gedanken den Cirkel AC von dem Mittelpuncte E gegen seinen Pol D, ohne ihn jedoch auf diese oder jene Seite zu neigen, das ist, man entfernet ihn dergestalt von E daß die Axe desselben ihre Lage in der Kugel unverrückt behalt: so wird nothwendig KF immer kleiner und kleiner, welches man daraus siehet, weil diese KF sich bey dieser Bewegung immer weiter und weiter von E, dem Mittelpuncte des Cirkels IEH, entfernt, dessen Sehne sie ist. Demnach wird auch der Bogen dieser Sehne KHF immer kleiner und kleiner, und zugleich nimmet auch der Bogen KCF ab, und zwar der letztere desto mehr, weil bey dieser Entfernung des Cirkels AFCK von dem Mittelpuncte der Kugel E, zugleich der Cirkel selbst abnimmet. XII, 23. Es bleiben aber deswegen doch die Bogen CK, CF, wie auch HK, HF, einander immer gleich, weil in den Umständen, unter welchen wir diese Gleichheit erwiesen haben, keine Veränderung vorgehet. Zu gleicher Zeit nähert sich auch das Punct C, wie auch das Punct L beständig dem Puncte H, und man siehet also, daß bey fortgesetzter Entfernung des Cirkels AFC von

von dem Mittelpuncte E gegen den Pol D, die Puncte K, F, L und C sich dem Puncte H beständig nähern.

XII.
Abschnitt.

S. 28. Entfernet man nun den Cirkel AFC von E, so weit, daß das Punct L mit dem Puncte H zusammen falle, so fallen auch die Puncte C, K und F mit eben dem Puncte H zusammen, und die Cirkel AH, und IH haben also das Punct H dergestalt gemeinschaftlich, daß sie einander in diesem Puncte nicht schneiden. Man kan demnach in eben dem Verstande, in welchem man saget, daß eine gerade Linie einen Cirkel berühre, auch sagen, daß der Cirkel AH in diesem Falle, welchen die 355 Zeichnung vorstellet, den Cirkel IH in H berühre. Die Linie KF, in welcher die Cirkel einander vorher geschnitten hatten, ist verschwunden, weil es ohnmöglich ist, daß die Sehne des Cirkels IH, die auf EH perpendicular stehet, durch das Punct des Umkreises H gehen sollte. Wohl aber schneiden die zwei Flächen der Cirkel AH und IH einander in einer geraden Linie KF, welche, wie die Sehne KF, auf die Fläche des Cirkels ABHD, und also so wohl auf den Durchmesser AH, als auch auf den Durchmesser IH perpendicular ist. Denn die Flächen dieser Cirkel AH und IH sind noch auf die Fläche des Cirkels ABCD perpendicular, weil in ihrer Lage nichts geändert worden ist, und der gemeinschaftliche Schnitt derselben KF ist demnach auf eben die Fläche ABHD, X, 49. und also auf die zwei gerade Linien AH und IH perpendicular, welche in dieser Fläche liegen. Es berühret demnach diese FK so wohl den Cirkel AH als auch den Cirkel IH in dem Puncte H. V, 45.

F. 355.

S. 29. Wäre demnach der Umkreis eines der größten Cirkel IH in dieser Oberfläche beschrieben, und man wolte in eben der Oberfläche einen andern Cirkel AH beschreiben, welcher den vorigen in einem gegebenen Puncte H berührete; so müste man nur erstlich durch das gegebene Punct H einen andern Cirkel der Kugel ABHD beschreiben, dessen Fläche ebenfalls durch den Mittelpunct der Kugel E ginge, und welcher auf dem vorigen perpendicular stünde, so würde ein jeder Cirkel AH, dessen Umkreis durch H gehet, und dessen Fläche auf der Fläche des Cirkels ABHD perpendicular stehet, das ist, dessen Pole in den Umkreis ABHD fallen, XII, 20. den Cirkel HI in H berühren. Denn daraus, daß die beyden Cirkel IH und AH auf dem Cirkel ABHD perpendicular stehen, und daß ihre Umkreise durch das Punct H des Cirkels ABHD gehen, haben wir erweisen können, daß die Cirkel AH und IH einander in H berühren; und es kan bey

§§§ 3

die

XII. diesen Umständen allezeit eben das geschlossen werden. Man siehet
 Abschn. hieraus, daß unendlich viele Cirkel sind, welche den Cirkel IH in dem
 Punkte H berühren können, weil unendlich viele Cirkel auf die Fläche
 des Cirkels IH perpendicular gesetzt werden können, welche zugleich
 durch H gehen.

§. 30. Es schneidet der Cirkel ABHD den Umkreis des Cirkels
 IH außer dem H noch einmal in I, und dieses Punkt I ist in dem
 Durchmesser IH, in welchem die Cirkel AB, HD und IH einander
 schneiden, dem vorigen H entgegen gesetzt. Man kan demnach nach
 der gegebenen Anweisung auch durch das Punkt I unendlich viele Cirkel
 ziehen, welche den Cirkel IH berühren, aber nur einer derselben ist
 dem AH parallel. Wir setzen, daß dieses der Cirkel IM sey. Man
 siehet leicht, daß außer demselben kein anderer Cirkel in der Kugel
 ABHD seyn könne, welcher diese beyde Eigenschaften zugleich hätte,
 daß er nemlich so wohl dem Cirkel AH parallel läge, als auch den
 Cirkel IH berührte. Denn alle Cirkel der Kugel zwischen AH und
 IM, welche dem Cirkel AH parallel liegen, schneiden den Cirkel IH;
 und alle Cirkel der Kugel zwischen AH und dem Pole desselben D,
 oder zwischen IM und dem andern Pole B, haben mit dem Cirkel IH
 gar keine Gemeinschaft. Es können also einen jeden Cirkel der Kugel
 IH zween Parallelcirkel eben der Kugel AH und IM berühren, aber
 nicht mehrere.

§. 31. Und zwar sind diese Parallelcirkel AH und IM, welche
 beyde den größten Cirkel der Kugel IH berühren, einander gleich. Denn
 weil sie parallel sind, so haben sie eine gemeinschaftliche Axe DB, wel-
 che auf die Cirkel perpendicular fällt, XII, 14. und es sind also EG,
 EN die Entfernungen dieser Cirkel von dem Mittelpunkte der Kugel E.
 Wenn man sich nun vorstellt, daß auch durch E eine ebene Fläche
 gehe, welche den beyden AH, IM parallel läuft, so siehet man, X, 62.
 daß $HE:EI = GE:EN$. Da nun also $HE = EI$, so ist auch $GE = EN$,
 und die Cirkel AH, IM haben gleiche Entfernungen von
 dem Mittelpunkte der Kugel: sie sind demnach einander gleich. XII, 23.

§. 32. Diese zween einander gleiche Cirkel AH, IM also wer-
 den von dem großen Cirkel IH nicht geschnitten, wohl aber alle die
 jenige, die zwischen denselben ihren Flächen parallel liegen. Wir ha-
 ben diese letzteren Cirkel noch zu betrachten, und dabey insonderheit
 auf die Verhältniß ihrer Theile gegen die ganzen Cirkel zu sehen. Die
 F. 356. 356 Figur, sol eben das vorstellen, so die 354 vorgestellt hat: nur
 haben

haben wir hier, die Zeichnung desto weniger zu verwirren, an statt der ganzen nur halbe Cirkel genommen. Es sol nemlich ABCD eine halbe Kugel vorstellen, in welcher die halben Cirkel AFC, IFH auf der Fläche des Cirkels ABCD, welcher zugleich die Grundfläche der halben Kugel abgiebet, perpendicular stehen. Die Pole des Cirkels AFC sind wieder mit D und B bezeichnet, und DB ist also die Axe der Kugel, welche zu dem halben Cirkel AFC gehört. Wir sehen, daß der halbe Cirkel AFC nicht durch den Mittelpunct der Kugel E gehe, sondern daß ein anderer halber Cirkel NMO durch diesen Mittelpunct gelegt sey, welcher zugleich dem vorigen AFC parallel ist. Schneiden nun die beyden halben Cirkel IFH und AFC einander in LF, so lege man an die Axe DB noch einen andern Cirkel der Kugel, welcher zugleich durch das Punct F gehe. Von diesem Cirkel wird in der Zeichnung nur der vierte Theil DFPE vorgestellt, welcher nemlich von der Axe DE an sich bis an den Cirkel NPO erstrecket. Man siehet daraus, daß dieser Theil DFP ein Quadrante sey, weil DE auf die Fläche NPO perpendicular, und folgendes der Winkel DEP gerade ist. Es wird dadurch der Ausschnitt, welchen der Theil dieses Cirkels DPE von dem halben Cirkel AFC abschneidet, nemlich CGF dem Ausschnitte OEP ähnlich. Denn man kan DEPO als einen Körper der dritten Art betrachten. XI, 77. Also verhält sich der Bogen FC zu dem halben Umkreise AC wie sich der Bogen PO zu dem halben Umkreise NO verhält. VII, 57. Dieses alles ist ohne Schwierigkeit einzusehen, aber man siehet auch mit eben der Leichtigkeit, daß, indem man den Cirkel AFC nach und nach gegen NPO herunter rücket, das Punct F, in welchem er den Umkreis des halben Cirkels HFI schneidet, immer nach M zu fortrücken werde: Und daß demnach, wenn der Cirkel DFP immer durch dieses Punct F gehen sol, der Winkel OEP, welchen die Fläche DEP mit der Fläche DEO einschließet, immer größer und größer werden müsse. Es wird demnach auch der Bogen OP immer größer, und bekommet gegen den halben Umkreis eine desto größere Verhältniß, je mehr sich der halbe Cirkel AFC dem halben Cirkel NMO nähert: also muß auch die Verhältniß des Bogens FC zu dem halben Umkreise AFC bey dieser Näherung beständig wachsen.

§. 33. Dieses Wachsthum gehet immer fort, bis endlich der halbe Cirkel AFC mit dem halben Cirkel NMO zusammen fällt. Ist dieses geschehen, so ist auch F in M gefallen: und, weil die beyden hal-

XII.
Wachst.

XII. **Wspatz.** halben Cirkel NMO und IMH auf dem Cirkel ABCD perpendicular stehen, so sind die Bogen NM, MO eben so wohl als IM, MH einander gleich, XII, 21. folgendes ist MO so wohl als MH der vierte Theil des Umkreises seines Cirkels, welches man auch daraus siehet, weil die gerade Linie ME, in welcher die Flächen IMH, NMO, die beyde auf die Fläche ABCD perpendicular sind, einander schneiden, auch selbst auf diese Fläche perpendicular ist, X, 49. und also mit den Linien EH, EO die geraden Winkel MEH, MEO einschliesset. CF ist also immer kleiner als ein Quadrant, so lange AFC noch über dem NMO liegt.

S. 34. Entfernet sich aber der bewegete Cirkel auf der andern Seite von NMO, und kommt endlich in afc, und man hat durch das Punct f, in welchem dessen Umkreis nunmehr von dem halben Cirkel IMH geschnitten wird, und durch die Aze DB den Theil eines der größten Cirkel der Kugel Bfp gezeiget, so ist der Bogen cf grösser als der vierte Theil seines Umkreises. Denn es ist hier wieder die Verhältniß $fc : afc$ der Verhältniß $Op : NPO$ gleich. Op aber ist unstrittig grösser als der Quadrant MO. Demnach ist im Gegentheile der Bogen af kleiner als ein Quadrant.

S. 35. Wenn der halbe Cirkel AFC von dem Mittelpuncte der Kugel E auf der einen Seite so weit abstehet, als der halbe Cirkel afc auf der andern, so sind die Halbmesser dieser halben Cirkel GF und gf einander gleich, wie wir XII, 23. gesehen haben. Und weil in den geradenwinklichten Dreyecken LGE und Egl ausser den geraden Winkeln bey G und g, auch die Wechselwinkel bey E, nemlich LEG und lEg gleich sind, die gleichen Entfernungen aber der Cirkel von dem Mittelpuncte E, die Seiten dieser Dreyecke EG und Eg abgeben, so sind in diesen Dreyecken auch die Seiten GL und gl gleich. Die Dreyecke GFL und gfl haben bey L und l ebenfalls gerade Winkel; und weil also, wie wir gesehen, auch zwei Seiten des einen GF, GL, zween Seiten des andern gf, gl gleich sind, so sind auch ihre Winkel FGL, fgl einander gleich, IV, 258. und folgendes ist auch der Bogen FC gleich dem Bogen fa. V, 7. Es werden demnach die gleichen halben Cirkel AFC, afc von dem halben Cirkel HMI, in F und f gleich getheilet, aber die einander gleichen Theile liegen nach verschiedenen Seiten in Ansehung der theilenden Fläche HMI. Der Bogen FC lieget in unserer Zeichnung der Fläche HMI zur rechten, und der demselben gleiche Bogen af lieget im Gegentheile der Fläche

Fläche HMI zur linken. Man siehet leicht, daß hieraus folge, daß XII.
der Bogen af mit dem Bogen AF, wie auch fc mit dem FC halbe Kreise geben.

S. 36. Alle diese Betrachtungen sind in der Astronomie von gar großem Nutzen, und wir können aus der Ursache diese Abhandlung noch nicht abbrechen. Wir müssen noch die Dreiecke betrachten, welche drey Bogen dreier der größten Circel der Kugel in der Oberfläche derselben mit einander einschließen. Es werden vermittelst dieser Dreiecke sehr viele und wichtige Aufgaben der erwehnten Wissenschaft aufgesetzt, und es ist also unumgänglich nothwendig, wenn man in derselben etwas thun wil, daß man sich die Eigenschaften dieser Dreiecke bekannt mache.

Maasß des Winkels, welchen zweyen der größten Circel einer Kugel einschließen.

S. 37. Wenn in der Oberfläche der Kugel ABCD zweyen der größten Circel derselben ABCD und DEFG sich in der geraden Linie DB schneiden, die nothwendig durch den Mittelpunct der Kugel E gehet, und man nimmet D vor den Pol eines dritten Circels AFCE an, welchen man dergestalt leget, daß seine Fläche ebenfalls durch den Mittelpunct der Kugel E gehe, und die vorigen in GEF, AEC schneide; wodurch die Bogen DF und DC und alle übrigen, deren Flächen durch DB gehen, Quadranten werden: so ist der Bogen FC das Maasß des Winkels, welchen die beyden Flächen DEC, DEF mit einander einschließen. Denn der Winkel FEC ist demjenigen gleich, welchen die Flächen DEF, DEC mit einander machen, X. 42. weil EF und EC auf die DE perpendicular sind, indem diese DE perpendicular auf der Ebene AECG stehet: und den Winkel FEC misset der Bogen CF. Wie sich nemlich dieser Bogen CF zu einem Quadranten des größten Circels der Kugel verhält, so verhält sich der Winkel CEF zu einem geraden Winkel. Und auf die Art wird das Maasß eines Winkels CEF, welchen die Flächen zweyer der größten Circel der Kugel mit einander machen, allezeit gefunden.

F. 357.

S. 38. Aus eben dem Grunde siehet man, daß der Bogen AF das Maasß sey des Winkels AEF, welchen die Flächen DEA, DEF einschließen, und daß der Bogen AG den Winkel AEG messe, welcher der Neigung der Fläche AED auf GED, gleich ist, und so fort. Die Winkel, FEC, AEG sind einander gleich, weil GF, AC gerade

XII. Die Linien sind, die einander in E schneiden: X, 11. folgendes ist auch der Winkelschnitt. Winkel, welchen die Fläche FED mit der Fläche DEC machet, dem entgegen gesetzten Winkelgleich, welchen eben diese Flächen, wenn man dieselben fortsetzet, oder ihre Theile DEG und DEA, mit einander einschließen. Und auf eben die Art schliessen wir, daß die Winkel, welche die Fläche DEF mit der Fläche ADC machet, zusammen genommen zween geraden Winkeln gleich seyn, weil die Winkel FEC, FEA zusammen zween gerade Winkel machen, deren ersterer der Neigung der DEF auf DEC gleich ist, da der andere AEF die Neigung eben der Fläche DEF gegen die DEA misst. Wir hätten diese Sätze bereits oben bemerken können, da wir von den Lagen der Flächen handelten, doch sie sind an sich leicht, und wer die Geduld gehabt, sich das vorhergehende alles bekant zu machen, wird diese Kleinigkeiten leicht selbst übersehen.

S. 39. Es ist aber, was wir eben gesagt, daß der Bogen FC, welcher aus dem Pol D beschrieben worden, und der von diesem Punkte D um die Quadranten DC, DF entfernt ist, das Maaß des Winkels sey, welchen die Flächen DEF, DEC mit einander machen, nicht so zu verstehen, als ob man die Neigung dieser Flächen nicht anders messen könnte. Alle gerade Linien, welche in den Flächen DEF, DEC auf den Schnitt DE perpendicular gezogen werden, und in einem Punkte dieser Linie DE zusammen laufen, schliessen einen Winkel ein, welcher dem Winkel FEC, und der Neigung der Fläche DEF gegen die Fläche DEC, gleich ist. X, 44. Und ein jeder Bogen, welcher um den Pol D in der Oberfläche der Kugel, zwischen den halben Cirkeln DFB, DCB beschrieben wird, misst einen dieser Winkel, durch seine Verhältniß gegen den Quadranten, halben, oder ganzen Cirkelkreis. XI, 77. Es sind unter diesen Perpendicularlinien, auch diejenige gerade Linien, deren eine KM den Cirkel DFBG und die andere HI den Cirkel ABCD in dem Punkte D berührt. Denn die Berührungslinie KM fällt nothwendig in die Ebene, in welcher der Cirkel DFBG liegt, und ist auf den Durchmesser desselben DB perpendicular. V, 47. Und eben dergleichen ist auch von der HI in Ansehung des Cirkels ABCD zu sagen. Also ist des Winkel IDM dem Winkel CEF gleich. Indessen ist die Art, welche wir zuerst angegeben, das Maaß eines solchen Winkels zu finden, in den meisten Fällen die bequemste.

Solide Ecken.

XII.
Nothwendig.

F. 358.

§. 40. Nunmehr können wir uns zur Betrachtung der Dreyecke wenden, deren wir erwähnet haben: Es kommet bey denselben das meiste auf den Begriff an, welchen man sich davon macht. Denselben nun so deutlich zu geben als nur möglich ist, wollen wir recht von vorne anfangen. Wenn man drey oder mehrere Winkel ABC , CBD , DBE und EBA dergestalt zusammen setzet, daß ihre Spitzen B zusammen laufen, und die Seiten AB des Winkels ABC mit der Seite AB des Winkels ABE , zusammen falle, und so rings herum; die Flächen der Winkel ABC , CBD , DBE , und EBA aber alle sich gegen einander neigen; so entstehet dasjenige, was man eine Ecke, oder auch, damit man sie desto besser von einem gemeinen Winkel unterscheidet, welche zwey gerade Linien, oder zwey ebene Flächen, mit einander machen, eine solide Ecke zu nennen pfleget. Wir haben aber diesen Zusatz im Teutschen nicht nöthig, weil die Benennung einer Ecke dieselbe genugsam von einem Winkel unterscheidet.

§. 41. Man hat bey dergleichen Ecken die Linien AC , CD , DE , EA mit welchen wir die Winkel ABC , CBD , DBE , EBA geschlossen haben, in keine Betrachtung zu ziehen, weil diese in der Ecke selbst nichts ändern. Wir haben sie bloß deswegen gezeichnet, damit alles desto besser in die Augen fallen möchte, und wir werden es aus der Ursache auch künftig thun. Wir werden aber auch an statt der geraden Linien uns der Cirkelbogen bedienen, welche aus dem Puncte B , zwischen AB , CB , oder zwischen CB , DB und so ferner, können beschrieben werden, und also eine Ecke aus Ausschnitten eines Cirkels zusammen setzen. Man siehet leicht, daß auch dieses der Deutlichkeit halber könne angenommen werden, und in der Sache selbst nichts andere.

§. 42. Die Winkel, ABC , CBD aber auf deren Größe alles ankommet, und welche nicht verändert werden können, ohne daß zugleich die Ecke verändert wird, heißen die Seiten der Ecke. Es können derselben so viele seyn, als man wil, nur nicht weniger als drey, und man hat also dreyseitige, vierseitige, fünfsseitige Ecken, und so fort. Ob zwar übrigens die Ecke so gleich verändert wird, wenn man in der Größe ihrer Seiten etwas ändert; so folget doch nicht, daß alle Ecken gleich sind, die gleiche Seiten haben: wie man leicht siehet.

§. 43. Auch siehet man ohne Schwierigkeit, daß in einer jeden Ecke, sie mag so viele Seiten haben als man wil, die Summe aller

XII. **Ausschnitte.** Seiten ausser einer, grösser seyn müsse als diese letztere Seite. Denn gleichwie die gerade Linie, die zwischen zweyen gegebenen Punkten liegt, kürzer ist, als eine jede andere krumme oder gebrochene Linie, die man von einem dieser Punkte an das andere ziehen kan: also ist auch die Ebene ABE, welche zwischen den geraden Linien AB und BE liegt, von einer dieser Linien an die andere weniger ausgedehnet, als die gebrochene Ebene, welche aus ABC, CBD, und DBE zusammen gesetzt ist. Und wenn man die Winkel ABC und ABD, CBE dergestalt angenommen hat, daß zweyen derselben $ABD + CBE$ kleiner sind als der dritte ABC: so kan man aus denselben keine Ecke verfertigen, weil, wenn man die Winkel ABD und CBE gegen einander neiget, damit, wenn es möglich wäre, die Linie BD die BE erreichen möge, BD endlich in Bd fällt, und den Winkel ABd dem Winkel ABD gleich machet; und BE in Be zu liegen kommet, wenn $BCE = BCE$. Da denn, weil $ABd + CBe$ kleiner ist als ABC, die Linien Bd, Be einander nicht erreichen, oder wenigstens erst in der Fläche ABC zusammen fallen, wenn $ABD + CBE$ so groß ist als ABC, indem nunmehr der Winkel dBe verschwindet. In beyden dieser Fällen entsteht also keine Ecke: und sol demnach eine Ecke werden, so muß nothwendig $ABD + CBE$ grösser seyn als ABC. Man siehet leicht, daß eben dieses auch von solchen Ecken richtig sey, welche mehr als drey Seiten haben.

S. 44. Noch eine andere Einschränkung bey den Seiten der sollenden Ecken ist, daß dieselbe zusammen weniger betragen, als vier gerade Winkel; oder daß, wenn man die Seiten solcher Ecken mit Bogen geschlossen hat, welche aus der Spitze derselben B mit einerley Radius beschrieben worden sind, diese Bogen zusammen weniger, als den Umkreis eines Kreises, ausmachen. Dieses könnten wir aus dem Satz herleiten, welchen wir eben als bekannt angenommen haben: es lässet sich aber dasselbe auch vor sich eben so leicht einsehen, als dieser Satz: und wir achten nicht nöthig, es zu beweisen. Man siehet leicht, daß wenn man in einer Ebene um einen beliebig angenommenen Mittelpunct B einen Kreis beschreibet, und von diesem Mittelpuncte die Halbmesser BA, BC, BD, BE nach Belieben ziehet, man ohnmöglich die Ausschnitte ABC, CBD, DBE und EBA werde gegen einander neigen, und dadurch eine Ecke zutage bringen können. Dieses aber müste seyn, wenn alle Seiten einer Ecke vier gerade Winkel, oder, wenn man sie als Ausschnitte gleicher Kreise ansiehet, einen ganzen Kreis ausmachen.

machen können. Noch vielweniger also können alle Seiten einer Ecke mehr betragen, als vier gerade Winkel.

XII.
Abschnitt.

§. 45. Wenn man diese zwey Sätze zusammen nimmt, so kan man daraus schliessen, daß keine Seite einer Ecke, so viele deren auch seyn mögen, so groß seyn könne, als zwey gerade Winkel. Denn wäre eine Seite so groß als zwey gerade Winkel, so müßten die übrigen zusammen grösser seyn als zwey gerade Winkel, nach dem ersten Satz; XII, 43. wäre aber dieses, so betrügen die Seiten alle zusammen mehr als vier gerade Winkel, welches wider den letzteren dieser Sätze XII, 44. streitet.

Sphärische Dreyecke.

§. 46. Dieses sind allgemeine Eigenschaften aller mögen dieselben so viele Seiten haben als man wil.

Hier nicht nöthig andere Ecken zu betrachten als die ersten, welche nemlich nur drey Seiten haben. Denn

nicht weniger seyn können als drey, ist gar leicht einzusehen. Eine dergleichen Ecke wird in der 361. Zeichnung vorgestellt, da die Winkel, welche die Ecke einschliessen, und ihre Seiten abgeben, sind ABC, CBD und DBA, welche wir mit den Bogen AC, CD, DA geschlossen haben, die mit einerley Oefnung des Cirkels um B in den Flächen der Winkel beschrieben worden sind. Dergleichen Ecken werden wir dreyseitige Ecken nennen.

F. 361.

§. 47. Eine dreyseitige Ecke hat drey Winkel, welche die Seiten derselben mit einander machen. Der erste ist die Neigung der Seite CBA gegen die Seite DBA, welche sie in der geraden Linie BA schneidet. Der zweyte ist die Neigung der Seite CBD gegen die Seite ABD, mit welcher sie in der geraden Linie DB zusammen lauft, und der dritte ist die Neigung der Seiten ABC, DBC, welche in BC zusammen laufen, gegen den diese Winkel öfters mit drey Buchstaben böhnlich ist, und die Neigung der Seite ABC CAD. Man muß sich also hüten, daß man diesen Begriff befallen lasse, als denjenigen, welchen wir eben zu geben bemühet gewesen sind.

ist
oft-ge-
nennen
andern

§. 48. Eine dreyseitige Ecke, die vollkommen so aussiehet als diejenige; so die gegenwärtige Zeichnung vorstellet, in welcher nemlich die Seiten mit Cirkelbogen geschlossen sind, kan allezeit entstehen, wenn man eine Kugel vermittelst dreyer grossen Cirkel derselben schneidet. So stelle in der Kugel ABCD selbst ABCD einen dergleichen Cirkel vor,

F. 362.

Gg gg 3

Der

XII. Der andere sey BGDF, so den vorigen in dem Durchmesser BD Abspalte: schneidet, welchen folgendes diese Cirkel gemeinschaftlich haben. Wir sehen nicht, daß die Fläche dieses Cirkels BGDF auf die Fläche des Cirkels ABCD perpendicular sey, damit wir die Begriffe nicht ohne Noth einschränken. Denn es können zwar einer dieser Cirkel auf den andern perpendicular stehen; es ist aber dieses nicht nothwendig. Endlich sey der dritte Cirkel AFCG, welcher den ersten in AC schneidet, und den zweyten in FG, welches also die gemeinschaftlichen Durchmesser dieses Cirkels und der zween vorigen sind: so ist nunmehr DEFC eine dreyseitige Ecke, dergleichen wir erklärt haben. Ihre Seiten sind DEF, DEC, und FEC, und ihre Winkel, die Neigungen dieser Flächen gegen einander.

§. 49. Aus dieser Ursache pfleget man die dreyseitigen Ecken auch sphärische Dreyecke zu nennen. Zwar stellet man sich dieselbigen etwas anders vor, indem man sie so nennet. Ein sphärisches Dreyeck ist eigentlich ein Theil der Oberfläche einer Kugel, DFC, welcher in drey Bogen dreier der größten Cirkel der Kugel, DF, DC, FC eingeschlossen ist: und diese Bogen heißen die Seiten des sphärischen Dreyeckes. Die Winkel aber desselben sind die Winkel, welche diese Bogen bey F, D, C mit einander machen. Das ist, der Winkel bey F ist derjenige, welchen die zwey geraden Linien mit einander machen, deren eine den Bogen FD und die andere den Bogen FC in F berührt. Eben so ist es mit den übrigen.

§. 50. Es ist aber dieser Winkel bey F, wie wir XII. 39. gesehen haben, der Neigung der Seite DEF gegen die Seite CEF gleich, weil die Berührungslinien, die wir uns vorstellen, beyde auf den Halbmesser EF perpendicular stehen, und die eine in der Fläche der Seite DEF, die andere aber in der Fläche der Seite CEF liegt. Also ist der Winkel, des sphärischen Dreyeckes DFC von dem Winkel DFC der dreyseitigen Ecke DEFC nicht verschieden. Aus eben der Betrachtung erhellet, daß der Winkel DCF des sphärischen Dreyeckes mit dem Winkel DCF der dreyseitigen Ecke DEFC vollkommen überein komme: wie auch der Winkel FDC des sphärischen Dreyeckes, mit dem Winkel FDC der dreyseitigen Ecke. Was aber die Seiten des sphärischen Dreyeckes anlangt, so sind diese Bogen, und die Seiten einer dreyseitigen Ecke Winkel. Als, der Bogen DF ist eine Seite des sphärischen Dreyeckes DFC, und der Winkel DEF ist eine Seite der dreyseitigen Ecke DEFC. Und weil ein Bogen kein Winkel ist, so kan man in der That nicht sagen, daß

daß die Seiten eines sphärischen Dreieckes, und die Seiten einer dreyse-
seitigen Ecke, eigentlich einerley seyn können. Allein es wird auch der
Winkel DEF durch den Bogen DF gegeben, und der Bogen wird
hinwiederum durch den Winkel bekannt. Suchet man den Bogen
DF, so darf man nur den Winkel DEF suchen: so hat man den
Bogen, weil dieser allezeit zwischen den Seiten des gegebenen Wink-
els DEF, mit einer Oefnung die dem Halbmesser der Kugel gleich
ist, leicht kan beschrieben werden: und wenn man den Bogen DF oder
seine Verhältniß zu einem \angle
leicht den Winkel DEF.
Winkels DEF, welcher ein
abgiebet, mit der Seite D
weil es in der Anwendung
oder das andere dieser zwey
Seite DF des Dreieckes.

so erlanget man eben so
nauen Verknüpfung des
dreyseitigen Ecke DEFC
n D
omme
er für
EF de

vor einerley halten. Ja es wird in der Anwend-
destomehr aufgehoben, weil man so wohl die Seite I
hältniß gegen einen oder vier Quadranten, als auch
durch seine Verhältniß gegen einen oder vier rechte
cken pfleget, welche zwey Verhältnisse allezeit gleich

§. 51. Es wird demnach alles, was von den
Ecken der dreyseitigen Ecken wird gezeigt werden, a
Dreiecke anzuwenden seyn. Wir geben aber desi-
über von den dreyseitigen Ecken, als von den sphä-
weil jene durch die Figuren sich deutlicher ausdrück-
meisten Beweise, so von denselben hier zu geben sin-
so wir von der Neigung der Flächen gegen einand-
gar leicht fließen: da, wenn man sich die sphärisch
wie sie erkläret haben, vorstelllet, man öfters in e-
Beweise verfället, und überhaupt die Einbildungskraft stark angegriffe-
sen wird. Wir werden so gar das Wort eines sphärischen Dreieckes
künftig selten gebrauchen, und uns meistens an die Benennung ei-
ner dreyseitigen Ecke halten.

§. 52. Wir merken aber noch an, ehe wir die gegenwärtige Figur
verlassen, daß, wenn drey der größten Cirkel einer Kugel ABCD,
FBGD, AECG einander schneiden, in der That acht dreyseitige
Ecken zum Vorschein kommen, deren erste die DEFC ist, welche wir
bisher gebraucht haben, und die zwote DEFA. Diese hat die Sei-
te

XII. te DEF mit der vorigen gemeinschaftlich: Die Seite DEA aber ergänzet die Seite der erstern DEC zu zween geraden Winkeln, und AEF ergänzet die Seite FEC ebenfalls zu zween geraden Winkeln. Der Winkel DAF ist mit dem Winkel DCF einerley: der Winkel DFA aber ergänzet den Winkel DFC zu zween geraden Winkeln, und eben das thut der Winkel ADF in Ansehung des Winkels FDC. XII, 38. Die dritte dieser dreyseitigen Ecken AEFB, beziehet sich auf AEFD vollkommen so, wie sich diese AEFD auf die erste DEFC beziehet. Und überhaupt ist von jeden zwey Ecken, welche, wie die betrachteten DEFC, DEFA neben einander auf einer Fläche AFC stehen, dasjenige richtig, so von diesen zwey Ecken gewiesen worden ist; sonst haben wir von denselben nichts besonderes zu bemerken.

§. 3. Nur müssen wir noch die dreyseitige Ecke AEGB mit der DEFC, die wir am ersten betrachtet haben, vergleichen. Es sind in diesen zweyen Ecken alle Seiten und Winkel gleich, welche einander entgegen stehen. Die Seite nemlich DEF ist gleich der Seite BEG, weil sie entstanden sind; indem die zwey geraden Linien BD, FG einander in E geschnitten. Aus eben dem Grunde ist auch die Seite AEG der Seite FEC gleich; denn die Durchmesser AC, FG sind ebenfalls gerade Linien, die einander in E schneiden: und mit den Seiten AEB, DEC hat es eben die Verwandniß. Was aber die Winkel dieser zwey einander bey dem Mittelpuncte E entgegen gesetzten Ecken anlangt, so entstehen die Winkel derselben AGB und DFC, indem die zwey Flächen AFCG und BG = DF einander in der Linie FG schneiden, sie sind einander entgegen gesetzt, und demnach einander gleich. XII, 38. Eben so ist es auch mit den Winkeln ABG und CDE. Auch diese liegen zwischen den Flächen ABCD und BFDG, welche einander in BD schneiden, und sind einander entgegen gesetzt. Sie sind demnach ebenfalls gleich. Und endlich liegen GAB und DCF zwischen den Flächen AFCG und ABCD, die einander in AC schneiden, wieder nach entgegen gesetzten Seiten, und sind demnach ebenfalls gleich. Demnach haben die zwey dreyseitigen Ecken AEGB und CEDF gleiche Seiten und gleiche Winkel: und zwar sind diejenigen Winkel derselben gleich, welche zwischen den gleichen Seiten enthalten sind, und diejenigen Seiten, welche zwischen den gleichen Winkeln liegen. Man siehet leicht, daß dieses von jeden zwey andern, drey acht dreyseitigen Ecken der Kugel, welche einander gänzlich entgegen gesetzt seyn, gelten müsse.

S. 54. Diese Anmerkung wird uns dienen, die Art, wie die XII. dreyseitigen Ecken aus ihren Seiten und Winkeln zusammen gesetzt werden können, durch Betrachtungen heraus zu bringen, welcher die- nige ganz ähnlich sind, auf welche wir die ersten Beweise der gemeinen Dreyecke gründeten, indem wir sie nemlich in Gedanken in einander passen; welches sonst nicht möglich wäre. Denn es können nicht alle dreyseitige Ecken zusammen fallen, und in einander passen, welche glei- che Seiten und gleiche Winkel haben. Es fallen nemlich diese Ecken zusammen, und passen in einander, wenn man eine derselben dergestalt in die andere bringen kan, daß die Winkel, welche die Seiten dersel- ben abgeben, zusammen fallen, welches erforderet, daß ein jeder Win- kel der einen Ecke in die Fläche zu liegen komme, in welcher der Win- kel der anderen Ecke lieget, so jenem gleich ist. Denn wenn dieses ge- schiehet, so passen auch die Winkel der dreyseitigen Ecken nothwendig in einander, und es wird aus den zwey Ecken nur eine einzige. Es seyn aber $ABCD$, $abcd$ zwey dreyseitige Ecken, in welchen die Sei- ten und Winkel gleich sind, welche wir mit einerley Buchstaben be- zeichnen haben, ABC nemlich $= abc$, und $CBD = cbd$, wie auch $A = a$ und $D = d$, ferner $ABD = abd$, und $C = c$: so werden dieselbe nicht in einander passen, man mag sie lehren wie man wil, und doch sind dergleichen dreyseitige Ecken gleich zu nennen, und werden auch wirklich so genant, weil in der einen nichts ist, so in der andern nicht in eben-der Grösse vorkäme. Denn die verschiedene Lage, welche die Seiten $CB A$, CBD und cba , cbd , wie auch die Winkel A, D und a, d gegen einander haben, kan in der Grösse der dreyseitigen Ecken selbst nichts ändern. Und da also gleiche dreyseitige Ecken seyn kön- nen, welche nicht in einander passen; so kan man nicht alles, so von der Gleichheit derselben zu erweisen ist, unmittelbar auf den ersten und augenscheinlichsten Grund der Gleichheit bringen, dessen wir erwähnet haben. Nimmet man aber so oft es nöthig ist, diejenige Ecke zu Hülfe, welche einer gegebenen dreyseitigen Ecke gänzlich entgegen ge- setet ist, so hat es hernach mit der Anwendung dieses Kennzeichens ganz keine Schwierigkeit.

S. 55. Diese Anwendung aber noch mehr zu erleichtern, nehme man nochmals zwey dergleichen Ecken, welche einander an ihren Spitz- en E entgegen gesetzt sind, als $AEGB$ und $DEFC$ vor sich, welche in der 364 Figur besonders gezeichnet, und mit eben den Buchstaben bemerket sind; und stelle sich vor, daß man die Ecke $AEGB$ um die Spitze

XII. Spitze derselben E dergestalt herum drehe, daß die Seite AEG beständig in der Ebene AFCG fortgehe, in welcher sie lieget, bis sie endlich auf die ihr gleiche Seite CEF fällt: so fällt die dreyseitige Ecke AEGB nunmehr in CEFd, und der Winkel CFd derselben ist dem Winkel AGB, und folgendes dem Winkel CFD gleich: der Winkel d ist gleich dem Winkel D, und FEd dem FCD. Ferner aber ist auch die Seite FE d der Seite FED, und die Seite CED der Seite CED gleich. Die dreyseitige Ecken nun, welche mit der FEDC zusammen passen, sind der FEDC gleich, ob sie zwar in diese nicht passen, weil die erstere dieser Ecken der letzteren gleich ist.

Gründe der Gleichheit zweyer dreyseitigen Ecken.

F. 365. S. 56. Man nehme nunmehr die zwei Seiten CBA, DBA nach Belieben; aber doch eine jede derselben kleiner als einen halben Bogen: denn wir haben XII, 45 gesehen, daß eine jede Seite einer Ecke kleiner seyn müsse, als zweyen rechten Winkel, und setze sie unter einem beliebigen Winkel CAD zusammen: so siehet man sogleich, daß, wenn man an dieselbe die dritte Seite CBD legen, und dadurch die dreyseitige Ecke ABCD ausmachen wil, dieses auf nicht mehr als auf einerley Art werde geschehen können: weil durch die drey Punkte CBD sich nicht mehr als eine ebene Fläche legen läßt, X, 15. Und daraus schließet man sogleich, daß alle dergleichen Ecken, die aus den Seiten ABC, ABD, welche mit einander einen Winkel von der Größe des Winkels CAD machen, zusammen gesetzt werden können, einander gleich seyn müssen: falls ihre Seiten eben so liegen, wie in der dreyseitigen Ecke, welche wir vor uns haben, so nemlich, daß AC über die AD, und der Winkel A, welchen man angenommen, in Ansehung der Seite CD, deren Größe aus demselben bestimmt wird, zur Linken falle. Denn jede zwei dreyseitige Ecken, welche auf die Art zusammen gesetzt werden, müssen nothwendig in einander passen, wie man leicht siehet. Nämlich die Seiten CBD sind in allen solchen Dreiecken von einerley Größe, wie auch die Winkel C und die Winkel D, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden.

S. 57. Es kan aber auch der Winkel CAD anders an die Seite ABD gesetzt werden, so nemlich, daß die gegebene Seite ABC unter die ABD zu liegen komme, indem sie in ABC fällt. Daß nun in diesem Falle dennoch die dreyseitige Ecke ABDc, welche man ausmachen kan, indem man an die Seiten ABD und ABc die dritte Seite

te DBc anleget, der dreyseitigen Ecke ABDC; und also die Seite cBD der Seite CBD, der Winkel c dem Winkel C, und der Winkel ADc dem Winkel ADC gleich sey, erhellet, wenn man sich vorstellt, daß man diejenige dreyseitige Ecke, welche der ABCD bey der Spitze B entgegen gesetzt ist, an die AD dergestalt setzt, wie in der 364 Zeichnung GEBA an der FEDC steht. Es muß in dieser Lage der Winkel der der CBAD entgegen gesetzten dreyseitigen Ecke, welcher den CAD gleich ist, in den Winkel DAC passen, und die Seite desselben, welche der ABC gleich ist, auf die ABc fallen, XII, 55. Und weil auch die Seite ABD der verzeichneten dreyseitigen Ecke ABDc mit der Seite ABD, der der ABCD entgegen gesetzten dreyseitigen Ecke zusammen fällt; durch die Linien DB und cB aber nicht mehr als eine ebene Fläche geleyet werden kan: so siehet man, daß die Seiten und Winkel der dreyseitigen Ecke ABDc überhaupt mit den Seiten und Winkeln, die der ABCD entgegen gesetzten Ecke zusammen fallen, und daß folgendes die Seiten und Winkel dieser Ecke, welche eben so, wie die Seiten und Ecken in ABDc liegen, diesen Seiten und Winkeln der Ecke ABDc gleich seyn. Also sind eben die Seiten und Winkel in ABDc auch den Seiten in ABDC gleich, ob sie zwar in verkehrter Ordnung liegen, XII, 55.

J. 58. Das erste also, wodurch eine dreyseitige Ecke mit ihren übrigen Seiten und Winkeln bestimmt wird, sind zwei Seiten, und der Winkel, welchen sie einschließen; und hieraus können wir eben dergleichen Schlüsse ziehen, als wir bey den gemeinen Dreyecken aus dem, dem gegenwärtigen vollkommen ähnlichen Satz IV, 112 gezogen haben. Wir sehen ohne Weitläufigkeit hieraus, daß, wenn man setzt, daß in der dreyseitigen Ecke ABDC die Seiten ABC und ABD einander gleich sind: auch die Winkel, welche an den gleichen Seiten liegen, gleich seyn müssen, C nemlich = CDA. Denn wenn man an die Seite ABD die dreyseitige Ecke ABDc anbringt, welche der ABDC bey B entgegen gesetzt war: so ist $Ac = AC = AD$, und der Winkel C ist dem Winkel c gleich. Weil aber auch der Winkel DAC dem Winkel DAC gleich ist, so kan man die Ecke ABCD um die AB dergestalt wenden, daß ABD in ABc, und AC in AD falle: und wenn dieses geschieht, so fällt auch CBD mit der Seite cBD zusammen. Da nun also der Winkel c dem Winkel C gleich ist, und umgekehrt der Winkel ADC mit dem Winkel c zusammen fällt, und

XII. ihm folgendes nothwendig gleich ist; so muß eben dieser Winkel ADC auch dem Winkel C gleich seyn, welches wir erweisen sollten.

§. 59. Sind demnach in einer dreyseitigen Ecke alle Seiten gleich, so sind nothwendig auch alle Winkel gleich: weil jederzeit diejenigen Winkel gleich seyn müssen, welche an den gleichen Seiten liegen.

§. 60. Wir können diesen Satz verkehren, und zwar so, daß wir zeigen, daß aus einer Seite und aus zween Winkeln, die an derselben Seite liegen, nicht verschiedene dreyseitige Ecken können zusammen gesetzt werden: sondern daß in zween dreyseitigen Ecken, in denen einer eine Seite vorkommet, welche einer Seite der anderen Ecke gleich ist, und an welcher Winkel liegen, die denjenigen Winkeln gleich sind, zwischen welchen die erwähnte Seite in der anderen Ecke lieget: auch die übrigen Winkel gleich sind: wie auch die Seiten, die in den zween Ecken zwischen den gleichen Winkeln liegen. Und der Beweis hiervon ist gar leicht. Denn wenn man in der dreyseitigen Ecke $ABCD$ die Seite ABD läßt wie sie ist, und behält auch den Winkel CAD : verändert aber die Seite ABC , und machet sie in Gedanken größer oder kleiner als sie die Figur vorstellt; so wird dadurch nothwendig auch der Winkel ADC größer oder kleiner. Gehet also in dem Winkel ADC keine Veränderung vor, so kan auch in der Seite ABC keine Veränderung vorgehen. Und demnach sind in allen dreyseitigen Ecken, welche aus der Seite ABD , und aus den Winkeln CAD , ADC zusammen gesetzt sind, auch die Seiten ABC gleich, die dem Winkel ADC entgegen stehen. Hieraus aber folget, vermittelst des Satzes, welchen wir eben erwiesen haben, XII, 58, daß auch die übrigen Seiten solcher Dreyecke, und die übrigen Winkel gleich seyn müssen. Wolte man die Winkel in verkehrter Ordnung an die gegebene Seite ABD setzen, den Winkel CAD , nemlich an BD , und den Winkel CDA an AB : so würde die dreyseitige Ecke zwar nicht mit der $ABCD$, wohl aber mit der $ABcD$ zusammen passen, und also dennoch der $ABCD$ gleich seyn, weil die $ABcD$ ihr gleich ist. Dieses erhellet aus dem Beweise, welchen wir gegeben haben, gar deutlich.

§. 61. Und wenn man dieser Sache etwas weiter nachdenket, so findet man, daß daraus folget, daß auch die Seiten ABC und CBD einer dreyseitigen Ecke gleich seyn müssen, wenn die Winkel CAD und CDA gleich sind, an welchen diese Seiten liegen. Denn in die-

sem

dem Falle kan die Ecke $ABCD$ in die Ecke $ABcD$ dergestalt gepasset werden, daß der Winkel CDA in den Winkel DAc , und CAD in ADc fällt. Und da die Seite AC der Ac allezeit gleich ist, daraus aber, weil auch CBD auf die cBA passet, zugleich erhellet, daß auch CBD der cBA gleich sey; so ist zu schließen, daß auch die Seiten CBA , CBD einander selbst gleich seyn.

F. 366.

S. 62. Hierinnen also stimmen die dreyseitigen Ecken wieder mit den gemeinen Dreyecken überein; und es ist also nothwendig, daß hieraus wieder eben dergleichen Sätze folgen, als wir bey den Dreyecken bereits gehabt: und daß auch in dreyseitigen Ecken immer der Winkel größer seyn müsse, als ein anderer Winkel eben der Ecke, welcher der größeren Seite entgegen steht, IV, 240. Denn man setze, daß in der dreyseitigen Ecke $ABCD$ der Winkel CDA größer sey, als der Winkel CAD , und lege an die gerade Linie BD die Seite DBE dergestalt, daß der Winkel EDA dem Winkel CAD gleich werde: so ist die Seite EBA der Seite EBD gleich, XII, 61. Man setze zu diesen beiden Seiten den Winkel EBC , so wird auch $ABE + EBC = EBD + EBC$, das ist, $ABC = EBD + EBC$. Nun aber ist $EBD + EBC$ größer als CBD , weil in einer jeden dreyseitigen Ecke die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte, XII, 43: demnach ist auch ABC größer als CBD . Es ist aber die Seite ABC dem größeren Winkel CDA und CBD dem kleineren CAD entgegen gesetzt.

S. 63. Dieses war die erste Zusammensetzung der dreyseitigen Ecken. Man kan sie, zweitens, auch aus ihren drey Seiten verfertigen, wenn man dieselbe gehörig an einander bringet. Wir haben gleich Anfangs gezeigt, wie die Seiten beschaffen seyn müssen, aus welchen diese Zusammensetzung möglich ist. Jede zwey derselben müssen größer seyn als die dritte; eine jede ins besondere muß kleiner seyn als ein halber Cirkel, und alle dreye zusammen, müssen kleiner seyn als ein ganzer Cirkel.

S. 64. Wir übergehen die Art und Weise, wie diese Zusammensetzung zu verrichten ist, weil man sich dieselbe leicht vorstellen kan, und bemerken nur den Satz, daß bey allen dreyseitigen Ecken, welche aus gleichen Seiten zusammen gesetzt sind, so nemlich, daß einer jeden Seite der einen Ecke eine Seite der andern gleich sey: auch die Winkel gleich seyn werden, welche in den beiden Ecken zwischen den gleichen Seiten liegen. Denn man stelle sich vor, daß auf die Seite ABD

F. 367.

h h h 3

zwo

XII. ~~Wissman~~ zwei dreyseitige Ecken $ABDC$ und $ABDc$ gesetzt seyen, in welchen die Seiten ABC und ABc , wie auch DBC und DBc einander gleich seyn, und lege durch BC und Bc die ebene Fläche CBc : so bekommt man dadurch zwei andere dreyseitige Ecken $ABCc$ und $DBCc$, deren jede zwei gleiche Seiten hat, ABC nemlich $= ABc$, und $DBC = DBc$. Folgende sind die Winkel derselben, welche an den gleichen Seiten liegen, einander gleich, $ACc = AcC$, wie auch $DCc = DcC$, XII, 58. Setzet man nun diese Winkel zusammen, so wird auch $ACc + DCc = AcC + DcC$, das ist, $ACD = AcD$. Also werden in den zwei dreyseitigen Ecken $ABCD$ und $ABcD$ die Winkel ACD , AcD von gleichen Seiten $ABC = ABc$ und $DBC = DBc$, eingeschlossen; es sind demnach XII, 58 außer diesem Winkel auch die Winkel CAD und cAD , wie auch CDA und cDA , einander gleich.

§. 65. In dem Falle, welchen wir betrachtet haben, liegen die Seiten der Ecken in verkehrter Ordnung, das ist, wenn man die Ecke $ABCD$ dergestalt auf ABD setzen wolte, daß c an die Seite dieser Fläche zu liegen käme, an welcher C lieget, so müste DBc an AB liegen, und ABc an DB . Bey dieser Ordnung also der Seiten hat der Satz seine Richtigkeit. Man kan aber auch vermittelst derselben einsehen, daß auf die Seite ABD aus den Seiten ABC , DBC keine dreyseitige Ecke gesetzt werden könne, welche von der $ABCD$ verschieden wäre, wenn man die Seite ABC an AB und nicht an BD setzet, an welche BD hingegen die andere Seite DBC gesetzt werden muß, und diese Seiten dergestalt lehret, daß sie, wie die Seiten ABC , DBC über, und nicht unter der Fläche ABD zusammen stoßen. Dem wenn man sich auf AD eine gleichseitige Ecke vorstellet, deren Seite an AB der ABC gleich sey, und die Seite an BD der BDC ; behält aber das Dreieck $ABDc$, wie wir es vorher fertiget und betrachtet haben, so kan man allezeit durch den Beweis, welchen wir eben geführt, heraus bringen, daß der Winkel bey A der eingebildeten dreyseitigen Ecke, dem Winkel DAc gleich seyn müsse. Da nun der Winkel DAc dem Winkel DAC gleich ist, so muß auch der eingebildete Winkel bey A dem Winkel DAC gleich seyn. Es kan also die Seite CBA bey den gesetzten Bedingungen keine andere Lage haben als die, welche die Zeichnung vorstellet. Und eben dieses ist auch von der Seite DBC auf eben die Art einzusehen. Demnach sind auch die Winkel solcher dreyseitigen Ecken gleich, welche aus gleichen Seiten in etherley Ordnung zusammen gesetzt sind.

§. 66. Die dritte Art eine dreyseitige Ecke zusammen zu setzen ist, XII. wenn man zwei Seiten derselben annimmt, und einen Winkel, welcher zwischen diesen zwei Seiten nicht enthalten ist. Aus diesen Dingen aber lassen sich öfters verschiedene Dreiecke verfertigen; und man kan also nicht sagen, daß jede zwei dreyseitige Ecken, in welchen zwei Seiten gleich sind, und ein Winkel, auch nothwendig einander selbst gleich seyn müssen. Wir müssen die Umstände, unter welchen aus zwei gegebenen Seiten einer dreyseitigen Ecke, und aus einem Winkel derselben, welcher nicht zwischen den gegebenen Seiten liegt, zwar solche Ecken von verschiedenen Seiten zusammen gesetzt werden können, etwas genauer betrachten.

§. 67. Es sey aus der Seite ABD, aus der Seite CBA und aus dem Winkel D, die dreyseitige Ecke ABCD zusammen gesetzt. F. 368. Man lege durch AB die Ebene ABE dergestalt, daß sie auf der Seite CBD, welche man bis an d vergrößert hat, perpendicular stehe. Man mache sodann den Winkel EBc dem Winkel EBC gleich, und lege durch AB, Bc die ebene Fläche ABc: so wird die Seite ABc der Seite ABC gleich, und die dreyseitige Ecke ABcD eben so wohl als die vorige ABCD aus dem Winkel D, aus der Seite ABD, und aus der Seite ABc, welche der ABC gleich ist, zusammen gesetzt seyn. Denn in den zwei dreyseitigen Ecken ABCE und ABcE sind die Winkel AEC und AEc gerade, und folgendes einander gleich; und die Seiten cBE, CBE hat man einander ebenfalls gleich gemacht; die Seite ABE aber ist diesen beiden Ecken gemeinschaftlich: demnach sind auch die übrigen Seiten ABC und ABc gleich, XII, 58. Es sind demnach, unter den Umständen des Satzes, allezeit zwei dreyseitige Ecken möglich, so oft die Art die eine derselben aus der andern zu verfertigen, welche eben gezeigt worden ist, sich anwenden läßt. Man siehet leicht, daß dieses öfters geschehen könne, wenn das Punct C von dem Punct E verschieden ist, und also die Seite ABC nicht selbst auf der Seite DBC perpendicular stehet. Es wäre aber zu weitläufig, die Umstände genau aus einander zu setzen, bey welchen diese Zusammensetzung zweyer dreyseitigen Ecken angehet, und bey welchen sie nicht statt hat.

§. 68. Das einzige merken wir an, daß, wenn aus dem Winkel D, aus der Seite ABD, und aus der Seite $ABC = ABc$ die zwei dreyseitigen Ecken ABDC, ABDC zusammen gesetzt sind, in der dreyseitigen Ecke ABCC die Winkel ACc und AcC gleich seyn werden.

XII. den. Dieses erhellet so wohl aus dem gegebenen Beweise, als auch
 Wskmitt. daraus, weil die Seiten dieser Ecke ABC und ABc einander gleich
 sind, XII, 38. Nun aber ist der Winkel ACc die Ergänzung des Winkels
 ACD zu zweien geraden Winkeln, XII, 38; also ergänzet auch der
 Winkel AcD den Winkel ACD zu zweien geraden Winkeln. Und
 es machen also bey zwei dreyseitigen Ecken $ABCD$, $ABcD$, welche aus
 dem Winkel D und den zwei Seiten ABD und $ABC = ABc$ zusammen
 gesetzt worden sind, die Winkel C , c , welche Anfangs nicht
 gegeben waren, und welche nicht zwischen den gegebenen Seiten liegen,
 wenn man sie zusammen setzet, jederzeit zweien gerade Winkel.

§. 69. Aus eben der Figur siehet man auch sogleich, daß aus
 zweien Winkeln einer dreyseitigen Ecke, und aus einer Seite derselben,
 welche aber nicht zwischen den gegebenen Winkeln liegt, öfters zwey
 dreyseitige Ecken zusammen gesetzt werden können; und daß also nicht
 alle dergleichen Ecken nothwendig gleich sind, welche aus zweien Winkeln
 zusammen gesetzt sind, und aus einer Seite, welche nicht zwischen diesen
 Winkeln liegt. Denn die dreyseitigen Ecken $ABCD$ und $ABcD$
 sind wirklich dergestalt zusammen gesetzt. Weil der Winkel ECA
 dem Winkel EcA gleich ist, so sind auch die Ergänzungen dieser Winkel
 DCA und dCA gleich. Da nun aber dieses der Winkel d dem
 Winkel D gleich ist; so haben diese dreyseitige Ecken wirklich zweien
 gleiche Winkel, und über dieses ist die Seite des einen cBA der Seite
 des andern CBA gleich. Dennoch sind weder die übrigen Winkel
 cAd und CAD , noch die Seiten dBA , DBA einander nothwendig
 gleich; wie man leicht siehet.

§. 70. Doch machen die zwei Seiten dieser Ecken dBA und ABD
 mit einander allezeit zweien gerade Winkel aus; und diese Seiten sind
 diejenigen, welche in den zwei dreyseitigen Ecken $ABCD$ und $ABcD$
 nicht zwischen den Winkeln liegen, welche einander gleich sind. Denn
 von den Seiten dBc und DBC , die zwischen diesen gegebenen Winkeln
 d , c und D , C liegen, ist nichts dergleichen zu sagen.

§. 71. Es ist noch eine Art übrig, eine dreyseitige Ecke zusammen
 zu setzen, wenn nemlich die drey Winkel derselben gegeben oder ange-
 nommen sind. Wir werden die dahin gehörende Sätze zu zeigen keine
 grosse Weitläufigkeit brauchen; und es wird sich alles sogleich aus
 dem vorigen herleiten lassen, wenn wir nur eine besondere Eigenschaft
 F. 369. der dreyseitigen Ecken werden erwiesen haben, welche diese ist: Es läßt
 sich

sich zu einer jeden dreyseitigen Ecke $ABCD$ eine andere $abcd$ beschreiben, deren Seiten abc , cbd , dca die Ergänzungen der Winkel C XII
 D und A ; der vorigen zu zweyen geraden Winkeln sind, und deren Abschnitt
Winkel a , c , d hieniederum die Seiten ABC , CBD , und ABD zu F. 369.
zweyen geraden Winkeln ergänzen. Nämlich die Seite abc ergänzt
den Winkel C zu zweyen geraden Winkeln, die Seite abd den
Winkel A , und die Seite cbd den Winkel D . Hingegen ergänzt
die Seite ABC den Winkel a , die Seite CBD den Winkel c , und
die Seite ABD den Winkel d , ebenfalls zu zweyen geraden
Winkeln.

S. 72. Man kan die Ecke $abcd$, welche
 $ABCD$ sich dergestalt beziehet, sich nachfolgender n
stellen. Man nehme innerhalb der gegebenen Ecke
 b nach Belieben, und lasse aus demselben auf jede
eine Perpendicularlinie fallen. Es sey nemlich bE
bicular, bF auf CBD , und bG auf ABD . Ma
Perpendicularlinien nach Belieben in a , c , d , und
Deutlichkeit halben, um den Mittelpunkt b ; die E
so hat die dreyseitige Ecke $abcd$ deren Seiten die Ausschnitte abc ,
 cbd , und dca sind, die erzehlten Eigenschaften.

S. 73. Denn wenn die Fläche abc die Fläche ABC in EJ schne
det, und die Fläche CBD in JF , und wenn EH , HG die Linien sind,
in welchen die Flächen ABC und ABD von der abd geschnitten wer
den, und GK , KJ diejenigen, in welchen die Fläche abc die beiden
 ABD und CBD geschnitten, und man stellet sich den Körper $JEBFKBHG$
vor, welcher von den sechs Flächen eingeschlossen wird, die zugleich die
Seiten der zwö dreyseitigen Ecken $ABCD$, $abcd$ abgeben: so siehet
man nach einer kleinen Betrachtung, welche sich auf die gewiesene
Zusammensetzung gründet, daß bE auf EJ und EH perpendicular
sey. Denn diese bE ist auf die Fläche $EHBJ$ perpendicular. Und
aus eben der Ursache sind die Winkel bGH , bGK , wie auch bFK ,
 bFJ gerade X , 30. Demnach ist der Winkel JEH derjenige, welchen
die Fläche bEJ mit der Fläche bEH macht X , 41. und folgender dem
Winkel a gleich, und der Winkel HGK ist aus eben den Gründen
dem Winkel d , wie auch JFK dem Winkel c gleich. Weil aber
auch daraus, daß die Fläche abc auf den beiden Flächen ABC und
 CBD perpendicular steht, hieniederum fließet, daß diese Flächen
 ABC und CBD beids auf die abc perpendicular sind; und dieselbe

XII einander in CB schneiden, so ist auch diese CB auf die Fläche abc
 senkrecht. X, 49. und folgendes auf JE und JF perpendicular, und die Winkel BJE,
 BJF sind gerade. Aus eben den Gründen folget auch, daß die Win-
 kel BHE, BHG, wie auch BKG, BKF gerade seyn. Also ist wieder
 der Winkel E J F der Neigung der Fläche BJE gegen BJF, das ist,
 dem Winkel C der dreyseitigen Ecke ABCD, gleich, und der Winkel
 EHG dem Winkel A, wie auch GKF dem Winkel D.

§. 74. Nun sind in einem jeden Vierecke alle vier Winkel alle-
 zeit vier geraden Winkeln gleich IV, 235. und wenn also zween dersel-
 ben selbst gerade sind, so machen die zween übrigen ebenfalls zween ge-
 rade Winkel mit einander. Diese Umstände aber treffen bey den
 Vierecken ein, welche den Körper E J F b G = KBH einschließen. In
 dem Vierecke E b F J sind die Winkel JE b und JF b beide gerade;
 in dem Vierecke JE H B sind die zween Winkel E J B, E H B ebenfalls
 gerade, und so ist es bey allen Seiten dieses Körpers. Es müssen
 demnach auch die übrigen Winkel dieser Vierecke eine Summe geben,
 welche zween geraden Winkeln gleich seyn. Also ist der Winkel E b F
 oder abc die Ergänzung des Winkels E J F = C, zu zween geraden
 Winkeln. Eben so ergänzt E b G oder abd den Winkel EHG = A
 und F b G = cbd ergänzt den Winkel D. Das ist, die Seiten der
 Ecke abcd ergänzen die Winkel der Ecke ABCD zu zween geraden
 Winkeln. Ferner ergänzt auch in dem Vierecke JBHE der Winkel
 HB J oder ABC den Winkel HEJ = a zu zween geraden Winkeln;
 HBK oder ABD ergänzt den Winkel HGK = d, und KB J oder
 DBC ergänzt den Winkel JFK = c. Folgendes ein jeder Winkel
 des Dreieckes abcd eine Seite des Dreieckes ABCD, und eine je-
 de Seite des Dreieckes abcd einen Winkel des Dreieckes ABCD
 zu zween geraden Winkeln.

§. 75. Dieser Satz ist an sich artig und von Nutzen: Gegen-
 wärtig können wir aus demselben vors erste die Gränzen einsehen, wel-
 che die Summe aller Winkel in einer dreyseitigen Ecke niemals über-
 schreiten kan. Wenn wir wieder einen geraden Winkel mit R bezeich-
 nen, so ist $A + abd = 2R$, und folgendes $A = 2R - abd$ vermöge
 des gegenwärtigen Satzes, und D ist $= 2R - abc$, wie auch $C =$
 $2R - abc$. Setzet man diese Winkel beiderseits zusammen, so wird
 $A + D + C + 6R = abd + abc + abc$. Dieses determinet die
 Summe aller Winkel einer dreyseitigen Ecke, aus den Seiten einer
 andern, und man sieht daraus erstlich, daß diese Summe der Win-
 kel

Winkel $A + C + D$ niemals so groß seyn könne, daß sie sechs gerade Winkel ausmache. Denn man mag sich die Seiten ab , cd , abc auch noch so klein vorstellen, so müssen sie doch einige Größe haben, und weil man dieselbe von sechs geraden Winkeln abziehen muß, damit die Summe $A + C$ niemals völlig zu sechs geraden Summe doch sechs gerade Seiten der Ecke $abcd$ gänzlich aus eben der Berechnung allezeit größer seyn müsse, als die $A + C + D$ wird, wenn ab , cd werden, welche man wenn man die Summe der Seiten ab , cd , abc den Winkel betrage, sondern jene, so man von $6R$ abziehet, ist weniger als $4R$, folglich als $2R$ übrig. Die Summe aller Winkel einer dreiseitigen Ecke beträgt demnach niemals mehr als sechs gerade Winkel, und niemals weniger als zwei. Und diese Summen können in zwei solchen Ecken niemals um ganze vier gerade Winkel von einander verschieden seyn.

§. 76. Sonst können wir nunmehr dasjenige gar leicht zeigen, warum wir diesen Satz insonderheit erwiesen haben, daß nemlich aus drei gegebenen Winkeln nicht mehr als einerley dreiseitige Ecke zusammen gesetzt werden können. Wenn die Ecken A , C , D , der dreiseitigen Ecke $ABCD$ bestimmt sind, so können die Seiten der dreiseitigen Ecke $abcd$ nicht verändert werden, weil die Seite ab den Winkel A zu zweien rechten Winkeln ergänzt, und bc den Winkel C , wie auch cd den Winkel D . Es sind demnach die Seiten dieser Ecke $abcd$ von bestimmter Größe. Also sind auch die Winkel eben dieser Ecke a , c und d von bestimmter Größe, denn wir haben XII, 64. gesehen, daß so bald die Seiten einer solchen Ecke gegeben sind, auch die Winkel derselben gegeben werden, und daß sich in denselben nichts verändern lasse, so lang die Seiten nicht verändert werden. Sind nun aber die Winkel a , c , d von bestimmter Größe, so sind auch ihre Ergänzungen zu zweien geraden Winkeln ebenfalls bestimmt. Diese Ergänzungen aber sind die Seiten der Ecke $ABCD$; die Seite AB nemlich ist die Ergänzung des Winkels a , die Seite CD die Ergänzung

XII. zung des Winkels c , und ABD ergänzt den Winkel d . Also wer-
weisen. den diese Seiten ebenfalls durch die Anfangs angenommenen Winkel
 A, D, C bestimmt, und so lange diese Winkel nicht verschieden sind,
 so sind auch diese Seiten nicht verschieden. Das ist, es lassen sich
 nicht zwei dreysseitige Ecken verfertigen, welche einerley Winkel hät-
 ten, und deren Seiten verschieden wären.

Besondere Eigenschaften der geradenwinklichten dreysseitigen Ecken.

§. 77. Es werden im übrigen die dreysseitige Ecken in gerade-
 winklichte und schiefwinklichte getheilet. Eine geradenwinklichte
 dreysseitige Ecke ist diejenige, welche einen geraden Winkel hat; die
 übrigen Winkel mögen beschaffen seyn, wie sie wollen, das ist, sie mö-
 gen gerade, spitzige oder stumpfe seyn. Schiefwinklicht aber ist eine
 dreysseitige Ecke, wenn sie gar keinen geraden, sondern lauter spitzige
 oder stumpfe Winkel hat. Wir müssen bey beiden noch etwas be-
 trachten, ehe wir diese Abhandlung beschließen.

F. 370.
371.

§. 78. Will man eine dreysseitige Ecke verfertigen die geradenwink-
 licht sey, so lege man auf eine beliebige Fläche rMR eine andere
 nNR perpendicular; so ist der Winkel R oder r gerade. Sodann
 ziehe man in der Fläche rMR die Linie CM nach Belieben, und lege
 an CM eine andere Fläche NCM , ebenfalls nach Belieben,
 welche die rNR in CN schneide: so erhält man zugleich zwei dreysseitige
 und geradenwinklichte Ecken $NCMR$ und $NCMr$. Wir haben
 hier wieder vor die Seiten derselben Ausschnitte von gleichen Eirkeln
 genommen, deren Mittelpunkt C ist. Es bekommen alle diese Seiten
 besondere Namen.

§. 79. Eine der zwei Seiten, welche den geraden Winkel R ein-
 schließen, heisset die Grundseite. Man kan diese nach Belieben
 wählen, ist sie aber einmal angenommen; so heisset die andere dieser
 zwei Seiten die Perpendicularseite, und diejenige, welche dem gera-
 den Winkel entgegen gesetzt ist, wird die Hypotenuse genannt; wir
 finden im Deutschen kein recht bequemes Wort sie auszudrücken; viel-
 leicht könnte man sie die Gegenseite nennen, weil sie dem geraden Win-
 kel entgegen steht. Man kan also in der Ecke $NCMR$ die Seite
 RCM vor die Grundseite annehmen. In dem Falle ist NCR die per-
 pendicularseite, und NCM die Hypotenuse. Eben so ist es auch in
 der stehenden dreysseitigen Ecke $NCMr$. Nimmjet man in der
 selben

selben die Seite rCM vor die Grundseite an, so ist rCN die perpendicularseite, und eben die NCM ist die Hypotenuse.

XII.

Abchnitt.

S. 80. Man setze an CM die Fläche ACM perpendicular auf rMR : wodurch die Winkel AMR und AMr gerade werden: Alles übrige bleibt, wie es XII, 78. angenommen worden ist. Weil nun also die Fläche rNR auf der rMR perpendicular steht, welche die ACM in AC schneidet, so steht X. 49. auch AC auf der rMR perpendicular, und die Winkel ACr , ACR , ACM sind alle gerade. Stellet man sich nun die rechtwinklichte dreyseitige Ecke $ACMR$ vor, so sieht man, daß so bald der Winkel an der Grundfläche AMR gerade wird, auch die Perpendicularseite ACR , welche derselben nothwendig entgegen steht, ein gerader Winkel werde. Man stelle sich nunmehr vor, daß man die Seite NCM dergestalt an CM gesetzt habe, daß der Winkel an der Grundseite NMR kleiner geworden, als der gerade AMR : so sieht man so gleich, daß dadurch auch die Perpendicularseite NCR kleiner werden müsse, als der gerade Winkel ACR , weil die Fläche NCM ohnmöglich von ACM nach R geneiget werden kan, ohne daß zugleich die gerade Linie CN in der Perpendicularfläche sich der CR nähere. Wir können also schließen, daß wenn der Winkel NMR an der Grundseite RCM spitzig ist, auch nothwendig die Perpendicularseite NCR spitzig seyn müsse. Und wenn man zugleich die nebenstehende dreyseitige Ecke $NCMr$ betrachtet, in welcher der Winkel an der Grundseite NMr stumpf ist, so sieht man so gleich, daß dieses nicht seyn könne, wenn nicht auch die ihm entgegen stehende Perpendicularseite NCr stumpf ist.

F. 372.

373.

S. 81. Man sieht leicht, daß man auf eben die Art von der Perpendicularseite NCR auf den Winkel NMR schließen könne, welcher ihr entgegen steht. Ist diese Seite NCR spitzig, so kan der Winkel NMR ohnmöglich gerade seyn, sonst wäre auch die Seite ein gerader Winkel: es kan auch der Winkel NMR nicht stumpf seyn, sonst wäre auch die Seite NCR stumpf. Und wenn also die Seite NCR spitzig ist, so ist auch der Winkel NMR spitzig. Ist aber im Gegentheil die Perpendicularseite stumpf wie NCr , so kan der ihr entgegen gesetzte Winkel NMr nicht spitzig seyn, sonst wäre auch die Seite spitzig; auch kan er nicht gerade seyn, weil sonst auch die Seite gerade seyn müste. Es ist also dieser Winkel NMr in diesem Fall nothwendig stumpf. Und auf eben die Art sieht man, daß der Winkel AMR gerade seyn müsse, wenn die Seite ACR gerade ist.

XII.
Abschnitte.

§. 82. Was von der Perpendiculararseite und dem ihr entgegen gesetzten Winkel gezeigt worden, ist ohne Anstand auf die Grundseite, und den Winkel, welcher derselben entgegen steht, anzuwenden. Denn diese zwei Seiten sind bloß dem Rahmen nach, sonst aber gar nicht von einander verschieden. XII, 79. Wenn man sich nun erinnert, daß man drey Arten von Winkeln habe, spitzige, gerade und stumpfe, und daß alle spitzige Winkel von einer Art sind, wie auch alle gerade und alle stumpfe, so kan man alle diese Fälle sich kurz unter diesen Worten merken. In einer jeden geradenwinklichten dreyseitigen Ecke, ist eine jede der zwei Seiten, die den geraden Winkel einschließen von der Art des Winkels, welcher ihr entgegen steht.

§. 83. Sind also die zwei Seiten einer geradenwinklichten, dreyseitigen Ecke, welche den geraden Winkel einschließen, die Grundseite nemlich und die Perpendiculararseite, von einerley Art, wie in der 372 Zeichnung, so sind auch die Winkel der Ecke, welche ihnen entgegen stehen, von einerley Art: sind aber diese Seiten von verschiedener Art, wie in der 373 Figur, so sind auch die ihnen entgegen stehende Winkel von verschiedener Art.

§. 84. Was aber die Hypotenuse einer geradenwinklichten dreyseitigen Ecke anlanget, so ist dieselbe allezeit ein gerader Winkel, wenn einer von den Winkeln der Ecke, welche an der Hypotenuse liegen, gerade ist, das ist, XII, 80. wenn eine von den übrigen Seiten ein gerader Winkel ist. Sonst aber ist die Hypotenuse spitzig, wenn die beyden Winkel, welche an derselben liegen, von einerley Art sind, das ist, wenn die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, von einerley Art sind. Und die Hypotenuse ist stumpf, wenn einer der Winkel, die an derselben liegen, spitzig ist, und der andere stumpf, oder wenn eine der Seiten die den rechten Winkel einschließen, spitzig ist, und die andere stumpf. Dieses alles wird aus den nachfolgenden Betrachtungen erhellen.

R. 374. §. 85. Man stelle sich wieder vor, daß die Fläche $R A r$ auf der $R B r$ perpendicular stehe, und daß man in dieser Fläche $R B r$ die gerade Linie $C M$ auf $R r$ schief gezogen, so daß der Winkel $R C M$ spitzig ist, und der Winkel $M C r$ stumpf. Man ziehe auf diese Linie $C M$ die Linie $B C D$ perpendicular, und setze an diese Linie die Ebene $B A D$ ebenfalls auf $R B r$

RBr perpendicular: So wird CM auf diese Ebene BAD perpendicular seyn, X, 46. und ein jeder Winkel, welchen CM mit einer der geraden Linie einschliesst, die in der Ebene BAD durch C gezogen werden können, wird gerade seyn. Es schneidet aber diese Ebene BAD die andere RAr, welche ebenfalls auf der R.Br gerade steht; in der Linie AC, und diese Linie ist demnach ebenfalls auf die Fläche RBr perpendicular. X, 49. Leget man nun nach dieser Vorbereitung durch die beyden Linien CA und CM eine Fläche ACM, und machet also die rechtwinklichten dreyseitigen Ecken ACMR und ACMr vollkommen, so siehet man so gleich, daß die Hypotenuse dieser Dreyecke ACM ein gerader Winkel seyn werde. Es siehet aber in diesem Falle die Hypotenuse ACM auf der Grundfläche perpendicular, X, 47. und machet also mit derselben bey M gerade Winkel.

XII.

Schnitt.

S. 86. Neiget man aber die Hypotenuse gegen R dergestalt, daß der Winkel NMR spizig wird, wodurch zugleich die Perpendicularseite NCR spizig werden muß; XII. 80. und stellet sich vor, daß man die Ebene, in welcher die Hypotenuse liegt, fortgeföhret, bis sie die Fläche BAD in EC geschnitten; so ist der Winkel ECM gerade, weil CM auf der Fläche BAD perpendicular steht, und folgendes die Hypotenuse NCM selbst spizig. Es ist aber diese Hypotenuse den beyden geradenwinklichten Ecken NCMR und NCMr gemeinschaftlich. In der ersten ist so wohl die Grundseite MCR als auch die Perpendicularseite NCR spizig: und bey der darneben stehenden Ecke ist so wohl die Grundseite MCr als auch die Perpendicularseite NCr stumpf. Man muß demnach sagen, daß die Hypotenuse einer geradenwinklichten dreyseitigen Ecke spizig sey, wenn die übrigen Seiten: entweder beyde spizig oder beyde stumpf sind. Und weil die Seiten, welche den geraden Winkel einschließen, nicht beyde spizig oder stumpf seyn können, wenn nicht auch die Winkel an der Hypotenuse beyde spizig oder stumpf sind, XII, 83. so drückt man eben dieses aus, wenn man saget, die Hypotenuse sey spizig, wenn die Winkel, welche an derselben liegen, beyde spizig, oder beyde stumpf sind.

F. 375.

S. 87. Und wenn im Gegentheile die Hypotenuse auf die andere Seite dergestalt geneiget wird, daß der Winkel NMR, und folgendes auch die ihm entgegen gesetzete Perpendicularseite NCR stumpf werden, indem die Seite MCR spizig bleibt: so ist wieder der Winkel MCE gerade: und da die Hypotenuse NCM über die EC bis an NC

F. 376.

NC

XII. *Abchnitt.* NC gehet; so ist dieselbe ein stumpfer Winkel. Man siehet also, daß, wenn in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke $NCMR$, die eine der Seiten, die den rechten Winkel R einschließen, wie MCR spitzig und die andere NCR stumpf ist, die Hypotenuse NCM stumpf sey. Eben dieses siehet man auch bey der Ecke $NCMr$; die Seite NCr ist spitzig und die Seite MCr ist stumpf. Die Hypotenuse aber ist hier wieder NCM und folgendes stumpf.

S. 88. Auch in diesem Satze kan man an statt der eben gedachten Seiten die Winkel nennen, welche an der Hypotenuse liegen, und sagen, daß die Hypotenuse ein stumpfer Winkel sey, wenn dieser Winkel M und N einer spitzig, und der andere stumpf ist, wie man aus dem vorigen XII, 83. leicht siehet.

S. 89. Es lassen sich aber auch diese Sätze verkehren, und man kan schließen, daß einer der Winkel an der Hypotenuse N , M einer dreyseitigen Ecke gerade sey, wenn die Hypotenuse gerade ist, und daß einer der Winkel an der Hypotenuse spitzig sey und der andere stumpf, wenn die Hypotenuse stumpf ist, wie auch, daß wenn die Hypotenuse spitzig ist, die beyden Winkel an derselben entweder spitzig oder stumpf seyn. Denn wenn die Hypotenuse stumpf ist, so können nicht die beyden Winkel an derselben spitzig oder stumpf seyn, weil sonst die Hypotenuse spitzig seyn müste: auch kan unter denselben kein gerader Winkel seyn, weil sonst auch die Hypotenuse ein gerader Winkel seyn müste. Es bleibet also allein übrig, daß einer dieser Winkel spitzig und der andere stumpf ist. Ist aber die Hypotenuse spitzig, so kan wieder an derselben kein gerader Winkel liegen, weil sonst die Hypotenuse gerade seyn müste, auch nicht ein spitziger und ein stumpfer, weil sonst die Hypotenuse stumpf seyn müste, und es bleibet also allein übrig, daß die Winkel an der Hypotenuse entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn. Auf eben die Art schließet man auch das dritte.

S. 90. Und man kan hier wieder an die Stelle der Winkel die Seiten nennen, welche ihnen entgegen stehen, und sagen, daß wenn in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke die Hypotenuse gerade ist, so sey auch eine der Seiten, welche den geraden Winkel der Ecke einschließen, gerade; und wenn die Hypotenuse spitzig ist, so seyen diese Seiten entweder beyde spitzig oder beyde stumpf; und wenn die Hypotenuse stumpf ist, so seyen von diesen Seiten spitzig, und die andere

re stumpf. Und so viel zur Zeit von den geradewinklichten Ecken ins XII.
besondere. Der Nuße von diesen allen, wird sich inskünftige zeigen. Abschnitt.

Wie die schiefwinklichten dreyseitigen Ecken aus zweo- geradewinklichten entstehen.

§. 91. Was nun aber diejenige dreyseitige Ecken anlangt, welche keinen geraden Winkel haben, und welche man dannenhero schiefwinklicht nennet, so pfleget man dieselbe in der Anwendung sich so vorzustellen, als ob sie aus zweo geradewinklichten dreyseitigen Ecken, deren Perpendicularseiten gleich sind, entstanden wären, indem man diese Ecken entweder an einander geschoben, oder die kleinere derselben von der grösseren weggenommen hat. Es sey $NCMm$ eine dergleichen schiefwinklichte Ecke. Man stelle sich vor, daß durch die Spitze des Winkels N , oder welches auf eines hinaus kommet, durch die gerade Linie NC eine Ebene NCR perpendicular auf die entgegen gesetzte Seite MCm gefallen, welche man weiter fortführen muß, so oft es nöthig ist bis sie diese Perpendicularfläche in CR schneidet: so entstehet die schiefwinklichte Ecke der 377 Zeichnung durch die Zusammensetzung der beyden geradewinklichten Ecken $NCRM$ und $NCRm$; die schiefwinklichte Ecke der 378 Zeichnung hingegen bleibt übrig, wenn man von der grösseren geradewinklichten Ecke $NCRM$ die kleinere $NCRm$ wegnimmt. Es ist noch zu zeigen, in welchem Falle das erstere, und in welchem Falle das zweyte statt finde.

F. 377.
378.

§. 92. Man siehet leicht, daß die Ecke $NCMm$ durch die Zusammensetzung der zweo geradewinklichten Ecken $NCRM$ und $NCRm$ entstehe, wenn die Perpendicularfläche NCR die Seite MCm erreicht, ohne daß man nöthig hat, dieselbe zu erweitern: in welchem Falle der Winkel MNm die Summe ist der beyden Winkel MNR und mNR , und die Seite MCm die Summe der beyden Seiten MCR und RCm . Sol aber dieses seyn, so ist nicht möglich, daß ein Winkel M und m spizig und der andere stumpf sey. Denn, ist in der geradewinklichten Ecke $NCRM$ der Winkel M spizig, so ist auch die ihm entgegen gesetzte Seite NCR spizig. XII, 80. Wäre nun zugleich der andere Winkel m stumpf, so wäre eben die Seite NCR auch stumpf, weil sie in der geradewinklichten Ecke $NCRm$ dem Winkel m entgegen steht. Dieses aber ist widersinnisch, und

§ 91

es

XII. es folget also daß NCR selbst in die Seite MCm fällt, wenn die
 Abschnitt. Winkel M und m entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn.

§. 93. Ist aber im Gegentheile in der 378 Zeichnung, da die Perpendicularseite NCR nicht in die Seite MCm der dreyseitigen Ecke $NCMm$ fällt, sondern man diese verlängern muß, damit dieses geschehe, und da also MNm durch den Abzug des Winkels mNR von dem Winkel MNR , entsteht, und die Seite MCm übrig bleibt, wenn man von MCR die Seite mCR wegnimmt: ist, sage ich, in diesem Falle der Winkel M spitzig, so ist auch die Perpendicularseite NCR spitzig. Wäre nun auch der Winkel NmM spitzig, so wäre seine Ergänzung NmR stumpf, und also wäre auch NCR stumpf, XII, 80. welches nicht möglich ist. Es ist demnach bey der gesetzten Bedingung nicht möglich, daß die beyden Winkel M und MmN spitzig seyn sollten. Und eben so siehet man auch, daß sie nicht beyde stumpf seyn können. Denn ist M stumpf, so ist auch NCR stumpf. Wäre nun auch MmN stumpf, so wäre die Ergänzung dieses Winkels zu zween geraden, nemlich NmR spitzig, und also wäre auch NCR spitzig, welches dem vorigen widerspricht. Es muß demnach in diesem Falle einer der Winkel M und MmN spitzig, und der andere stumpf seyn.

Drenzehender Abschnitt.

Gründe der Berechnung ausgedehnter Größen.

Einleitung.

§. 1.

Sie haben bisher die vornehmsten Eigenschaften der ausgedehnten Größen betrachtet, und sind bemühet gewesen zu zeigen, wie die Geometrische Aufgaben aufgelöst werden, welche bey den Figuren vorkommen, falls sie die Kräfte der gemeinen Geometrie nicht übersteigen, und keine andere Linien, als die geraden und die Umkreise der Eirkel, erfordern; wie auch keine andere Theilung der Winkel als diejenige, welche wir zu verrichten gelehret haben, da nemlich ein Winkel in zwey gleiche Theile getheilt wird. Ausser diesen aber sind noch solche Aufgaben ausgeschlossen, welche sich auf die Verhältniß des Umkreises eines Eirkels zu seinem Durchmesser gründen, als welche anzugeben ebenfalls in der Gewalt der gemeinen Geometrie nicht ist. Wie wir gesehen haben, so wird zur Auflösung dieser Aufgaben weder die Rechenkunst, noch sonst einige andere Wissenschaft erfordert: sondern die bloße Geometrie ist dazu hinlänglich.

§. 2. Doch haben wir bereits hin und her erinnert, daß der Gebrauch geschickter Instrumente in der Ausübung uns öfters eine große Erleichterung geben könne; und von der Rechenkunst ist eben das zu sagen, wenn man dieselbe gebrauchen will, Geometrische Aufgaben aufzulösen. Es geschieht dieses öfters mit gar grosser Bequemlichkeit: ja man kan vermittlest der Rechenkunst zuweilen auch solche Aufgaben auflösen, welche in der Gewalt der bloßen Geometrie nicht sind, als zum Beispiel, diejenige, welche sich auf die Verhältniß des Umkreises eines Eirkels zu seinem Durchmesser gründen, oder, welche eine beliebige Theilung eines Winkels erfordern. Es ist unser Zweck hier nicht, daß wir den Gebrauch der Instrumente weisen, und derselbe ist auch vor sich etwas leichtes und von demjenigen, welcher die Geometrie gründlich durchgegangen, ohne Schwierigkeit einzusehen. Aber

XII. **Abſchnitt.** Die Auflösungen der Geometrischen Aufgaben, vermittelt der Rechenkunst, müssen, wegen ihres ungemeinen Nutzens in der Anwendung dieser Wissenschaft, allerdings angezeigt werden, und hiezu haben wir die folgenden Abtheilungen gewidmet.

§. 3. Es sind zwar diese Auflösungen selten vollkommen richtig, so nemlich, daß man bey denselben, wie bey den Geometrischen darthun könnte, daß sie gar nicht fehlen. Ja man siehet meistens, daß sie wirklich fehlen, und man kan dieses xerweisen. Allein man ist auch im Stande, diese Fehler zu vermindern, so weit man wil, oder wenigstens so weit, daß unsere Sinnen keinesweges hinreichen, einigen Fehler zu bemerken. Und dieses ist bey einer jeden Anwendung der Geometrie auf körperliche Dinge hinlänglich. Denn ein Fehler, welcher auf keine Weise bemerkt werden kan, ist hier vor keinen Fehler zu halten. Und fehlen nicht auch die Geometrische Auflösungen, wenn sie nicht in puren Begriffen bestehen, sondern bey etwas körperlichen angewendet werden? Ist es möglich eine auf das Papier gezeichnete gerade Linie in zwey vollkommen gleiche Theile zu theilen, und kan jemand versprechen dieses dergestalt zu verrichten, daß der eine Theil nicht einmal um den hundersten Theil der Breite eines Haars grösser wäre als der andere? Wie genau müssen die äuffersten Punkte der Linien bestimmt werden, wenn man dieses verrichten wolte, und wie spitzig müssen die Schenkel des Cirkelinstrumentes seyn, dessen man sich dazu bedienen könnte? Reichen unsere Sinnen zu diese Punkte so genau zu bestimmen, oder sind so zarter Instrumente zu bedienen? Müssen nicht alle Linien, welche wir zeichnen, von einer merklichen Breite seyn, wenn wir sie sehen sollen? Dieses alles, macht, daß dasjenige so wir durch die genauesten Zeichnungen heraus bringen, von demjenigen gar weit entfernt ist, so wir heraus bringen würden, wenn es in unserer Gewalt wäre, den Begriffen, welche wir von der Auflösung Geometrischer Aufgaben haben, genau zu folgen.

§. 4. Aus der Ursach haben die Geometrische Auflösungen, wenn man bloß auf den Nutzen in der Anwendung siehet, vor denen, die vermittelt der Zahlen gemacht werden, gar keinen Vorzug: ja diese letztern bringen vielmehr meistens was gesucht wird, genauer heraus, als die erstern. Es ist möglich, daß man eine gerade Linie zeichne, welche dem Umkreis eines Cirkels eben so genau gleich ist, als eine gerade Linie bey andern; ob man zwar sich zu dem erstern der Rechnung zu bedienen gezwungen ist, und das letztere eine der ersten und leichtesten Ausübungen der Geometrie ausmachet.

S. 5. Da

S. 5. Damit nun diese Auflösungen vermittelst der Zahlen wirklich verrichtet werden können, ist es nöthig, daß man die Dinge, welche in der Geometrie betrachtet werden, die geraden Linien nemlich, die Winkel, den Eirkelkreis, die Oberflächen, und so weiter, durch Zahlen ausdrücke. So bald dieses geschehen ist, kan man mit denselben wie mit andern Zahlen umgehen, und vermittelst der bekannten Rechnungsarten aus diesen Zahlen andere heraus bringen, welche Grössen ausdrücken, die von jenen auf die Art abhängen, wie in der Geometrie gewiesen wird. Dieses geschieht, wenn man die ausgedehnten Grössen nach einer beliebigen Einheit misst, und dieses ist bey geraden Linien etwas leichtes.

Gerade Linien durch Zahlen auszudrücken.

S. 6. Es sey die gerade Linie A von was Länge man sich dieselbe vorstellen wil, durch eine Zahl auszudrücken, welche sich auf eine nach Belieben angenommene Einheit V beziehet: so messe man erstlich die A durch V. Wird nun die V, wenn sie etliche, zum Exempel, 5 mal genommen wird, der A gleich, so drückt die Zahl 5 die Linie A aus. Ist aber dieses nicht, und ist von der A noch ein Stück B übrig geblieben, nachdem man V so oft auf dieselbe gelegt hat, als geschehen können, (welches B demnach kleiner seyn muß als V,) so kan man dieses Ueberbleibsel durch einen Bruch ausdrücken, der sich auf die V beziehet: und man findet bald einen Bruch, welcher dieses so genau thut, als nöthig ist. Viel bequemer aber ist es, wenn man dazu allezeit zehentheilige Brüche gebrauchet, welches wir demnach allezeit thun wollen. Man theile also die V in zehn gleiche Theile, und messe die B, welche kleiner ist als V durch diese Zehentel der V. Gesezt, man finde, daß B noch 6 dergleichen Theile der V enthält, so wird A durch $5,6$ ausgedrückt. Wäre aber B etwas grösser, als $0,6$ der V, aber kleiner als $0,7$; so müste man jedes Theilchen der V wieder in zehn gleiche Theile, und folgendes die ganze V in hundert Theilchen theilen, und den nunmehrigen Ueberschuß der B über $0,6$ der V, nach diesen Theilchen, eben so messen wie man B durch die Zehentel der V gemessen, und so immer fort, bis man entweder nicht weiter theilen kan, weil die Theilchen einzeln nicht mehr sichtbar sind: oder, bis man auf solche Kleinigkeiten kommt, welche in der Anwendung vor nichts zu halten sind, und in Ansehung der V oder der A in keine Betrachtung kommen können. Man siehet leicht, daß man gar bald auf solche Kleinigkeiten hinaus komme. Meistentheils pfleget man den zehentelsten

XIII. senften Theil eines Ganzen in Ansehung desselben auch dann vor nichts ~~Abchnitt~~ zu halten, wenn man noch ziemlich genau verfähret.

§. 7. Man kan auf die geraden Linien, welche dergestalt aus gleichen Theilchen zusammen gesetzt sind, alles dasjenige anwenden, so VI. von den Verhältnissen solcher Grössen gewiesen worden ist, welche aus gleichen Theilchen zusammen gesetzt sind, ohne einen grössern Fehler zu begehen, als denjenigen, welchen man gleich Anfangs in der Ausmessung der Linien begangen hat. Man kan zu dreyen geraden Linien, welche dergestalt durch Zahlen ausgedrückt sind, die vierte Proportionallinie eben so finden, wie man zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl findet: VI. 115. Und zwischen zwey Linien, die man durch Zahlen ausgedrückt hat, wird die mittlere Proportionallinie ebenfalls gefunden, wenn man aus dem Product dieser Zahlen die Quadratwurzel ziehet. VI. 120. Dieses alles ist leicht einzusehen. Es seyn drey Linien A, B, C, welche, wenn man sie durch die Einheit V misst, durch die Zahlen 6, 5; 7, 2 und 8 ausgedrückt werden, so wird die vierte Linie, welche mit den drey gegebenen die Proportion voll

macht durch die Zahl $\frac{7,2 \times 8}{6,5}$ ausgedrückt. Diese Zahl ist etwas mehr als 8,86: und wenn man also einer Linie 8,86 Theilchen von der Grösse derjenigen giebet, mit welchen man die gegebenen Linien A, B, C gemessen hat; so ist sie die vierte Proportionallinie zu den gegebenen dreyen. Eben so ist es, wenn zwey Linien durch die Zahlen 4 und 64 ausgedrückt werden, und man sol zwischen denselben die mittlere Proportionallinie finden. Es drückt die mittlere Proportionalzahl zwischen den gegebenen Zahlen 4 und 64, das ist, die Quadratwurzel aus 64×4 oder 256 welche 16 ist, die mittlere Proportionallinie zwischen den zwey gegebenen aus: und eine Linie von 16 solchen Theilchen, deren die erstere der gegebenen 4, und die zweyte 64 hat, ist die mittlere Proportionallinie zwischen den gedachten zwey Linien.

§. 8. Es ist aber auch nicht nöthig, daß alle vier Proportionallinien durch einerley Einheit gemessen werden; sondern, wenn die erste und die zweyte durch einerley Einheiten gemessen werden, wie auch die dritte und vierte, und die Zahlen welche die Linien ausdrücken, sind proportional, so sind die Linien doch proportional, ob zwar die Einheit, mit welcher die letztern zwey Linien gemessen sind, von der Einheit verschieden ist, mit welcher man die erstern zwey gemessen hat. Es sey

$$A=2,$$

$A=2$, und $B=3$, und die Einheiten in A und B seyn einander gleich. XIII. Es sey $C=1$, und $D=1\frac{1}{2}$ und die Einheiten in C und D seyn einander wieder gleich, aber von den vorigen Einheiten in A und B verschieden: so ist $A:B=C:D$, weil die Zahlen, welche A, B, C, D dergestalt ausdrücken, proportional sind, $2:3=1:1\frac{1}{2}$. Man siehet dieses daraus ein, weil, da die Verhältniß $1:1\frac{1}{2}$ der Verhältniß $2:3$ gleich ist, und C:D sich verhält wie $1:1\frac{1}{2}$, sich auch C:D wie $2:3$ verhalten muß. Ist aber dieses, so muß sich auch C in zwey solche Theile theilen lassen, deren drey auf D gehen, gleich wie A zwey Drittel der B enthält. Und wenn man sich vorstellt, daß dieses wirklich geschehen sey, so siehet man leicht, daß die Verhältnisse A:B und C:D einander gleich sind. VI, 30.

Die Winkel durch Zahlen auszudrücken.

§. 9. Wie die Winkel durch Zahlen auszudrücken sind, haben wir größten Theils bereits gewiesen. VII, 65. Man theilet den Umkreis eines jeden Circels in 360 gleiche Theile, deren folgendes auf den halben Umkreis 180, und auf den Quadranten desselben 90 gehen werden. Diese Theile nennet man Grade. Einen jeden Grad theilet man wieder in 60 gleiche Theile, welche man Minuten nennet, und einer jeden Minute giebt man 60 Secunden. Denn weiter hat man selten nöthig zu gehen. Man bezeichnet die Verwirrung zu vermeiden, diese Theile folgender gestalt: 53° , $27'$, $32''$ bedeuten 53 Grade, und 27 Minuten, und 32 Secunden. Durch die Zahl nun der Grade, Minuten und Secunden, welche in dem Bogen enthalten sind, welcher aus der Spitze eines Winkels zwischen seinen Schenkeln beschrieben wird, drückt man die Größe des Winkels aus, und sagt zum Exempel, der Winkel habe 53° , $27'$, $32''$, wenn der Bogen so viele Grade, Minuten und Secunden enthält. Es ist frey, mit was vor Defnung des Circuls man den Bogen beschreibe, weil alle Bogen, welche um die Spitze eines Winkels zwischen dessen Schenkeln beschrieben werden können, einerley Verhältniß gegen ihren ganzen oder halben Umkreis haben, VII, 52. und folgendes nothwendig durch einerley Zahlen von Graden, Minuten und Secunden ausgedrückt werden, da man die ganzen Umkreise durch einerley Zahlen ausdrückt, indem man einen jeden Umkreis in 360 Theile theilet.

§. 10. Wenn man nun die Zahl der Grade eines Winkels weiß, so kan man leicht die Zahl der Grade des dritten oder fünften oder siebenten

XIII. benden 2c. Theils deſſelben durch Rechnung finden, und wenn man
 Abſchnitt. den Bogen, welchen man um die Spitze des Winkels zwiſchen deſſen
 Schenkeln beſchrieben, in ſeine Grade getheilet hat, ſo iſt es hernach
 leicht einen Winkel zu machen, welcher der dritte, fünfte oder ſieben-
 de 2c. Theil deſſelben Winkels ſey. Hält zum Exempel ein Winkel
 53, 27 (wir laſſen die Secunden als Kleinigkeiten weg, welche ſelten
 zu beobachten ſind) ſo hält der dritte Theil deſſelben 17, 49, der fünfte
 10, 41, der ſiebende 7, 38. Und man kan alſo dieſen Winkel aus
 einem getheilten Cirkelkreis leicht haben.

§. 11. Man verfähret aber folgender geſtalt, wenn man den Um-
 kreis eines Cirkels in ſeine 360 Theile, oder in ſeine Grade, theilen wil.
 Erſtlich theilet man ihn in 6 gleiche Theile vermittelſt des Halbmeyſers,
 welcher ſich in den Umkreis des Cirkels ſechs mal herum tragen läßt,
 wie wir V, 89. geſehen haben. Jeden dieſer Theile theilet man in
 zwey gleiche Theile, und jeden dieſer Theile wieder in zwey, welches,
 wenn man wil, geometriſch geſchehen kan: ſo wird jeder der 6 vorigen
 Theile in viere getheilet, und es bekommt alſo der ganze Umkreis 24
 gleiche Theile. Nun theile man jeden dieſer Theile in 3 durch Verſe-
 hung des Cirkels, ſo bekommt man in dem ganzen Umkreis drey mal
 24, das iſt 72 Theile. Und wenn man jeden dieſer Theile wieder
 durch die Verſetzung des Cirkels in 5 gleiche Theile theilet, ſo bekommt
 endlich der ganze Umkreis deren 360, welches ſeine Grade ſind. Auf
 eben die Art verfähret man, wenn man auch Minuten haben wil.

Ausmeſſung der geradelinichten Figuren.

§. 12. Wil man die Gröſſen der geradelinichten Figuren durch
 Zahlen ausdrücken, oder mit einem Worte, meſſen: ſo nimmet man
 dazu wieder eine Oberflähe als die Einheit oder das Maas an, aus
 welchem die Gröſſe der Figur beſtimmt werden ſol, und wie wolte man
 es anders machen? Die Figur dieſes Maasſes iſt beliebig, aber meiſten-
 theils ein Quadrat V, deſſen Seite man vor die Einheit annimt, aus
 welcher die Seiten der Figur, welche durch das Quadrat V zu meſſen
 iſt, ausgedruckt werden ſollen. Dieſe Figur nun iſt entweder ein ge-
 radewinklliches Viereck, oder kan doch in ein geradewinklliches Viereck
 verwandelt werden. IX, 22. Man kan ſie auch in Dreyeck zerſchnei-
 den, und ein jedes dieſer Dreyecke in ein geradewinklliches Viereck ver-
 wandeln, IX, 19. und alſo die ganze Figur als eine Summe verſchie-
 dener geradewinkllicher Vierecke anſehen. Alſo kommet endlich alles
 dar-

darauf hinaus, daß man bloß ein geradwinklichtes Viereck zu messen XIII. wisse. Dieses aber erfordert nichts anders, als daß man eine Zahl finde, welche die Verhältniß der Figur zu der Einheit V ausdrücke. Wir haben bereits gewiesen, wie dieses zu thun sey, ohne daß man die V wirklich zu wiederholten malen auf die Figur lege, welche auszumessen ist; oder die Figur in Theile von der Größe V theile. Ist die Grundlinie des Viereckes ABC , welche man aus V messen sol AB , und die Höhe CB ; so ist die Verhältniß des Quadrats V , dessen Seite wir L nennen wollen, zu dem ABC , aus den Verhältnissen $L:AB$ und $L:BC$ zusammen gesetzt. IX, 47. Man drücke beyde Verhältnisse durch Zahlen aus, das ist, man messe AB so wohl als BC aus L .

Gesetzt es sey $L:AB$:
Verhältniß $V:ABC=1$
wenn man wirklich n
 ABC enthält. Das Qu
und 6 Hundertel, od
hat demnach ABC di

S. 13. Ein kleine
es in der Anwendung
then, welche wir zu de
gebracht haben. Ma
Quadrats V , welches
durch eben die Seite
Hat man nun daburd
p. 2. dieser Seiten de
durch einander, und u
wird anzeigen, wie oft die Einheit V in dem Viereck ABC enthalte
ten sey.

S. 14. Es ist aber ein Zehntel der quadratischen Einheit, oder des F. 380.
Quadrats EF , dessen Seite EG vor die Einheit angenommen wird,
nach welcher die Längen gemessen werden, ein geradwinklichtes Viereck
 HF , dessen Grundlinie HG dem zehnten Theil der Seite des Qua
drats EF , und die Höhe GF dieser Seite selbst gleich ist. Und der
zehnte Theil eines solchen Viereckes ist das Quadrat FI , dessen Seite
der HG , das ist, dem Zehntel der Seite EG des Quadrats EF , gleich
ist. Und eben dieses FI ist der hundertste Theil des Quadrats EF , wie
man dieses alles aus der Figur gar leicht sieht. Und wenn demnach
 V das Quadrat EF bedeutet, und es wird eine Figur, die man durch
FI II die

XIII. die V gemessen hat, durch die Zahl 48, 76 ausgedrückt: so wird das ~~Wespnit~~ durch angezeigt, daß diese Figur das ganze V 48 mal enthalte, und über dieses 7 Theile von der Größe HF , und 6 Theile von der Größe FI . Oder man kan auch kürzer sagen, die Figur, welche durch 48, 76 ausgedrückt wird, enthalte 48 Quadrate von der Größe der V , und 76 Quadrate von der Größe des FI , dessen Seite der zehente Theil ist, der Seite des Quadrats V . Denn, wie wir gesehen haben, so ist FI der hundertste Theil des V , und die 76 in der Zahl 48, 76 welche sich auf die V beziehet, bedeuten 76 Hundertel der V .

S. 15. Wenn die Figur, welche man durch V ausgemessen hat, durch noch mehrere zehentheilige Brüche ausgedrückt wird, als zum Exempel, durch diese Zahl 52, 7635, so beziehen sich die zwey Ziffer, welche auf die erstern zwey, die zehentheilige Brüche bedeuten, folgen, hier 35, auf das Quadrat FI eben so wie sich die vorigen 76 auf das Quadrat EF beziehen, und bedeuten also die 35 so viele Quadrate, deren Seiten der zehente Theil der HG sind, welche HG der Seite des Quadrats FI gleich ist. Und so gehet es immer, wenn noch mehr Zahlen unter den zehentheiligen Brüchen vorkommen. Und es bedeuten demnach in der Zahl 52, 763530 die Ziffer vor dem Zeichen der einfachen Einheiten (,) 52 Quadrate der EG , die nächsten zwey 76 bedeuten Quadrate der HG , das ist, Quadrate des zehenten Theils der EG ; die darauf folgende zwey, 35, Quadrate des zehentheils der HG , oder des hundertsten Theils der EG , und die zwey nächsten, 30 Quadrate des tausendsten Theils der EG , und so immer fort, wenn noch mehrere Ziffer vorhanden sind. Damit man sich dieses deutlicher vorstellen möge, bezeichnet man zuweilen dergleichen Ziffer auch der gestalt 52, 76' 35" 30". Es muß jede Classe zwey Ziffer haben, und falls die Zahl der Ziffer, welche Brüche bedeuten, ungleich ist, muß man am Ende eine 0 anhängen, damit die Classen voll werden.

S. 16. Es ist in diesem wenigen alles enthalten, so zur Ausrechnung aller geradlinichten Figuren zu wissen nöthig ist, und man kan die kleinen Vortheile, die bey dieser Rechnung vorkommen können, aus demjenigen, so in den vorhergehenden Betrachtungen gemiefen worden ist, gar leicht schließen. Man siehet nemlich, daß überhaupt ein jedes Parallelogrammum zu berechnen, man nur die Grundlinie desselben durch seine Höhe, oder eigentlich zu reden, die Zahl welche die Grundlinie aus dem angenommenen Maasstab ausdrückt, durch die Zahl, welche die Höhe aus eben dem Maasstab angiebt, zu multipliciren ha-

be, um die Zahl zu finden, welche die Grösse des Vierecks aus der Quadratischen Einheit anzeigt: weil nämlich ein jedes Parallelogramm einem geradwinklichten Viereck gleich ist, welches eben die Grundlinie und eben die Höhe hat. IX, 2. XIII. Abschn.

§. 17. Eben so leicht schliesst man, daß, wenn man den Inhalt eines jeden Dreiecks haben wil, man die Grundlinie desselben durch die halbe Höhe, oder die Höhe durch die halbe Grundlinie, multipliciren müsse: weil ein jedes Dreieck einem geradwinklichten Viereck gleich ist, dessen Höhe halb so groß ist, als die Höhe des Dreiecks, und welches mit dem Dreieck einerley Grundlinie hat; oder dessen Grundlinie halb so groß ist, als die Grundlinie des Dreiecks, und dessen Höhe der Höhe des Dreiecks gleich ist.

§. 18. Hat man eine geradlinichte Figur, von was Art sie auch seyn mag, dergestalt berechnet, und man wil ein Quadrat haben, dessen Inhalt so groß als der Inhalt der berechneten Figur ist, so darf man nur aus der Zahl, welche den Inhalt ausdrückt, die Quadratwurzel ziehen, diese ist die Seite des gesuchten Quadrats. Es sey der Inhalt einer Figur 1049, 76, wie groß ist die Seite des Quadrats, welches dieser Figur gleich ist. Man nehme die Quadratwurzel der Zahl 1049, 76, welche ist 32, 4. Diese ist die Seite des Quadrats genau. Man siehet aber leicht, daß man nicht allzeit auf solche Zahlen kommen werde, welche die gesuchten Seiten genau ausdrücken, weil nicht alle Zahlen, so die Figuren messen, Quadratzahlen seyn können.

§. 19. Dieses kan uns so gleich eine Anleitung dazu geben, wie in einem geradwinklichten Dreieck aus zwei Seiten desselben die dritte zu finden ist. Es sey in einem solchen Dreieck die grösste Seite, die nemlich dem geraden Winkel entgegen gesetzt ist; H, die übrigen Seiten, die den geraden Winkel einschliessen seyn B und P. Weil nun $H^2 = B^2 + P^2$, IX, 66. so siehet man, daß, wenn B und P in Zahlen gegeben sind, man nur die Quadratzahlen aus diesen Wurzeln machen, und nachdem man dieselbe zusammen gesetzt, die Wurzel von der Summe nehmen müsse, um die grösste Seite H zu erhalten. Es sey $B = 3$, $P = 4$, so ist $B^2 = 9$, und $P^2 = 16$, folgendes $B^2 + P^2 = 25 = H^2$, und demnach H selbst $= 5$.

§. 20. Es sey zweitens in einem geradwinklichten Dreieck aus den zwei Seiten H und P die Seite B zu finden. Weil nun $H^2 = P^2 + B^2$, so $H^2 - P^2 = B^2$, und wenn man also das Quadrat der

XIII. gegebenen Seite P von dem Quadrat der größten Seite H abziehet, so
 Abschnitte. bleibt das Quadrat der Seite B übrig, aus welchem man durch die
 Ausziehung der Quadratwurzel ferner die Seite B erlangen kan. Es
 sey $H=5$, $P=4$, so ist $H^2=25$, $P^2=16$, und $H^2 - P^2 = 25 - 16 =$
 $9 = B^2$, folgendes $B=3$. Man merke bey dieser Gelegenheit die beson-
 dere Eigenschaft dieser Zahlen 3, 4, 5, welche darinne besteht, daß,
 wenn man drey Seiten annimt, die sich durch
 lassen, und setzet aus denselben ein Dreieck zu
 geradwinklich wird. Es können noch andere
 ben werden, diese Drey aber sind unter allen

rücken
 repect
 gegen

Ausmessung verschiedener Körper.

§. 21. Zur Ausmessung der Körper wird wieder ein Körper an-
 genommen, weil wed
 Körper einige Verhält-
 nissung suchet. Und
 Körper, welchen man
 zur geben wil: so erfo
 dieser die Figur eines
 sel unter die Körper de
 Grundfläche haben, in
 den Art leicht verglei-
 che einzige Seite dessel-
 eben die Bequemlichkeit
 Ausmessung der Oberf-
 gen wird.

§. 22. In
 dritten Art, l
 man bloß ein
 aber geschehet
 F. 381. $ABCD$ aus d
 man erstlich d
 die Zahl, weld
 AB enthalten
 niß der Seite
 lich oder nöthi
 die Seite BC
 worden: und

zurück

zunehmen hat, so nehmen wir an, daß die Zahl 5, 4 diese CD ausdrücke. Bedeutet nun L die Seite des Würfels V, so wissen wir aus der Betrachtung, welche wir bey dieser Art Körper angestellt haben, daß die Verhältniß $V : ABCD$ aus den drey Verhältnissen $L : AB$, L alle diese Zahlen, 1 durch die so sind an ED verhängends anjches dasje

zusammen gesetzt sey. XI, 39. Da nun ihlen ausgedrucket sind, und man pro drey gegebenen zusammen gesetzt ist, te Multiplication finden kan, VII, 24: rter Gewalt, welche sich wie V zu AB Einheit seyn wird, und deren zweyte Einheit V in ABCD enthalten ist, welche. Es ist nemlich:

$$\left. \begin{array}{l} 6, 5 \\ 4, 3 \end{array} \right\} \text{ multipl.}$$

$$L : CD = 1 : 5, 4$$

und also $V : ABCD = 1 : 150, 930$. Demnach enthält der Körper ABCD die Einheit V hundert und fünfzig mal, und noch über dieses 93 Hundertel derselben.

S. 23. Von den zehentheiligen Brüchen, welche hier vorkommen, giebt die 382 Figur einen deutlichen Begriff. Es sey der Würfel, welchen dieselbe vorstellet, die Einheit. Man theile die Seite desselben AB in zehn gleiche Theile, und lege durch den ersten Theilungspunct die Fläche CDE den Seiten des Würfels parallel, welche auf AB perpendicular stehen; so wird dadurch der Körper CDEF von dem Würfel abgeschnitten, welcher der zehende Theil des ganzen ist. Ferner schneide man auch von AF den zehenden Theil AG ab, und ziehe durch G die Fläche GHI den zwei Seiten des Würfels parallel, auf welchen AF perpendicular steht; so ist der Körper AGHI der zehende Theil des vorigen AFED, und folgendes der hundertste Theil des Würfels, welcher vor die Einheit angenommen worden. Endlich schneide man auch von der dritten Seite neun Zehentel AK ab, und ziehe eine Fläche der Seite FB parallel, so erhält man den Körper HIK, welcher ein Würfel, und der zehende Theil des Körpers AGHI seyn wird. Folgendes ist eben dieses Würfelchen HIK der hundertste Theil des Körpers AFE, und der tausendste Theil des Würfels EB, welchen man vor die Einheit angenommen hat.

F. 382.

S. 24. Es ist demnach der zehende Theil der würflichten Einheit ein Parallelepipedon, dessen Länge und Breite die Seite dieses Würfels,

XIII. und die Höhe der zehende Theil derselben ist: der hundertste Theil der würflichten Einheit ist ein Parallelepipedon, dessen Länge der Seite des Würfels gleich ist, und die Breite und Höhe dem zehenden Theil derselben, und der tausendste Theil der würflichten Einheit ist wieder ein Würfel, dessen Seite der zehende Theil der Seite dieser Einheit ist. Hieraus übersiehet man eine Zahl, welche sich auf eine würflichte Einheit beziehet, und welche wie diese 395, 273 aussiehet, vollkommen. Sie bedeutet 395 Einheiten wie EB, zwey AE, sieben AI und drey KI.

S. 25. Doch pfleget man gemeinlich auch die Brüche durch Würfel auszudrucken, und dieses ist bequemer als das vorige. Es enthält AI zehn KI, und folgendes enthalten sieben AI siebenzig KI. Und da AE zehn AI enthält, so enthält AE hundert KI, und ist also 2 AE so viel als 200 KI, daß man also auch den Bruch 0, 273 lesen kan zwey hundert, siebenzig und drey KI.

S. 26. Stellet man sich nun die Seite des Würfels KI, welche der zehende Theil der Seiten des Würfels EB ist, wieder in zehn gleiche Theile getheilet vor; so ist ein Würfelchen, dessen Seite der zehende Theil dieser Seite ist, wiederum der tausendste Theil des Würfels KI; und so gehet es ferner, wenn man dieses Zehntel der Seite des Würfels KI wieder in Zehntel theilet, und so immer fort. Dieses giebt uns einen vollständigen Begriff von dem würflichten Maasse. Man nimmet eine gerade Linie an; man theilet diese in zehn gleiche Theile, einen jeden dieser Theile theilet man wieder in zehn gleiche Theile, und so weiter, bis man auf Kleinigkeiten komt, die in keine Betrachtung gezogen werden können. Man stellet sich Würfel vor, die man aus der ganzen Linie und aus ihren Theilchen gemacht, wie sie auf einander folgen, da denn immer der kleine Würfel der tausendste Theil des nächst größern seyn wird. Durch dergleichen Würfel misset man gemeinlich alle Körper. Die Zahlen, welche sie ausdrucken, werden wie gemeine Decimalbrüche geschrieben. Beziehet sich also eine Zahl, als 103, 5729345 auf würflichte Einheiten; so bedeuten die ersten Ziffern, welche von den nachfolgenden durch das (,) abgefordert sind, 103 würflichte Einheiten, wie man sie angenommen hat; zum Exempel solche Würfel, deren Seiten Schuhe sind, die nachfolgende drey Ziffern bedeuten 572 Würfel, deren Seiten den zehenden Theil der Seiten des vorigen ausmachen. Die drey, die auf diese folgen, zehlen Würfel, deren Seiten wieder der zehende Theil der Seite der unmittelbar vorhergehenden Würfel ist: und eben so ist die Seite der Würfel, die von

von den letzten drey Ziffern gezehlet werden; (Denn man muß auch hier XII. die Classe dreier Ziffer mit 00 vollmachen, so oft es nöthig ist) der 3^{ten} Abschnit. hende Theil der Seite der Würfel der dritten Grösse, und man hat 500 dergleichen Würfel. - Damit man dieses desto leichter einsehen könne, pfleget man auch dergleichen Zahlen also zu schreiben und abzuthellen: $103^{\circ} 572' 934'' 500'''$

§. 27. Wiederum setzet uns dieses geruhsam im Stand, alle Körper der ersten, andern und dritten Art zu berechnen, deren Grundflächen geradlinicht sind. Da man vor einen jeden Körper der ersten Art ein Parallelepipedum a fläche und Höhe hat, ersten Art zu berechnen Grundfläche berech pipedon seyn wird; Körper

§.
pers der
Höhe h
fläche d
Product
man da
let; oder

8 Ebr
he und
Grund
sch das
, wenn
3 theil
pliciret.

§. 29. Ein Körper der dritten Art ist zweyen Dritteln eines Körpers der ersten Art gleich, welcher mit dem Körper der dritten Art gleiche Grundfläche und Höhe hat, XI, 89, und wird demnach durch das Product $\frac{2}{3} B \times A$ ausgedrückt. Man bekommt dieses Product, wenn man $2 B \times A$ durch 3 dividiret; oder wenn man $\frac{2}{3} B$ durch A, oder $\frac{2}{3} A$ durch B multipliciret.

§. 30. Alle diese Berechnungen der Körper der ersten, andern und dritten Art haben auch in dem Falle statt, wenn die Grundflächen, Cirkel oder Theile der Cirkel sind. Wir haben aber noch nicht weisen können, wie die Cirkel zu berechnen seyen. Und wir werden dieses erst nach einer weitläufigen Betrachtung gewisser Eigenschaften der Zahlen thun können, welche so wohl vor sich von großem Nutzen, als insonderheit bey der Messung der krummlinichten Flächen unentbehrlich sind, zu welchen wir uns nunmehr wenden.

Von

XIII.
Abschnitt.

Von der Buchstaben Rechnung. Erklärung der Zeichen.

S. 31. Dieses desto bequemer einzusehen, müssen wir uns vor allen Dingen die Zeichen bekannt machen, deren man sich bey dergleichen Abhandlungen mit ungemeinem Vortheil bedienet, dem Verstand zu helfen, und das Nachdenken zu erleichtern. Es macht der Gebrauch dieser Zeichen vor sich keinesweges diese genannte Algebra aus. Die Seele derselben bestehet in der Art zu schließen, und keinesweges blos in dem Gebrauch dieser oder jener Zeichen. Wir werden uns von der Art des Vortrages, dessen wir uns bisher bedienet haben, ins künftige keinesweges entfernen; und dieser ist von der Art die Fragen aufzulösen, die die Algebra weiset, sehr verschieden.

S. 32. Was aber diese Art zu zeichnen anlanget; so werden die Zahlen, wie auch sonst oft in diesen Betrachtungen von uns geschehen ist, durch die Buchstaben vorgestellet: vor welche man demnach jede beliebige Zahlen wird setzen können. Doch pfleget man sich, wegen der Bequemlichkeit, der kleinern Buchstaben mehr als der grössern zu bedienen. Die Zeichen, welche die Rechnungsarten ausdrücken, die mit den Zahlen vorzunehmen sind, haben wir nicht nöthig zu lehren, weil wir sie gleich Anfangs gewiesen haben: nur ist zu erinnern, daß die Multiplication der Kürze halber hier meistens blos dadurch ausgedrucket werde, daß man die Buchstaben unmittelbar an einander setzet, welche die Zahlen bedeuten, so in einander zu multipliciren sind. Demnach wird ab das Product aus den zwey Zahlen bedeuten, welche man sich unter den zwey Buchstaben a und b vorstelllet; und abb das Product, welches kommet, wenn man die Zahl b in sich selbst; und das Product bb , welches dergestalt heraus gebracht wird, durch a multipliciret, und so ferner.

S. 33. Bey diesen Producten ist noch zu merken, daß, wenn man eine Zahl a in sich selbst, das ist, in a multipliciret, und das dadurch entstehende Quadrat, in eben die Zahl a , und so fort; alle diese Producte die Dignitäten der ersten Zahl a genennet werden, welche in Ansehung derselben die Wurzel ist. Und zwar ist aa die zweyte Dignität der Wurzel a , und aaa ist die dritte Dignität dieser Wurzel; $aaaa$ die vierte, $aaaaa$ die fünfte und so fort. Diese Redensarten allgemein zu machen, nennet man auch a , die erste Dignität, von eben der Wurzel a , welche also von der Wurzel selbst nicht verschieden ist. Die zweyte und dritte Dignität der Wurzel a kennen wir bereits unter dem Na-

Namen der Quadrat und der Cubiczahl dieser Wurzel: und es ist über- XIII.
haupt das Gegenwärtige nicht anders, als eine Erweiterung der Be- Abschnitt
griffe, welche wir von den Quadrat und Cubiczahlen gegeben haben,
anzusehen.

§. 34. Die Weitläufigkeit im Schreiben, welche die vielfältige Wiederholung einerley Buchstabens verursachen würde, zu vermeiden, pfleget man die Zahl der Buchstaben, welche sonst geschrieben werden müßten, nur oben zur rechten Hand mit einer Ziffer auszudrücken, welche man deswegen die Exponenten oder Namen der Dignität nennet, weil sie anzeigt, die wie vielte Dignität der Wurzel, an welcher sie steht, man haben wolle. Demnach schreibet man

vor aa auch a^2

aaa --- a^3

$aaaa$ --- a^4

$aaaaa$ --- a^5 und so fort.

Will man aber bloß eine gewisse Dignität der Wurzel a ausdrücken, ohne anzuzeigen, die wie vielte dieselbe eigentlich sey: so bedienet man sich an statt der Zahl eines Buchstabens, welcher eine jede Zahl bedeuten kan, und schreibet also a^2 . Uebrigens schließet man hieraus leicht, daß a^2 , wie man zuweilen zeichnet, nichts anders bedeuten könne, als selbst die erste Dignität a , oder die Wurzel aller übrigen Dignitäten der a .

§. 35. Wir können eine Sache, die zwar an sich selbst keine Schwierigkeit hat, durch ein Exempel noch deutlicher machen. Wenn a die Zahl 2 bedeutet, so ist $aa = a^2 = 2 \times 2 = 4$, und $aaa = a^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, und $aaaa = a^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, $aaaaa = a^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$, und so fort.

§. 36. Es hat aber dasjenige, so wir eben von der bequemen Bezeichnung der Dignitäten, vermittelst der Exponenten derselben, gesagt haben, auch in dem Falle statt, wenn die Dignitäten selbst als Factores in andern Producten vorkommen. Es ist $aaabb$ so viel als $aaa \times bb$: und weil a^3 so viel bedeutet als aaa , und b^2 so viel als bb , so kan auch $a^3 b^2$ nichts anders als $aaabb$ bedeuten. So ist es in allen übrigen dergleichen Fällen. $a^3 b^2 c$ bedeutet so viel als $aaaaabbbcc$. Man siehet bloß hieraus, was diese Art, die Dignitäten durch ihre Namen zu bezeichnen, vor eine Bequemlichkeit gebe.

§. 37. Auch ist die Bequemlichkeit, welche man aus dieser Be-
zeichnung
 $mmmm$

XIII. Zeichnung bey der Multiplication und Division der Dignitäten, durch
 Abshalt. andere Dignitäten von eben der Wurzel, ziehet, nicht geringer. Denn
 gesetzt, es sey a^3 durch a^2 zu multipliciren, so darf man bloß die Expo-
 nenten 3 und 2 addiren. Die Summe $3 + 2$ oder 5 ist der Exponent
 des Productes, und dieses ist demnach a^5 . Denn wenn befohlen wird,
 a^3 durch a^2 zu multipliciren, so ist eigentlich aaa durch aa zu multipli-
 ciren. Nun ist das Product $aaaaa$ ohnstreitig $aaaaa$, denn dieses
 kan nichts anders als das vorige bedeuten. Eben so viel aber bedeutet
 auch a^5 . So ist es in allen Fällen, und das Product aus a^n in a^m
 ist demnach a^{m+n} .

§. 38. Hieraus siehet man so gleich, daß, wenn man eine Digni-
 tät a^n in sich selbst multipliciren sol, man bloß die Exponenten dersel-
 ben zu sich selbst addiren, oder zweymal nehmen müsse: und daß a^{n+n}
 $= a^{2n}$ dem Product $a^n \times a^n$ gleich seyn werde. Aus eben der Ursach
 ist die dritte Dignität der a^n diese a^{3n} . Denn diese zu erhalten, muß
 man das Product $a^n \times a^n \times a^n$ machen. Dieses Product aber ist der
 Dignität a^{n+n+n} , oder a^{3n} gleich. Und überhaupt hat man nur den
 Exponenten der Wurzel durch den Exponenten der Dignität zu multi-
 pliciren, wenn man diese Dignität erhalten wil, der Exponent der
 Wurzel mag seyn so groß er wil. Denn man kan eine jede Zahl, und
 folgendes auch eine jede Dignität, als eine Wurzel betrachten. Und es
 sind demnach die Dignitäten der a^n , wie sie in der Ordnung auf ein-
 ander folgen, diese: a^n , a^{2n} , a^{3n} , a^{4n} , a^{5n} und so fort; und a^{mn}
 bezeichnet überhaupt eine jede Dignität der Wurzel a^n , deren Expo-
 nenten die Zahl m ausdrucket.

§. 39. Hieraus schließet man leicht, daß, wenn eine Dignität
 durch eine andere von eben der Wurzel zu dividiren ist, man nur den
 Exponenten der letztern von dem Exponenten der erstern abziehen müsse,
 damit der Exponent des Quotienten übrig bleibe. Es sey a^5 durch a^2
 zu dividiren, so ist der Exponent des Quotienten $5 - 2 = 3$, und der
 Quotient ist a^{5-2} oder a^3 . Dieses schließet man kurz daraus, weil,
 wenn man a^3 mit der Dignität a^2 multipliciret, durch welche a^5 divi-
 diret worden ist, diese a^5 wieder heraus gebracht wird.

§. 40. Auch dieses können wir durch allgemeine Zeichen ausdrü-
 cken, wenn wir sagen, daß der Quotient der Dignität a^n , nachdem
 sie durch diese andere a^m dividirt worden, sey a^{n-m} . Man wende diese
 Regel bey einer jeden Dignität an, deren Exponent von bestimmter
 Größe

Größe ist, als bey dieser a^3 , und dividire sie durch a^1 oder a : und bey XIII. dem Exponenten verrichte man eben die Division, und so immer fort; Absolut

so wird $\frac{a^3}{a} = a^{3-1} = a^2$, und $\frac{a^2}{a} = a^{2-1} = a^1 = a$, und $\frac{a}{a} = a^{1-1} =$

a^0 , woraus man siehet, daß diese Bezeichnung a^0 nichts anders be-
deuten kan als die Einheit. Denn $\frac{a}{a}$ bedeutet die Einheit, die Zahl

a mag so groß seyn, als sie wil, weil ein jeder Bruch dessen Nenner dem Zehler gleich ist, der Einheit gleich ist. Gehet man nun in dieser

Division weiter fort, und machet $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a}$ nach eben diesen Gesetzen, in-

dem man nemlich den Exponenten des Theilers a von dem Exponenten der 1 oder a^0 , welche getheilet werden sol, abziehet, so wird der Quotient $a^{0-1} = a^{-1}$, und es kan also a^{-1} nichts anders bedeuten als $\frac{1}{a}$. Eben

so findet man, daß $\frac{a^{-1}}{a} = \frac{1}{a^2}$ auch dergestalt a^{-2} gezeichnet werden

könte: und daß überhaupt die Zeichnung a^{-m} nichts anders bedeutet,
als $\frac{1}{a^m}$. Gleichwie nemlich der Exponent m bedeutet, daß man die

Einheit durch die Zahl a und diese wieder durch a und so ferner, so oft multipliciren mußte, als viele Einheiten in dem Exponenten m enthal-

ten sind: also erfordert im Gegentheil die Zeichnung a^{-m} , daß man

die Einheit durch a , und den Quotienten $\frac{1}{a}$ wieder durch a dividiren,

und dieses so oft, als viele Einheiten in m enthalten sind. Stehet zum Exempel m an statt der Zahl 3, so ist a^m oder $a^3 = 1 \times a \times a \times a$

und a^{-3} ist $= \frac{1}{a \times a \times a}$.

§. 41. Und da $a^{\frac{1}{2}}$ die zweyte Dignität der Wurzel a^2 bedeutet, oder das Quadrat dieser Zahl, so siehet man, daß hinwiederum die Wurzel einer zweyten Dignität, oder eine Quadraturwurzel dadurch bezeichnet wird, wenn man den Exponenten derselben halb so groß machet, als den Exponenten der Dignität. So ist $a^{\frac{1}{3}}$ die dritte Dignität der Wurzel a^3 , und der Exponent der Wurzel der dritten Dignität oder der Cubicwurzel derselben $\frac{1}{3}$ ist der dritte Theil des Exponenten der Dignität 3. Eben so ist es mit der Wurzel der vierten der fünften und

M m m m a

folo

XIII. folgenden Dignitäten. Denn a^n ist die Wurzel der vierten Dignität Abschnitt. a^{4n} , und der fünften a^{5n} und so fort. Dieses ist richtig, n mag bedeuten, was man wil. Und man bezeichnet also die Wurzel der vierten Dignität, wenn man den Exponenten der Dignität durch 4 theilet, die Wurzel der fünften, wenn man die Division durch 5 verrichtet, und so fort. Und da überhaupt a^{mn} die Dignität der Wurzel a^n vorstellet, deren Exponent die Zahl m ist, so bekömmet man überhaupt die Wurzel der Dignität deren Exponent m ist, wenn man den ganzen Exponenten mn wie er an a steht, durch den Exponenten m theilet, welcher die Dignität anzeigt, deren Wurzel man haben wil.

S. 42. Eben dieses ist auch richtig, wenn der Exponent durch eine einzelne Zahl oder durch einen einzigen Buchstaben angezeigt wird, ob zwar diese Zahl sich nicht durch den Exponenten der Dignität, von welcher man die Wurzel haben wil, genau dividiren läßt. Ein Exempel kan die Sache klar machen. Ich wil die Wurzel haben, deren dritte Dignität die Zahl a^5 ist. So betrachte ich a^5 als ein Product aus 3 und einer andern Zahl, welche nichts anders als $\frac{1}{3}$ seyn kan, und schreibe also, oder kan wenigstens an statt a^5 schreiben $a^{3 \times \frac{1}{3}}$, wodurch erhellet sogleich, daß $a^5 = a^{3 \times \frac{1}{3}}$ die dritte Dignität der Zahl $a^{\frac{1}{3}}$ sey, weil diese Wurzel $a^{\frac{1}{3}}$ in der dritten Dignität $a^{3 \times \frac{1}{3}}$ das ist a^1 giebt. Es wird also die Wurzel der dritten Dignität der gegebenen Zahl a^5 gefunden, wenn man den Exponenten dieser gegebenen Zahl 5 durch den Exponenten der Dignität dividiret, deren Wurzel man haben wil. Und ist überhaupt die Zahl aus welcher man die Wurzel der Dignität m ausziehen sol, mit a^n bezeichnet, so wird diese Wurzel durch $a^{\frac{n}{m}}$ ausgedrückt. Man sieht dieses auch bloß daraus ein, weil, wenn man $a^{\frac{n}{m}}$ zu der Dignität erhebet, deren Exponent m ist, man $a^{\frac{nm}{m}}$ das ist, das vorige a^n erhält.

S. 43. Ferner findet dasjenige, so von den Exponenten der Dignitäten und ihrer Wurzeln gesagt worden ist, auch in dem Falle statt, wenn verschiedene Dignitäten von verschiedenen Wurzeln in einander multipliciret sind. Die zweite Dignität nemlich von $a^{2n} b^{2m}$ ist $a^{2n} b^{2m}$, die dritte $a^{3n} b^{3m}$, die vierte $a^{4n} b^{4m}$; und so fort. Denn die

die zweite Dignität von $a^n b^m$ ist ohnstreitig. $a^n b^m \times a^n b^m$, das ist XIII. $a^{2n} b^{2m}$. I, 96. Nun ist $a^n a^n = a^{2n}$, und $b^m b^m$ ist b^{2m} , XIII, 38. Abschnitt. Also ist die zweite Dignität von $a^n b^m$ in der That $a^{2n} b^{2m}$. Eben so schließet man auch bey der dritten Dignität, und den übrigen. Und wenn mehr als zwei Dignitäten in einander multipliciret sind, siehet man auf eben die Art ein, daß noch eben dieses gelte. Ist die Wurzel $a^n b^m c^r$; so ist die Dignität dieser Wurzeln deren Exponent r ist, diese: $a^{rn} b^{rm} c^{rs}$.

§. 44. Hieraus schließet man, daß hinviederum, wenn aus einer Dignität die Wurzel auszuziehen ist, welche durch die Multiplication verschiedener Dignitäten von verschiedenen Wurzeln entstanden ist; man aus allen diesen Dignitäten die Wurzeln ziehen, und diese hernach in einander multipliciren könne. Die Wurzel der Dignität $a^{2n} b^{2m}$, welche man als die zweite betrachtet, ist $a^n b^m$: Und wenn man $a^{rn} b^{rm} c^{rs}$ als eine Dignität ansiehet, deren Exponent r ist, so ist die Wurzel derselben $a^n b^m c^r$. Man hat nemlich die Wurzeln der Dignitäten a^{rn} , b^{rm} , c^{rs} , welche in einander multipliciret waren, eine nach der andern ausgezogen; und diese Wurzeln a^n , b^m , c^r nachhero in einander multipliciret. Siehet man $a^n b^m c^r$ als eine Dignität an, deren Exponent t ist, so ist die Wurzel derselben $a^{\frac{n}{t}} b^{\frac{m}{t}} c^{\frac{r}{t}}$.

§. 45. Daß die Wurzel aus einer Zahl ausgezogen werden sol, welche man als eine Dignität derselben ansiehet, pfleget man auch durch dieses Zeichen $\sqrt{\quad}$ auszudrücken, welches man vor dieselbe Zahl oder das Zeichen, unter welchem man sich eine Zahl vorstellt, setzt; und über demselben bezeichnet man den Exponenten der Dignität, welche man der Zahl giebet, deren Wurzel verlangt wird. Doch wird der Exponent 2 nicht geschrieben. Folgendes bedeutet $\sqrt{3}$, daß man 3 als eine Quadratzahl ansehe, und ihre Wurzel verlange, welche irrational ist. $\sqrt[3]{64}$ bedeutet, daß man die Zahl 64 als eine Cubiczahl ansehe, so sie auch wirklich ist, und die Wurzel derselben haben wil, welche 4 ist. Und so in allen übrigen Fällen. $\sqrt[n]{a^m}$ bedeutet also, daß man a^m als eine Dignität ansehe, deren Exponent n ist, und die Wurzel dieser Dignität ist dasjenige, so man sich unter $\sqrt[n]{a^m}$ vorstellen muß.

§. 46. Hieraus nun schließet man ferner, daß überall $\sqrt[n]{a^m}$ so viel
 M m m m 3 bede-

XIII.

Wissniss. bedeute, als $a^{\frac{m}{n}}$: woraus ferner folgt, daß auch die nachfolgenden

Zeichen einerley Bedeutung haben: $\sqrt[n]{a^m b^n c^o} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{n}} c^{\frac{o}{n}} =$
 $\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{c^o} = a^{\frac{m}{n}} \times \sqrt[n]{b^n} \times \sqrt[n]{c^o} = a^{\frac{m}{n}} \times \sqrt[n]{b^n c^o} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{n}{n}} c^{\frac{o}{n}}$
 $\times \sqrt[n]{c^o} = \sqrt[n]{a^m b^n c^o}$. Ein kleines Nachdenken, bey welchem man voraussetzt, daß die Sache nicht die geringste Schwierigkeit habe, kan dieselbe deutlicher machen, als viele Worte.

S. 47. Dieses war dasjenige, so wir von der Bezeichnung zu merken hatten, der man sich bey dergleichen Abhandlungen mit großem Vortheil bedienet, als wir vor uns haben. Wir müssen demselben nur noch einen Satz beyfügen. Wir haben die Bedeutung der Zeichen + und — längst I, 72. deutlich erklärt, und gewiesen, daß wenn sie den Ziffern vorgesetzt werden, welche Zahlen ausdrücken, und man, zum Exempel, schreibt + 15 — 13; diese Ziffer zwar Einheiten von einerley Art bedeuten können, 15 Thaler zum Exempel und 13 Thaler, aber solche, welche durch anderweitige Bestimmungen einander dergestalt zuwider sind, daß die kleinere Zahl so viele Einheiten der größern aufhebet und in nichts verwandelt, als sie deren selbst enthält. Dergleichen sind 15 Rthl. Einnahme, 13 Thaler Ausgabe, oder 15 Thaler Ausgabe, 13 Thaler Einnahme, wie auch 15 Meilen Weges vor sich, 13 Meilen zurück, oder 15 Meilen zurück, 13 vor sich, und dergleichen, Eben dieses ist auch auf die Buchstaben oder andere Zeichen anzuwenden, womit die Zahlen oder andere Größen, als Linien, Oberflächen und Körper bezeichnet werden. Es bedeuten + a, — a Größen von einerley Art, die einander zwar gleich, aber dergestalt zuwider sind, daß + a mit — a zusammen nicht 2 a giebt, wie geschehen würde, wenn sie einander nicht zuwider wären; sondern es ist + a mit — a eigentlich gar nichts. Eben so ist + 3 a — a nicht mehr als + 2 a, und + 3 a — 5 a giebt — 2 a. Denn es wird durch das kleinere nur ein Theil des größern aufgehoben, welcher dem kleinern gleich ist, und der Ueberschuß ist allezeit von der Art des größern. Eben so ist $a^n - a^n = 0$, $3 a^n - 2 a^n = a^n$, und $3 a^n - 5 a^n = -2 a^n$ $\sqrt{5} - 3 \sqrt{5} = 2 \sqrt{5}$. Denn es ist das gezeigte richtig, von was Art auch im übrigen die Größen seyn mögen, wenn nur die Größen, deren eine mit + bezeichnet ist, nicht von einer andern Art sind, als diejenigen, vor deren Zeichen — steht.

S. 48. Wenn vor dem Zeichen einer Größe weder + noch — steht, so kan man allezeit vor dasselbe + setzen, weil dasselbe im Anfang gemeinlich nie geschrieben wird. Und die Einheit stellet man sich allezeit als mit + bezeichnet vor, außer wenn besondere Umstände ein anders erfordern. Man siehet leicht, daß dieses etwas Nützliches ist, XIII.

igung der Zahlen, so durch Buchstaben angezeigt werden, und deren Subtraction.

S. 49. Hieraus ist alsobald zu begreifen, wie man die Zahlen müsse, welche durch Buchstaben bedeutet werden, vor diese Zeichen + und — stehen, welche Arbeit man gewissern als eine Addition ansehen kan. Gesezt, man habe $+2c$, und noch über dieses $3a + 2b - c$, wie viel macht zusammen? Die Antwort ist ungemein leicht: es machet, $5a + 2c \times 3a + 2b - c$, oder in einer andern Ordnung $5a + 3a - b + 2c - c$, denn man siehet so gleich, daß an der Ordnung nichts gelegen sey. Man siehet aber auch, daß man eben kürzer ausdrücken könne. Denn $5a + 3a$ ist eigentlich so $8a$, und $-b + 2b$ ist $+b$, eben so ist $2c - c = c$, also kurz sagen, daß alle die vorgelegte Größen mit einander reiniget oder zusammen gesezt, diese bringen $8a + b + c$. erhält diese Verkürzung, wenn, nachdem man die Größen Zeichen zusammen gesezt hat, man alle diejenigen welche einander gleich sind, und wegen der widrigen Zeichen einander aufheben, diejenigen aber zusammen zehlet, welche von einerley Art sind, und, weil sie mit einerley Zeichen + oder — bezeichnet sind, einander vermehren.

S. 50. Es kan hierinn die anderweitige Bezeichnung nichts ändern. Als $3a^3 - 5a^2 + b^2 + 2c$ mit $a^3 - a^2 - 2b^2 - 3c$ zusammen giebt $3a^3 + a^3 - 5a^2 - a^2 + b^2 - 2b^2 + 2c - 3c$. Das ist, wenn man dasjenige wegläset, so einander vernichtet, und die gleichen Größen, welche einander nicht zuwider sind, zusammen sezt, $4a^3 - 6a^2 - b^2 + 2c - 3c$. Wenn man diese Exempel erwaget, so wird man mit geringem Nachsinnen alles dasjenige aus denselben einsehen, was bey dieser Sache zu sagen ist.

S. 51. Mit der Subtraction hat es eben so wenig Schwierigkeit. Es sey $3a + 2b - c$ gegeben, und man sol von demselben $2a - b + c$ weg-

XIII. wegnehmen: so verändere man nur die Zeichen desjenigen, so man **Abchnitt.** von dem erstern abziehen sol, indem man an statt + setzt —, und an statt — das gegenseitige +, und mache dadurch aus demselben. — $2a + b - c$ vereinige aber so dann XIII, 49. diese letzteren Größen mit denjenigen, von welchen man subtrahiren solte; so ist die Subtraction geschehen, und der Unterschied ist $3a + 2b - c - 2a + b - c$, das ist kurz $a + 3b - 2c$. Denn indem man in der Größe, welche man abziehen solte, $2a - b + c$ die Zeichen dergestalt verwechselt, und dieselbe so dann mit den erstern Größen $3a + 2b - c$ vereinigt, so vernichten sie von diesen Größen so viel, als sie selbst betragen, und dadurch kan nichts anders als der Unterschied derer einen von den andern übrig bleiben XIII, 47. Die Sache ist gar natürlich, ob sie zwar eben deswegen, weil sie so leicht ist, einen im Anfang aufhalten könnte. Derjenige, welcher von 7 Thalern drey Thaler ausgegeben hat, behält vier Thaler übrig, und diese vier Thaler sind der Ueberschuß der 7 Thaler, welche er gehabt, über die ausgegebene Dreye. Wird demnach jemand gefragt, wie viel der Ueberschuß von sieben Thalern über drey Thaler betrage, so antwortet er richtig, wenn er sagt, es betrage dieser Ueberschuß so viel, als der in seinem Vermögen hat, welcher sieben Thaler gehabt und drey davon ausgegeben. Auf diese so gar leichte Begriffe gründet sich die Bezeichnung des Unterschiedes, welche wir eben gewiesen haben.

Die Producte zusammen gesetzter Factoren durch Buchstaben auszudrücken.

§. 52. Was die Multiplication anlangt, so haben wir bereits XIII, 32. erwehnet, daß das Product, dessen Factore man sich unter den Buchstaben a, b vorstellt, kurz ausgedrucket werde, indem man diese Buchstaben unmittelbar an einander setzt, also, ab . Es ist aber noch die Frage übrig, welches von den Zeichen +, — diesem Product müsse vorgesetzt werden, wenn einer oder der andere Factor a, b , dieses oder jenes dieser Zeichen vor sich hat. Wenn wir auf den Grund der Multiplication zurück gehen, werden wir diese Frage ohne Weitläufigkeit beantworten können.

§. 53. Man kan I, 79. sich eine jede Multiplication als eine Erfindung der vierten Proportionalzahl zu drey gegebenen vorstellen, deren die erstere die Einheit ist, und die zweyte und dritte die gegebene Zahlen, diejenigen zum Exempel, welche wir uns unter a und b vorstellen.

stellen. Es kan die Einheit eben so wie eine jede andere Zahl entweder mit $+$ oder mit $-$ bezeichnet seyn; ordentlicher Weise aber, und wenn man Freiheit hat dieses oder jenes anzunehmen, bezeichnet man die Einheit allezeit mit $+$, oder man nimmet sie von der Art derjenigen Dinge an, welche man sich als etwas wirkliches vorstellt, XIII, 48. und so ist es auch bey der gegenwärtigen Proportion. Man könnte bey derselben die Einheit allezeit mit $-$ bezeichnen, oder bald mit $+$, bald mit $-$. Allein dieses würde unnöthige Weitläufigkeit geben, und zu nichts nützen, als uns mit einer Menge von Regeln zu überhäuffen, deren man gar wohl entbehren kan. Da aber ein jeder von den Factoren a und b jedes der zwey Zeichen haben kan, von welchen die Rede ist, so siehet man, daß die Frage, welche wir zu entscheiden haben, diese ist: Man stellet sich die Proportion $1 : a = b : ab$ vor, und wil wissen, was das vierte Glied derselben so durch ab bedeutet wird, vor ein Zeichen, $+$ nemlich oder $-$ haben werde, wenn das zweyte a , wie auch das dritte b das erstere oder das andere dieser Zeichen hat.

XIII.
Abshat.

S. 54. Die Fälle, welche hier vorkommen können, sind eigentlich diese, viere:

$$\begin{array}{l} 1 : +a = +b : - - - ab \\ 1 : +a = -b : - - - ab \\ 1 : -a = +b : - - - ab \\ 1 : -a = -b : - - - ab. \end{array}$$

Es kan nemlich a entweder das Zeichen $+$ oder das Zeichen $-$ haben, und in einem jeden dieser Fälle ist b wieder entweder mit $+$ oder mit $-$ bezeichnet. In dem ersten Fall nun siehet man gar leicht ein, daß das Product ab ebenfalls mit $+$ bezeichnet seyn muß. Wenn man sagt: wie 1 Thaler Einnahme sich zu 5 Thalern Einnahme verhält: so verhalten sich sieben Thaler Einnahme zu 35 Thalern, so sind diese 35 Thaler gewiß keine Ausgabe, oder Schuld oder etwas dergleichen. Eben so leicht ist auch der andere Fall zu beantworten. Es ist in demselben das Product mit $-$ zu bezeichnen, und daß dieses seyn müsse, siehet man wieder bloß aus einem Exempel. Wie sich 1 Thaler Einnahme zu 5 Thalern Einnahme verhält, so verhalten sich 7 Thaler Schuld, zu 35 Thalern Schuld, nicht aber zu 35 Thalern Einnahme, denn sonst wäre das vierte Glied aus dem dritten nicht so entstanden, wie das zweyte aus dem ersten entstanden ist.

S. 55. Wil man aber eine etwas tiefere Einsicht in diese Dinge haben, so hat man zu betrachten, daß in dem Fall, wenn der Factor a
 N n n mit

XIII. mit $+$ bezeichnet ist, welches Zeichen auch die Einheit hat, die Grösse a entstehe, indem die Einheit nach und nach wächst, oder dergestalt abnimmt, daß doch allezeit etwas übrig bleibe, und die Grösse, welche durch dieses Wachsthum oder Abnehmen der Einheit entstanden ist, ist eben diejenige, welche a bedeutet. Fünf Thaler Einnahme entstehen, indem die Einnahme von einem Thaler wächst, und 5 Groschen Einnahme entstehen, indem die Einnahme eines Thalers abnimmt: aber so, daß sie nicht gar vernichtet wird. Eben so aber wie a aus 1 entsteht, muß auch das Product ab aus dem andern Factor b entstehen. Es muß also derselbe ebenfalls wachsen oder abnehmen, wie die Einheit gewachsen oder abgenommen, ohne daß er gar verschwinde. Wächst aber b auf die Wertheständig, oder nimmt es bis auf eine gewisse Grösse ab, und man bezeichnet die Grösse, welche durch dieses Wachsthum oder Abnehmen entstanden ist mit ab ; so ist dieses ab gewiß von der Art des b , und folgendes hat ab das Zeichen $+$ wenn b dieses Zeichen hat, und ab ist mit $-$ zu bezeichnen, wenn vor b dieses Zeichen steht. Eine Schuld welche dreyimal grösser oder dreyimal kleiner worden, ist noch allezeit eine Schuld, gleichwie das Vermögen Vermögen bleibt, es mag wachsen oder abnehmen wie es wil, wenn es nur nicht so sehr abnimmt, daß es gar nichts wird.

§. 56. Die zween letztern Fälle scheinen eine etwas grössere Schwierigkeit zu haben: doch ist die Betrachtung, welche wir eben gemacht haben, hinlänglich dieselbe bald zu heben. Wil man sich die Verhältniß $1: - a$ vorstellen, so muß man betrachten wie $- a$ aus der Einheit entstehe, welches wir in einem Exempel am besten werden zeigen können, weil uns sonst die Worte mangeln dürften, uns recht deutlich auszudrücken. Ich gehe eine Meile von Morgen gegen Abend. Diese Meile ist 1, und ich kan mir sie als wirklich vorstellen. Um diese Meile bin ich nunmehr von dem Ort gegen Abend zu entfernt, von welchem ich ausgegangen bin. Ich kan noch weiter nach Abend fortgehen, und wenn ich mich endlich aufhalte, so kan der Weg, welchen ich auf die Art zurück geleyet, und meine ganze Entfernung von dem Orte, aus welchem ich ausgegangen, durch a bedeutet werden, und dieses a hat nunmehr das Zeichen $+$, weil es zu der Einheit hinzu gesetzt dieselbe vermehret. Gehe ich nun auf meinen Weg zurück, und nähere mich also wieder dem Ort, aus welchem ich gegangen bin beständig, so wird a immer kleiner und kleiner: gleichwohl behält es das Zeichen $+$, bis ich endlich wieder dafelbst angelange

gelaugnet bin, wo ich ausgegangen. So bald dieses geschehen ist, verschwindet a , oder meine Entfernung von diesem Ort nach Abend zu, ganz und gar, und wird zu nichts. Diese Vernichtung ist durch den Rückweg von Abend gegen Morgen geschehen, welchen ich genommen habe. Gehe ich nun diesen Weg ferner fort, so entferne ich mich von dem Ort nunmehr gegen Morgen, und die Größe dieser Entfernung kan wieder durch den Buchstaben a ausgedrückt werden. Auch ist nicht nöthig etwas weiter hinzu zu setzen, so lange man bloß auf diese Entfernung siehet. Will man aber auch darauf Acht haben, daß dieser Weg ein Rückweg ist, von Abend gegen Morgen, welcher den vorigen von Morgen gegen Abend vermindert, indem er selbst wächst und endlich gar vernichtet, mich aber, wenn er noch größer wird, von meinem ersten Ort nach Morgen entfernt; so muß dem Buchstaben a noch das Zeichen — vorgesetzt werden. Und es entsteht also allezeit — a aus der 1, indem die Einheit nach und nach vernichtet wird, bis sie gar nichts wird, und indem diejenige Größe, welche die Einheit vernichtet hat, so dann noch weiter wächst.

XIII.
Abschnitt.

§. 57. Ist nun also die Verhältniß 1: — a gegeben, und man sol aus b die Größe ab eben so machen, wie — a aus 1 wird, so muß b , von was Art sie auch seyn mag, immer abnehmen bis es endlich nichts wird, und die Größe, welche sie dergestalt vernichtet, muß von da an noch immer zunehmen bis die Verhältniß $ab : b$ der Verhältniß $a : 1$ gleich werde. Hieraus aber siehet man, daß wenn b das Zeichen + hat, wie in dem dritten Falle, ab das Zeichen — haben werde. Denn diejenige Größe welche + b vernichtet hat, muß nothwendig das Zeichen — haben, und von der Art dieser Größe ist in diesem Fall ab . Hat aber b das Zeichen — wie in dem vierten Falle; so ist die Größe, welche es vernichten kan, von der Art derjenigen, die mit + bezeichnet sind, und dieses Zeichen muß also auch ab haben, weil ab von der Art derjenigen Größen ist, so die b vernichten. Wie sich ein Thaler Vermögen verhält zu 5 Thaler Schuld, so verhalten sich 7 Thaler Vermögen zu 35 Thaler Schuld. Denn gleichwie 5 Thaler Schuld aus einem Thaler Vermögen entstehen, indem man nemlich sechs mal so viel anwendet als man im Vermögen hat; eben so entstehen 35 Thaler Schuld aus 7 Thaler Vermögen, weil derjenige der 7 Thaler besessen, wieder sechs mal so viel angewendet hat, als er gehabt, bis er sein Vermögen vernichtet, und noch über das 35 Thaler Schulden auf sich geladen. Eben so verhält sich auch ein Weg

N n n n 2

von

XIII. von 7 Meilen vorwärts, zu einem Rückweg von 35 Meilen; und so Abschnitt. ist es in dem andern Exempel. Wie sich ein Thaler Vermögen zu 5 Thaler Schuld verhält, so verhält sich 7 Thaler Schuld zu 35 Thaler Vermögen. Denn gleichwie derjenige, welcher 1 Thaler hat, sechs mal so viel anwenden muß, bis er 5 Thaler schuldig wird: so muß derjenige, welcher 7 Thaler schuldig ist, sechs mal so viel erwerben, bis er seine Schuld tilgen kan, und noch über das 35 Thaler reich wird.

§. 58. Nehmen wir nun dieses alles zusammen, so sehen wir, daß in den gegebenen vier Fällen die Zeichen so stehen müssen:

$$1 : +a = +b : +ab$$

$$1 : +a = -b : -ab$$

$$1 : -a = +b : -ab$$

$$1 : -a = -b : +ab.$$

In dem ersten und letzten dieser Fälle haben die beyden Factoren a und b einerley Zeichen, $+$ in dem ersten, und $-$ in dem letzten; und in beyden Fällen ist das Product ab mit $+$ bezeichnet. In dem zweyten und dritten Fall aber haben die beyde Factore verschiedene Zeichen, und das Product hat $-$. Man muß demnach diese Regeln fest setzen: Das Product hat das Zeichen $+$, wenn beyde Factore einerley Zeichen haben, und das Product hat das Zeichen $-$, wenn die beyden Factore verschiedentlich bezeichnet sind.

§. 59. Man kan dieses gar leicht umkehren und schließen, daß wenn das Product das Zeichen $+$ hat, die zween Factore desselben ohnmöglich verschiedene Zeichen haben können. Denn wäre dieses, so hatte das Product das Zeichen $-$. Und durch einen eben dergleichen Schluß siehet man, daß wenn das Product das Zeichen $-$ hat, die beyden Factore nicht einerley Zeichen haben können, weil sonst das Product das Zeichen $+$ haben müßte. Dieses kan uns dienen, wenn wir die Producte in ihre Factore zu zerfallen haben. Nur müssen wir dabey bemerken, daß die Factore von $+ab$ so wol $+a$, $+b$ als $-a$, $-b$ seyn können, und daß von $-ab$ nicht nur $-a$ und $+b$ sondern auch $+a$ und $-b$ Factore abgeben können. Daß man also ein jedes Product auf zweyerley Art in zween Factore zerfallen kan, und man in diesen Stücken Freyheit hat. Selbst diese Freyheit, welche die Sache erleichtert, könnte uns anstößig seyn, wenn wir sie nicht zum Voraus bemerkt hätten.

§. 60. Ist einer der Factore aus zween Theilen zusammen gesetzt,

setzt, es mögen dieselben Theile mit + oder mit — bezeichnet seyn, wie man will; so bestehet das Product aus den Producten dieser Theile, und dem andern Factor: und die Zeichen der Theile dieser Producte sind aus demjenigen, so gewiesen worden ist, abzunehmen. Es sey erstlich $+a+b$ durch $+c$ zu multipliciren, so setze man, demjenigen, so XIII, 53. gewiesen worden ist, gemäß, $1 : +c = +a : +ca$,

$1 : +c = +b : +cb$, und nehme die Summen der letztern Glieder dieser Proportionen, so erhält man $1 : +c = +a+b : +ca+cb$; VI, 96. Woraus man siehet, daß allerdings $+ca+cb$ das rechte Product aus den Factoren $+c$ und $+a+b$, sey. Setzt man aber in dieser Proportion an statt + vor das zweyte Glied das gegenseitige Zeichen —, so muß auch das Zeichen des vierten Gliedes — werden, XIII, 58. und es wird dadurch die Proportion in die nachfolgende verwandelt: $1 : -c = +a+b : -ca - cb$, Woraus man siehet, daß das Product aus den zwey Factoren — c und $+a+b$ sey $-ca - cb$. Und wenn man das Zeichen des zweyten Gliedes + stehen läßt, verändert aber die Zeichen des dritten; so müssen wieder auch die Zeichen des vierten verändert werden. Es wird dadurch $1 : +c = -a-b : -ca - cb$. Das Product also aus $+c$ und $-a-b$ ist $-ca - cb$. Endlich, wenn man in dieser letzten Proportion auch das Zeichen des zweyten Gliedes verändert und an statt desselben — c setzt, so muß wieder auch das Zeichen des vierten Gliedes verändert werden. Die Proportion wird dadurch $1 : -c = -a-b : +ca + cb$, und das Product aus — c und $-a-b$ ist $+ca + cb$.

§. 61. Es sey zweytens $a-b$ durch c zu multipliciren, und a sey größer als b : so ist auch ca größer als cb , und $a-b$, so wohl als $ca - cb$ ist von der Art derjenigen Größe, die mit + bezeichnet sind, $-a+b$ aber, und $-ca+cb$ ist von der Art derjenigen, vor welchem das Zeichen — steht. Setzt man nun wieder

$$1 : +c = +a : +ca,$$

und $1 : +c = +b : +cb$, und nimmet den Unterschied der letztern Glieder dieser Proportionen, a, b , wie auch ca, cb , und bringet dadurch die Proportion $1 : +c = +a-b : +ca - cb$ heraus; so siehet man, daß $+ca - cb$ das richtige Product, aus den Factoren c und $a-b$, sey. Verwechselt man aber wiederum das Zeichen des zweyten Gliedes + mit dem gegenseitigen —, so muß auch das Zeichen des letzten Gliedes dergestalt verwechselt werden, und dieses Glied wird alsb $-ca + cb$.

XIII. Demnach ist das Product aus $-c$ und $+a - b$ dieses vierte Glied Abschnitt. $-ca + cb$. Läßt man aber das Zeichen des zweyten Gliedes stehen, und verwechselt das Zeichen des dritten Gliedes, in dem man aus demselben $-a + b$ macht, so muß wieder das Zeichen des vierten Gliedes ebenfalls gewechselt werden; und es ist demnach das Product aus $+c$ und $-a + b$ wieder $-ca + cb$. Verwechselt man endlich in dieser letzten Proportion $1: +c = -a + b: -ca + cb$ auch das Zeichen des zweyten Gliedes, so muß das Zeichen des vierten nochmals gewechselt werden. Es wird also dieses vierte Glied $+ca - cb$. Und dieses ist das Product aus den Factoren $-c$ und $-a + b$.

S. 62. Hieraus fließen die Producte, welche entstehen, wenn man einen aus zweyen oder mehr Theilen zusammen gesetzten Factor durch einen andern dergleichen Factor multipliciren sol, ohne grosse Weitläufigkeit. Man muß 1, 92. dergleichen Producte heraus zu bringen, einen jeden Theil des einen Factors durch einen jeden Theil des andern multipliciren, und diese Producte vermittelst der Zeichen zusammen hängen, welche durch die Multiplication der Theile heraus kommen. Es sey $a - b + c$ durch A zu multipliciren, so wird das Product, wie wir gesehen haben, $Aa - Ab + Ac$. Ist nun $A = a - d$, und also auch der zweyte Factor zusammen gesetzt, so ist

$$Aa = aa - ad \text{ und}$$

$$-Ab = -ab + bd$$

$$+Ac = +ac - cd, \text{ folgendes,}$$

$Aa - Ab + Ac = aa - ad - ab + bd + ac - cd$, und dieses ist also das Product aus $a - b + c$ und $a - d$.

S. 63. Und nach eben dieser Regel bringt man das Product aus $a^2 - 2ab + 3bc$ und $2a + b - 3c$ heraus. Es ist dasselbe:

$$2a \times a^2 - 2ab + 3bc$$

$$+ b \times a^2 - 2ab + 3bc$$

$$- 3c \times a^2 - 2ab + 3bc,$$

bey welcher und dergleichen Zeichnungen der Strich bedeutet, daß alle das, so mit dem Strich verknüpft ist, und folgendes hier das Ganze $a^2 - 2ab + 3bc$ durch dasjenige zu multipliciren sey, so vor demselben steht, und mit demselben vermittelst des Zeichens der Multiplication verknüpft ist, und nicht etwa bloß der erste Theil desselben als a^2 . Multipliciret man aber wirklich, so wird

$$2a \times a^2 - 2ab + 3bc = 2a^3 - 4a^2b + 6abc$$

$$+ b \times a^2 - 2ab + 3bc = a^2b - 2ab^2 + 3b^2c.$$

$$- 3c \times a^2 - 2ab + 3bc = -3a^2c + 6abc - 9bc^2.$$

Und dieses ist das gesuchte Product, welches man kürzer schreiben kan, wenn man dasjenige wegläset, so einander aufhebet, und zusammen zehlet was zusammengezehlet werden kan. Ethut man dieses, so wird das gesuchte Product nachfolgender massen ausgedrückt: $2a^3 - 3a^2b + 12abc - 2ab^2 + 3bc^2 - 3ac^2 - 9bc^2$.

Die Division.

§. 64. Man siehet bloß hieraus, daß es nicht eben leicht sey wiederum die zween Factore eines gegebenen Products zu finden. Derjenige, welcher die Multiplication nicht erst selbst verrichtet hat, wird nicht leicht errathen, daß die Factore des Products $2a^3 - 3a^2b + 12abc - 2ab^2 + 3bc^2 - 3ac^2 - 9bc^2$, diese zween $a^2 - 2ab + 3bc$ und $2a + b - 3c$ sind, aus welchen wir es herausgebracht haben. Doch kan einiges Nachsinnen, welches sich auf die Regeln der Multiplication gründet, die wir eben gegeben haben, uns in den Stand setzen die Factore eines gegebenen Products öfters zu errathen, und die Probe kan bald weisen, ob wir in Annehmung derselben uns nicht verstoßen: und dieses nennet man hier die Division.

§. 65. Es sey das Product $a^2 - b^2$ gegeben, man sol die Factore desselben nicht so wohl finden als errathen. Setzet man daß dieselben seyn $a + b$ und $a - b$, und multipliciret diese Zahlen in einander, so wird das Product $a \times a - b + b \times a - b$, das ist, $aa - ab + ab - bb$, oder kürzer $aa - bb$. Es sind also die Factore $a + b$ und $a - b$ richtig angenommen, weil durch die Multiplication aus denselben das gegebene Product $aa - bb$ heraus kommt. Dieses Product ist der Unterschied der Quadrate oder der zweyten Dignitäten von a und b , und man siehet hieraus, daß wenn man die Summe zweyer Zahlen $a + b$ in ihrem Unterschied $a - b$ multipliciret, das Product dem Unterschied der Quadrate aus eben den Zahlen a und b gleich sey.

§. 66. Es erhellet aus diesem Exempel, wie leicht man vermittelst des Gebrauchs der bequemen Zeichen, welche wir, so weit wir sie im nachfolgenden gebrauchen werden, zu erklären bemühet gewesen, und vermittelst der Verknüpfung derselben die schönsten und nützlichsten Sätze

XIII. **Abschnitt:** Sätze heraus bringen könne, wenn man ihrer nur erst etwas gewohnt worden. Es wird sich aber dieses in dem folgenden viel deutlicher zeigen, denn wir können uns nunmehr zu den Abhandlungen wenden, welche wir uns hauptsächlich vorgenommen haben. Wir werden bey der Betrachtung der so genannten Zahlreihen anfangen müssen.

Zahlreihen. Die Arithmetische.

§. 67. Man nennet aber eine Zahlreihe, eine Menge von Zahlen, welche nach einem gewissen beliebig angenommenen Gesetz in unveränderter Ordnung auf einander folgen. Es sind dergleichen Gesetze viele, und man kan sich deren immer noch mehrere vorstellen. Also giebt es auch unendliche Arten von Zahlreihen. Wir werden uns begnügen lassen, deren zwey zu betrachten, unter welchen insonderheit die letztere von unbeschreiblichem Nutzen seyn wird. Diese sind, die Arithmetische, und die Geometrische Reihe.

§. 68. Will man eine Arithmetische Reihe machen, so fange man bey einer beliebigen Zahl an, 5, zu dieser Zahl setze man eine andere beliebige Zahl hinzu, oder nehme sie von derselben weg, diese mag 2 seyn. Auf die Art bekommt man das zweyte Glied $5 + 2 = 7$, oder wenn man sich der Subtraction bedienet $5 - 2 = 3$. Aus diesem zweyten Glied wird nun das dritte auf eben die Art gemacht, wie das zweyte aus dem ersten geworden. Man setzet eben die Zahl 2 zu dem zweyten Glied 7 hinzu, wenn man sich im Anfang der Addition bedienet hat, oder man subtrahiret diese Zahl 2 von dem zweyten Glied 3, wenn man zuerst die Subtraction gebrauchet. Auf eben die Art mache man aus dem dritten Glied das vierte, aus dem vierten das fünfte, und so ferner. Die erstere der Arithmetischen Reihen, welche wir angefangen, wird dadurch diese:

5 7 9 11 13 15 17 und so fort.

§. 69. Man siehet bald daß man eine solche Reihe auch nach forme zu fortsetzen könne, wenn man eben die Zahl 2, welche man addiret hatte, aus dem kleinern Gliede das nächste Größere zu erhalten, von dem Größern abziehet, und also das nächste Kleinere heraus bringt. Es wird also, diese Reihe von 5 zurück folgender massen stehen:

— 5 — 3 — 1 1, 3, 5.

und wenn man dieses zu dem vorigen hinzu setzet, so bekommt man die verlängerte Reihe:

— 5, — 3, — 1, 1, 3, 5, 5, 7, 9, 11, 13, 17.

Wor-

Voraus man siehet, daß eine Arithmetische Reihe vor sich und zurück XIII. immer weiter fortgesetzt werden könne, und uns nichts zwingt dieselbe Abschnitt, jemals zu enden: und daß die Glieder derselben von der 0, welche man sich in der gegenwärtigen Reihe zwischen -1 und $+1$ vorstellen muß, zu beyden Seiten beständig wachsen, doch so, daß die Glieder, welche an der einen Seite der 0 stehen, alle mit dem Zeichen $+$ versehen sind, und die Gegenseitige das Zeichen $-$ haben.

§. 70. Ferner aber schließen wir eben hieraus, daß die zweyte Art, eine Arithmetische Reihe heraus zu bringen, von der ersten im Grunde, nicht verschieden sey, und daß eben die Reihe durch die beständige Addition einerley Zahl so wohl als durch die beständige Subtraction heraus gebracht werden könne, indem wenn man sich, an statt der Addition, der Subtraction bedienet, bloß die Glieder in verkehrter Ordnung zu stehen kommen, wie in dem gegebenen Exempel augenscheinlich ist.

§. 71. Will man indessen eine Arithmetische Reihe schreiben, so muß man sie irgendwo anfangen, ob sie zwar ihrer Natur nach, weder Anfang noch Ende hat. Man stelle sich das erste Glied einer solchen Reihe unter a vor, und der Unterschied zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder derselben sey d , so wird das zweyte Glied derselben $a + d$, und das dritte $a + d + d$, das ist, $a + 2d$, und das vierte $a + 3d$, die Reihe also stehet folgender gestalt:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d,$$

und so fort. Steiget aber die Reihe unterwärts, das ist, ist das erste Glied grösser als das zweyte, und das zweyte grösser als das dritte, so kan man die Reihe am deutlichsten bezeichnen, wenn man setzt:

$$a, a - d, a - 2d, a - 3d, a - 4d, a - 5d$$

und so fort.

§. 72. Man siehet hieraus so gleich wie man aus dem ersten Glied einer Reihe und aus dem Unterschied der Glieder ein jedes Glied finden sol, dessen Entfernung von dem ersten gegeben ist. Gesezt, wir wollen das fünfte Glied von dem ersten finden, so ist dasselbe $a + 5d$; wenn die Reihe aufsteigt, und $a - 5d$ wenn sie niedersteigt. Man muß also in dem ersten Fall den Unterschied fünfmal genommen, das ist $5d$, zu dem ersten Gliede a addiren: und in dem zweyten Fall von demselben subtrahiren, wenn man das fünfte Glied haben wil. So ist es in allen Fällen, und wenn also n überhaupt bedeutet, um wie viel Glieder dasjenige von dem ersten entfernt sey, welches man suchet, so ist das

XIII. Glied, welches man suchet, $a + md$, oder $a - md$, nachdem die Reihe auf oder nieder steigt.

S. 73. Die Zahl m ist allezeit um eins kleiner als die Zahl aller Glieder der Reihe, zu welcher man das letzte suchet. Denn das zweite Glied der Reihe $a + d$ ist das erste von a , das dritte ist das zweite von a , und das vierte ist das dritte von a , und so fort. Wenn demnach die Zahl aller Glieder der Reihe durch n bedeutet wird, so ist $n - 1 = m$, und $n = m + 1$. Es ist gar leicht in allen Fällen die eine dieser Zahlen an die Stelle der andern zu gebrauchen.

S. 74. Da nun also bey den Bedeutungen, welche wir angenommen und beständig in dieser Abhandlung gebrauchen werden $a + md$ das letzte Glied einer aufsteigenden Arithmetischen Reihe bedeutet, so kan $a + md - d$ nichts anders bedeuten, als das nächste Glied vor dem letzten, weil dieses kommt, wenn von dem letzten Glied der Unterschied d abgezogen wird, und das Glied vor diesen, oder das zweite von dem letzten ist $a + md - 2d$, das dritte von dem letzten $a + md - 3d$, und so fort. Daß also wenn man nur die ersten und die letzten Glieder einer solchen Reihe bezeichnen wil, mit Auslassung der mittlern, man so schreiben muß:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + md - 2d, a + md - d, a + md$$

Und eben dieses kan auch eine niedersteigende Reihe bedeuten, wenn man das letzte Glied vor das erste hält, und die Glieder zurück zehlet.

S. 75. Hieraus aber siehet man so gleich in einem Blick, daß in einer jeden Arithmetischen Reihe die Summe des ersten und des letzten Gliedes so groß seyn müsse, als die Summe des zweiten und des nächsten an dem letzten, oder die Summe des dritten und des zweiten von dem letzten: ja daß überhaupt die Summe jeder zwey Glieder, die von den äußersten Gliedern der Reihe gleich weit entfernt sind, einer jeden andern dergleichen Summe gleich sind. Denn die Summe des ersten und letzten Gliedes ist $a + a + md = 2a + md$, und die Summe des zweiten und des nächsten an dem letzten ist $a + d + a + md - d = 2a + md$, und also so groß als die erstere. Die Summe der Glieder, welche zunächst auf diese folgen, ist $a + 3d + a + md - 3d = 2a + md$, wie vorher. Man siehet, daß diese Summen deswegen gleich werden, weil dasjenige, was dem Gliede, welches von dem letzten zurück gezehlet worden, an $a + mb$ fehlt, durch dasjenige ersetzt wird, so das Glied, das man von a an vor sich gezehlet, über das a enthält. Eine

klei-

Keine Uebersetzung desjenigen, so gezeigt worden ist, machet dieses klärer als viele Worte.

XIII.
Wissman.

§. 76. Wenn man eine Arithmetische Reihe von dem ersten Glied nach dem letzten, und wieder von dem letzten nach dem ersten, fortführet, so daß man wechselsweise einem jeden Theil der Reihe ein Glied zusetzet; und also auf der einen Seite immer so viele Glieder machet, als auf der andern: so muß die Reihe endlich voll werden: und zwar kan dieses auf zweyerley Art geschehen. Es kan erstlich das letzte Glied der Reihe, welche von a anfängt und beständig aufsteiget, nach und nach so groß werden, daß es unmittelbar vor den ersten Glied des andern Theils der Reihe, welchen man von dem letzten Glied $a + md$ zurück geführt hat, vorher gehe, wie dieses geschieht, wenn in der Reihe, die wir zum Exempel angenommen, m die Zahl 5 bedeutet, da dann die ganze Reihe sechs Glieder bekommt. In diesem Fall verwandelt sich diese Reihe in die nachfolgende:

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + 3d, a + 4d, a + 5d,$$

und das erste Glied des letztern Theils derselben $a + 3d$ folget unmittelbar auf das letzte Glied des erstern Theils $a + 2d$.

§. 77. In einer dergleichen Reihe ist die Zahl aller Glieder notwendig gerade, denn es stehen deren so viel in der einen Helfte von dem ersten Glied an, als in der andern Helfte stehen, die man von dem letzten Glied zurück geführt hat. Und wenn man demnach die Summe des ersten und letzten Gliedes, und aller übrigen machet, die von dem ersten Glied gleichweit entfernt sind, so bekommt man halb so viel dergleichen Summen, als Glieder in der ganzen Reihe sind. In unserm Exempel, da der Glieder an der Zahl sechs sind, sind der Summen drey. Da diese Summen einander gleich sind, darf man dieselbe nur durch die Zahl derselben, das ist, durch die Helfte der Zahl aller Glieder in der Reihe multipliciren, so bekommt man die Summe aller dieser Summen aus zwey und zwey Gliedern der Reihe, das ist, die Summe aller Glieder der ganzen Reihe. Und dieses ist die gemeine Regel, welche die Summen der Glieder Arithmetischer Reihen zu finden angegeben wird, deren Richtigkeit wir dergestalt in den Umständen gezeigt haben, wenn die Zahl der Glieder gerade ist. Man setzet das erste Glied der Reihe zu dem letzten, und multipliciret durch die Helfte der Zahl aller Glieder, so hat man die Summe. Es sey zum Exempel das erste Glied einer Arithmetischen Reihe 5, und der Unterschied 3. In dieser Reihe seyn 12 Glieder, so wird das letz-

XIII. **Abchnitt.** te $5 + 11 \times 3 = 38$: die Summe des ersten und letzten Gliedes ist demnach $5 + 38 = 43$; diese Summe durch die Helfte von 12, das ist, durch 6 multipliciret, giebt 258, die Summe aller Glieder der Reihe.

§. 78. Es kan aber auch eine dergleichen Reihe, welche man von dem ersten Glied nach dem letzten, und zugleich von dem letzten nach dem ersten dergestalt fortgeföhret hat, sich auf eine andere Art schliessen, indem nemlich das letzte Glied der vordern Helfte selbst, dem ersten Glied der hintern Helfte gleich wird. Dieses geschiehet allezeit, wenn m eine gerade Zahl bedeutet, und folgendes die Zahl aller Glieder in der Reihe ungerade ist, wie in dem nachfolgenden Exempel:

$$a, a + d, a + 2d \dots a + 2d, a + 3d, a + 4d,$$

da das letzte Glied der ersten Helfte $a + 2d$, dem ersten Glied der zweiten Helfte gleich ist. In diesem Falle ist das zweymal stehende Glied, als hier $a + 2d$ das mittelfte unter allen: und weil alles dasjenige, so von den Summen zweyer Glieder, die von dem äussersten gleich weit abstehen, erwiesen worden ist, auch hier zutreffen muß; so ist das mittlere Glied zweymal $2a + 4d$ genommen, so groß als die Summe der äussern Glieder $a + a + 4d$. Und wil man die Summe aller Glieder der Reihe finden, so multiplicire man erstlich die Summe aller Glieder durch die Zahl m halb genommen, welche Zahl hier gerade, und um eines kleiner ist, als die Zahl aller Glieder, so hat man die Summe aller Glieder, ausser dem mittelften: und wenn man also zu dieser Summe noch das mittelfte Glied hinzu setzet, so erhält man die Summe aller Glieder überhaupt.

§. 79. Stellet man sich diese Rechnungsart etwas genauer vor, so findet man, daß sie mit der vorigen im Grunde überein komme, und nach eben den Regeln verrichtet werden könne. Es sey die Summe des ersten und des letzten Gliedes einer dergleichen Reihe s ; so ist das mittelfte Glied derselben $\frac{1}{2}s$, weil dieses Glied gedoppelt, der gedachten Summe gleich ist. Die Summe aller Glieder der Reihe ist demnach $\frac{1}{2}ms + \frac{1}{2}s$, nach der Regel, die wir XIII, 78 gegeben haben, welches

Produet man auch so schreiben kan: $\frac{m+1}{2} \times s$. Denn wenn man die

Summe s wirklich durch $\frac{m+1}{2} = \frac{m}{2} + \frac{1}{2}$ multipliciren wil, so muß

man so wohl durch $\frac{m}{2}$ als durch $\frac{1}{2}$ multipliciren, XIII, 61, und dadurch erhält

erhält man $\frac{1}{2} m s + \frac{1}{2} s$. Es drucket also $\frac{m+1}{2} \times s$ die Summe aller Glieder der Reihe aus. Bedeutet aber n noch die Zahl aller Glieder der Reihe, wie wir dieses gleich Anfangs angenommen; so ist $m+1 = n$, und wenn man also das letztere an die Stelle des erstern schreibt, so wird die Summe aller Glieder der Reihe $\frac{n}{2} \times s$, das ist, die Summe aller Glieder wird gefunden, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes s durch die Hälfte der Zahl der Glieder $\frac{n}{2}$ multiplicirt; wie man dieses thun muß, wenn die Zahl aller Glieder gerade ist, XIII, 77.

S. 80. Es sey zum Exempel die Reihe, deren Summe man finden sol, nachfolgende 3, 5, 7 und so fort, bey welcher also $a = 3$ und $d = 2$, man sol die Summe von 13 Gliedern dieser Reihe finden, deren erstes die 3 ist; so ist $m = 12$, und das letzte Glied $a + m d$ ist $3 + 24 = 27$, folgendes die Summe des ersten und des letzten Gliedes $3 + 27 = 30$; dieses durch $\frac{1}{2}$, als die Zahl aller Glieder, multiplicirt, giebet $\frac{13 \times 30}{2} = 13 \times 15 = 195$: dieses ist die Summe aller Glieder dieser Reihe.

Von den geometrischen Zahlreihen.

S. 81. Die zweyte Reihe, welche wir insonderheit zu betrachten haben, ist die geometrische. Sie wird wieder aus zwey Gliedern verfertigt, welche gegeben, oder nach Belieben angenommen seyn können. Aus diesen zwey Gliedern wird das dritte gemacht, wenn man demselben gegen das zweyte eben die Verhältniß giebet, welche das zweyte gegen das erste hat: so, daß das erste, das zweyte und das dritte Glied eine zusammenhängende oder stetige Proportion ausmachen. Auf eben die Art wird aus dem dritten Glied das vierte. Man macht nemlich das vierte Glied so groß, daß das dritte Glied sich zu demselben verhalte, wie sich das erste zu dem zweyten verhält, und so gehet man weiter fort. Daß demnach in einer geometrischen Reihe alle Glieder gegen diejenigen, welche in der Reihe unmittelbar auf dieselben folgen, einerley Verhältniß haben.

S. 82. Gesezet, es bedeute a das erste Glied einer solchen Reihe, und b das zweyte, so wird das dritte $\frac{b b}{a}$, denn diese Zeichnung bedeu-

XIII.
Abschnitt.

Set die vierte Proportionalgröße zu a , b und b ; und das vierte Glied wird $\frac{b^3}{a^2}$, welches die vierte Proportionalgröße ist zu a , b , und dem dritten Gliede $\frac{b^2}{a}$. Das fünfte ist $\frac{b^4}{a^3}$ und so fort, VI, 117, daß demnach die Reihe folgendergestalt steht:

$$a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3}, \frac{b^5}{a^4}, \frac{b^6}{a^5}, \text{ und so weiter.}$$

Es sey zum Exempel $a = 2$, $b = 3$, so ist die Reihe 2, 3, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{81}{8}$, $\frac{243}{16}$, $\frac{729}{32}$ und so weiter.

S. 83. Man siehet hieraus so gleich, daß ein jedes Glied einer geometrischen Reihe, welches von dem ersten um eine Zahl von Gliedern entfernt ist, die man sich unter m vorstellen kan, nachfolgendergestalt ausgedrucket werden könne: $\frac{b^m}{a^{m-1}}$. Stehet nemlich m vor die

Einheit, und wil man also das nächste Glied nach dem ersten haben, welches vom Anfang der Reihe das zweyte ist, so ist, dasselbe $\frac{b^1}{a^{1-1}} = \frac{b}{a^0} = \frac{b}{1} = b$. Vor das dritte, vom Anfang der Reihe ist $m = 2$,

und es wird also $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ nunmehr $\frac{b^2}{a^{2-1}} = \frac{b^2}{a}$. Eben so wird das fünfte Glied von dem ersten gefunden, wenn man vor m in der allgemeinen Bezeichnung $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ die Zahl 5 setzt. Dadurch wird dieses Glied $\frac{b^5}{a^4}$

und $\frac{b^5}{a^4}$ bedeutet also das fünfte Glied von dem ersten, oder überhaupt das sechste Glied einer geometrischen Reihe, deren erstes Glied durch a , und das zweyte durch b bezeichnet wird. Man findet also nach dieser Regel ein jedes Glied der Reihe, wenn die zwey ersten Glieder derselben gegeben sind, und angezeigt wird, um wie viele Glieder dasjenige, so zu finden ist, von dem ersten abstehe.

S. 84. Man kan sich auch nachfolgender Anweisung bedienen, aus etlichen Gliedern einer geometrischen Reihe das nachfolgende heraus zu bringen, und also die Reihe so weit fortzusetzen, als man wil. Geßst,

A sey

A sey das erste Glied der Reihe, und B das zweyte. C aber sey ein jedes anderes Glied eben der Reihe, das dritte, vierte, fünfte, und so fort, oder auch das zweyte. Man nehme den Unterschied der ersten zwey Glieder $A - B$, oder $B - A$, und suche zu dem ersten Gliede A, zu diesem Unterschied, und zu dem Gliede C, die vierte Proportionalzahl. Diese ist der Unterschied des Gliedes C von demjenigen, so in der Reihe zu nächst auf C folget. Und wenn man also diesen Unterschied zu dem Gliede C hinzu setzet, oder von demselben abziehet, nachdem die Reihe steigt oder fällt, so erhält man das auf C folgende Glied der Reihe, welches wir mit D bezeichnen wollen. Da in einer solchen Reihe man ein jedes Glied vor das erste annehmen kan; so siehet man, daß man vor A ein jedes Glied der Reihe, und vor B dasjenige nehmen könne, so zu nächst darauf folget.

§. 85. Es sey das erste Glied der Reihe 8, das zweyte 12; so ist der Unterschied dieser Glieder 4. Man sage, wie das erste Glied 8 zu diesem Unterschied 4, so die zweyte 12 zu 6; diese 6 setze man zu dem zweyten Gliede hinzu, so erhält man das dritte Glied der Reihe 18. Ferner sage man, wie 8 zu 4, so das dritte Glied 18 zu 9 dem Unterschied des dritten und vierten. Dieser Unterschied giebet mit dem dritten Gliede das vierte Glied der Reihe 27, und eben so erhält man das fünfte $40\frac{1}{2}$, und die folgenden. Steiget die Reihe niedermwärts, und ist das erste Glied derselben 18, das zweyte 12, und folgendes der Unterschied dieser Glieder 6: so sage man, wie 18 zu 6, das ist, wie 3 zu 1, so das zweyte Glied 12 zu 4; diese Zahl von dem zweyten Gliede abgezogen, läßt 8, das dritte Glied der Reihe. Auf eben die Art findet man aus dem dritten Gliede das vierte, und so fort.

§. 86. Die Richtigkeit dieser Anweisung ist gar leicht einzusehen, wenn man sich unter A, B, C, D noch eben dergleichen Zahlen vorstellt, als wir diese Buchstaben im vorhergehenden haben bedeuten lassen: so ist, wenn die Reihe steigt, $A : B - A = C : D - C$; folgendes VI, 80 das erste Glied dieser Proportion zu der Summe des ersten und des zweyten, wie das dritte zu der Summe des dritten und vierten, das ist, $A : B = C : D$. Fället aber die Reihe, indem sie fortgehet, so ist $A : A - B = C : C - D$. Spricht man nun hier VI, 89, wie das erste Glied A zu dem Unterschied des ersten und zweyten Gliedes der Proportion $A - A + B$, so das dritte C, zu dem Unterschied des dritten und vierten $C - C + D$; so erhält man wieder A; B

XIII. $A : B = C : D$. Es wird demnach die Reihe, so fortgesetzt, daß das ~~vierte~~ Glied D, welches zu nächst auf C folgt, gegen das Glied C sich so verhält, wie das zweite Glied der Reihe B gegen dem ersten. Sie muß also XIII, 81 nothwendig eine geometrische Reihe werden.

Geometrische Reihen zu summiren.

§. 87. Was aber die Summen der Glieder der geometrischen Reihen anlangt, so kan uns nachfolgende Betrachtung zu deren Erfindung leiten. Es haben in einer geometrischen Reihe alle Glieder gegen dasjenige, so unmittelbar auf dieselben folgen, einerley Verhältniß; und wenn man also die Glieder, wie folgt, unter einander setzt:

$$\begin{array}{ccc} a & : & b \\ b & : & \frac{bb}{a} \\ \frac{bb}{a} & : & \frac{b^3}{a^2} \\ \frac{b^3}{a^2} & : & \frac{b^4}{a^3} \end{array}$$

so sind diese Verhältnisse alle gleich; und es verhält sich also die Summe aller ersten Glieder $a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2}$ zu der Summe aller letztern $b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3}$, wie sich a zu b verhält, VI, 103. Die erstere

Summe ist die Summe aller Glieder der Reihe außer dem letzten, und die letzte Summe ist die Summe aller Glieder der Reihe außer dem ersten. Demnach verhält sich in einer jeden geometrischen Reihe das erste Glied zu dem zweiten, wie die Summe aller Glieder der Reihe außer dem letzten, zu der Summe aller Glieder außer dem ersten.

§. 88. Man bezeichne die Summe aller Glieder mit s , und das letzte Glied der Reihe, welches wir sonst mit $\frac{b^m}{a^{m-1}}$ bezeichnet haben,

stelle man sich der Kürze halben unter a vor; behalte aber die Bedeutung der a und b , so wird die Proportion, welche eben mit Worten ausgedrucket ist, durch diese Zeichen also müssen ausgedrucket werden: $a : b = s - a : s - a$; und wenn man die erstern Glieder dieser Proportion von den letztern abzieheth, so wird VI, 89 $b - a : a = s -$

$a = s + u : s = u$, das ist, $b = a : a = u = a : s = u$. Es ist XIII. Abschnitz.
 Demnach $\frac{u - a}{b - a} + a = s = u$, und folgendes $\frac{u - a}{b - a} + a + u = s$.

S. 89. Hieraus läßt sich die Summe aller Glieder einer Progression s finden, wenn die ersten zwey Glieder derselben a und b , zusamt der Zahl der Glieder, deren Summe man suchet, gegeben ist. Denn aus diesen Zahlen kan man das letzte Glied u finden, und hat man dieses, so hat man alles, was zur Erfindung der Summe nöthig ist. Die Regel, welche wir eben durch Zeichen ausgedrückt haben, weist die Rechnungsarten, welche dazu erfordert werden, deutlich. Es sey in einer Progression $a = 1$, und $b = 5$, man wil die Summe der fünf erstern Glieder derselben haben, so ist $u = \frac{b^4}{a^3} = \frac{5 \times 5 \times 5 \times 5}{1 \times 1 \times 1} = 625$, und $u - a = 624$, $b - a = 4$, und fol-

gendes $\frac{u - a}{b - a} \times a = \frac{624}{4} = 156$, und wenn man demnach noch das letzte Glied hinzu setzt, so wird die Summe der Glieder, welche man suchte = 781.

S. 90. Wil man bequem und ohne vieles Nachsinnen rechnen, so muß in der Reihe, deren Summe man finden sol, das zweyte Glied größer seyn als das erste, weil man angenommen, daß sich dieses von einem abziehen lasse. Und man thut besser, wenn man vor solche Reihen, bey welchen die Glieder immer kleiner werden, die Regel etwas anders setzt. Wenn man nemlich wieder die Proportion annimmt, welche XIII, 84. erwiesen worden $a : b = s - u : s - a$, und ziehet nunmehr die letztern Glieder von den erstern ab, so bekommt man $a - b : a = s - u - s + a : s - u$, das ist $a - b :$

$a = a - u : s - u$, folgendes ist hier $\frac{a - u}{a - b} \times a = s - u$, und demnach $\frac{a - b}{a - b} \times a \times u = s$. Vergleichet man diese Regel mit der vorigen, so findet man, daß beide zugleich ausgedrückt werden, wenn man sagt: man müsse zu dem Unterschiede des ersten und zweyten Gliedes $b - a$, oder $a - b$ zu dem Unterschiede des ersten und letzten Gliedes $u - a$ oder $a - u$, und zu dem ersten Glied a die vierte Proportionalzahl finden, und derselben noch das letzte Glied u zusehen, damit man die Summe aller Glieder s erhalte.

S. 91. Es sey zum Exempel die Reihe, welche zu summiren ist
 P p p p von

XIII. von 5 Gliedern, und das erste Glied derselben sey $s = a$, das zweyte
 Abschnitt. $1 = b$, so wird das letzte $\frac{b^4}{a^3} = \frac{1}{125}$, und demnach $a - u = s - \frac{1}{125}$

$$= \frac{625 - 1}{125} = \frac{624}{125}, \text{ und } a - b = s - 1 \text{ das ist } 4, \text{ demnach } \frac{a - u}{a - b} \times a$$

$$= \frac{624 \times 5}{125 \times 4} = \frac{156 \times 5}{125} = \frac{780}{125}. \text{ Setzet man nun hierzu noch das letzte}$$

Glied $\frac{1}{125}$, so kommt die Summe aller Glieder der Reihe, welche demnach nachfolgende ist $7\frac{8}{125}$ oder $6\frac{3}{125}$.

§. 92. Es ist bey dergleichen Reihen das letzte Glied allezeit in Ansehung der erstern und der Summe klein, insonderheit, wenn die Reihe geschwinde absteiget, das ist, wenn das erste Glied in Ansehung des zweyten groß ist, und wenn der Glieder gar viele sind. In derjenigen Reihe, welche wir eben zum Exempel angenommen haben, war das fünfte Glied schon $\frac{1}{125}$, da das erste 5 war, weil nemlich das zweyte Glied 1 in Ansehung des ersten merklich klein ist. Wie sehr klein muß denn also das hundertste Glied einer solchen Reihe seyn? In diesem Falle also kan man die Summe ohne merklichen Fehler finden, wenn man das letzte Glied gar wegläset, oder wenn man dasselbe als gar nichts ansiehet. Nimmt man dieses an, so wird die Regul, nach welcher die Summe aller Glieder einer solchen Reihe gefunden wird $\frac{a - u}{a - b} \times a + u = s$, in die nachfolgende verwandelt $\frac{a - a}{a - b} = s$, und die

Summe alle Glieder der Reihe s ist die dritte Proportionalzahl zu dem Unterschiede der zwey ersten Glieder der Reihe $a - b$ und zu dem ersten Gliede derselben a .

§. 93. Wir wollen nach dieser Regul unser voriges Exempel rechnen. Es war in demselben $a - b = 4$ und $a = 5$, und es ist demnach $s = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$. Nach der genauen Regul war $s = 6\frac{3}{125}$, welches so viel ist als $6\frac{1}{411}$, woraus man siehet, wie gering der Fehler sey, welchen man, auch bey so wenigen Gliedern begehet, und also die Kleinigkeit desselben bey den Umständen, wenn entweder der Glieder der Reihe gar sehr viele sind, oder wenn dieselbe sehr stark abnehmen, gar leicht ermessen kan. Wenn in der geometrischen Reihe, die sich mit 5, 1 anfängt, hundert Glieder wären, so wäre $\frac{a - a}{a - b}$ oder $\frac{25}{4}$ der
 wahr

wahren Summe gar sehr nahe, noch näher aber, wenn der Glieder XIII. tausend wären, allgemein näher, wenn ihrer eine Million wäre, und Abschnitte so fort.

§. 94. Indessen fehlet man bey dieser Art Rechnung immer um eine Kleinigkeit, und zwar ist dieser Fehler der Unterschied der wahren Summe $\frac{a-u}{a-b} \times a + u$ und dasjenige, so man vor die Summe an-

genommen $\frac{aa}{a-b}$, und wenn man das erstere von dem letztern abzie-

het, so hat man diesen Fehler. Dieses zu verrichten, muß man diese Zahlen in Brüche von einerley Benennung verwandeln, welches geschiehet, wenn man in der erstern u durch $a-b$ multipliciret II, 19.

Sie wird dadurch $\frac{aa - au + au - bu}{a-b}$, das ist, weil $au - + au = 0$,

so ist die rechte Summe $\frac{aa - bu}{a-b}$. Diese nun von derjenigen, welche

wir davor angenommen $\frac{aa}{a-b}$, abgezogen, läßt $\frac{aa - aa + bu}{a-b}$,

das ist $\frac{bu}{a-b}$. Es verhält sich also der Unterschied der zwey ersten

Glieder $a-b$ zu dem zweyten Gliede b , wie das letzte Glied u zu dem Fehler um welchen man zu viel genommen, indem man $\frac{aa}{a-b}$ vor

die Summe aller Glieder der Reihe gesetzt hat: woraus man vollkommen sehen kan, wie gar sehr klein dieser Fehler bey den gesetzten Umständen seyn müsse. In unserm Exempel, da $a-b = 4$, $b = 1$

und $u = \frac{1}{2}$, ist der Fehler $\frac{1}{4 \times 125} = \frac{1}{500}$, welches mit dem vorigen

überein kommt. Denn wenn man von $6 \frac{1}{2}$ diesen Fehler $\frac{1}{500}$ abziehet, so bleibt $6 \frac{124}{125}$, welches so viel ist als $6 \frac{1}{125}$, wie vorher XIII, 88. gefunden worden.

§. 95. Es ist also, wenn wir diesen kleinen Fehler bey den bestimmten Umständen verachten $\frac{aa}{a-b}$ allezeit der Reihe $a + b + \frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2}$

+ &c. ohne merklichen Fehler gleich, wie viele Glieder derselben man

XIII. man auch annehmen wil, und wenn man beiderseits durch eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl n multipliciret, so wird auch $n \cdot \frac{a^a}{a-b}$ der Reihe $na + nb + \frac{n b^2}{a} + \frac{n b^3}{a^2} + \&c.$ ohne sonderlichen Fehler gleich. Man kan allezeit eines vor das andere setzen: den Bruch vor die Reihe, und die Reihe vor den Bruch.

§. 96. Es kommen zuweilen auch dergleichen geometrische Reihen vor, bey welchen die Zeichen der Glieder abwechseln, als $a - b + \frac{b^2}{a}$

$-\frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3} - \frac{b^5}{a^4}$ und so fort. Die Summirung der Glieder solcher

Reihen kan man aus den gegebenen Regeln unmittelbar herleiten. Denn wenn man nur in denselben vor $+b$ setzt $-b$, so hat man die Regeln, nach welchen dergleichen Reihen berechnet werden müssen. Weil aber dieses bey denjenigen, vor welche wir schreiben, noch vielleicht einige Schwierigkeit lassen dürfte, so wollen wir die Gründe davon auf eine andere Art, aus demjenigen herleiten, so gewiesen worden ist. Wir bemerken zu dem Ende, daß, wenn man die Glieder einer geometrischen Reihe wechselsweise nimmet, nemlich das erste a , das dritte $\frac{b^2}{a}$, das fünfte $\frac{b^4}{a^3}$ und so fort: Diese Glieder wieder eine geometrische

Reihe geben; und daß eben dieses geschehe, wenn man das zweyte Glied b und das vierte $\frac{b^3}{a^2}$ und das sechste $\frac{b^5}{a^4}$ und so fort annimmet.

Die zwei Reihen, die auf diese Art aus der gegebenen entsprungen sind, sind diese:

$$a. \quad \frac{b^2}{a} \quad \frac{b^4}{a^3} \quad \frac{b^6}{a^5} \quad \text{und f. w.}$$

$$b. \quad \frac{b^3}{a^2} \quad \frac{b^5}{a^4} \quad \frac{b^7}{a^6} \quad \text{und so fort.}$$

Man sieht leicht, daß dieses geometrische Reihen sind, und zwar am allerleichtesten, wenn man betrachtet, daß jedes Glied einer jeden dieser Reihe entstehet, wenn man dasjenige, so unmittelbar vorher gehet mit $\frac{b^2}{a^2}$ multipliciret, das ist, wenn man zu a , b und dem vorherge-

hen

henden Glied die vierte Proportionalgröſſe ſuchet. Auf die Art wird $\frac{b^2}{a}$ aus a , und $\frac{b^3}{a^2}$ aus b , und ſo weiter. Es hat demnach ein jedes Glied dieſer Reihen gegen dasjenige, ſo unmittelbar auf daſſelbe folget, die Verhältniß, welche $aa:bb$ hat.

§. 97. Und hieraus ſchließen wir, daß die Summe aller Glieder einer ſolchen geometriſchen Reihe, in welcher die Zeichen $+$ und $-$ beſtändig abwechſeln, als $a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^4}{a^3}$ und ſo fort, dem Unterſchied der Summe der Glieder dieſer zwei Reihen $a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^3}$ und $b + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^5}{a^4}$ &c. gleich ſey, und dieſes ſiehet man ſo gleich aus der Betrachtung dieſer Reihen. Man darf alſo nur nach den gegebenen Regeln die eine und die andere dieſer Summen berechnen, und ſo dann die letzte von der erſten abziehen. Wir erachten nicht nöthig, uns hiebey auf etwas weiters einzulaſſen, als daß wir zeigen, wie in dem Fall zu verfahren iſt, wenn die Reihe abſteiget, und deren letztes Glied ſo klein iſt, daß man es vor nichts halten kan.

§. 98. In dieſem Falle verhält ſich der Unterſchied der zwei erſten Glieder der Reihe zu dem erſten, wie das erſte zur Summe, XIII, 91. und demnach iſt die Summe aller Glieder der Reihe $a + \frac{b^2}{a} + \frac{b^4}{a^3} + \frac{b^6}{a^5}$

und ſo fort, bis man das letzte Glied vor nichts halten kan, dieſe $\frac{a^2 - b^2}{a}$

Wenn man aber den Zehler und Nenner durch a multipliciret, ſo wird dieſe Summe $\frac{a^2 - b^2}{a^2}$. Die Summe der zweyten Reihe $b + \frac{b^3}{a^2} + \frac{b^5}{a^4}$

wird durch einen eben dergleichen Schluß gefunden. Man muß ſagen, wie der Unterſchied des erſten und zweyten Gliedes $b - \frac{b^3}{a^2}$ zu dem erſten Gliede b , ſo das erſte Glied b zur Summe, und dieſe iſt demnach $\frac{b^2 - b^4}{b^2}$

XIII. $\frac{bb}{b-b^3}$
 Abkürzt.

Und multipliciret man hier den Zehler und Nenner durch a^2 ,

so wird diese Summe $\frac{a^2 b^2}{a^2 b - b^3}$; oder wenn man beide Glieder durch b

dividiret, so wird eben diese Summe also ausgedrückt $\frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$. Ziehet

man nun diese letzte Summe von der erstern ab, so bekommt man die Summe der Glieder der Reihe mit abwechselnden Zeichen,

$a - b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^3}{a^2}$ und so fort, und diese Summe ist demnach

$\frac{a^3}{a^2 - b^2} - \frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$ das ist, weil die Nenner einerley sind, $\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - b^2}$.

§. 99. Der Zehler in dieser Regel $a^3 - a^2 b$ ist ein Product aus den zwey Zahlen a^2 und $a - b$, wie man leicht sieht. Und der Nenner kan durch die Multiplication dieser zwey Zahlen $a + b$ und $a - b$ entstehen. XIII, 65. Zerfällt man also die Glieder dieses Bruchs

$\frac{a^3 - a^2 b}{a^2 - b^2}$ welcher die Summe aller Glieder der Reihe ausdrückt, so wir betrachten, in die Zahlen aus deren Multiplication sie entstanden sind; so wird diese Summe also ausgedrückt: $\frac{a^2 \times a - b}{a + b \times a - b}$. Und

wenn man die Glieder beyde durch $a - b$ dividiret, so zeigt sich die Summe, welche wir suchen aufs kürzeste folgender gestalt $\frac{a^2}{a + b}$

und es verhält sich die Summe des ersten und zweyten Gliedes einer Reihe, deren Glieder bey abwechselnden Zeichen $+$, $-$ immer kleiner werden, indem sie sich von dem ersten entfernen, zu dem ersten Gliede; wie dieses erste Glied zu einer vierten Zahl, welche der Summe aller Glieder der Reihe desto näher kommet, je mehr der Glieder an der Zahl sind, und je geschwinder sie absteigen.

§. 100. Es sey zum Exempel die Reihe diese nachfolgende:
 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ und so fort, man wil die Summe von den hundert ersten Gliedern derselben ohne sonderlichen Fehler haben, so ist

$a=1$, $b=\frac{1}{2}$, und $a+b=\frac{3}{2}$, demnach die Summe $\frac{a^2}{a+b} = \frac{2}{3}$. Und XIII. Abschnitt.

diesem Bruch $\frac{2}{3}$ kommt die Summe der Reihe noch näher, wenn man die tausend ersten Glieder derselben nimmt, und so fort. Nämlich die Summe der zwey ersten Glieder der Reihe $1 - \frac{1}{2}$ ist $= \frac{1}{2}$, und das dritte Glied $\frac{1}{4}$ dazu, giebt $\frac{3}{4}$ oder $\frac{6}{8}$. Ziehet man hiervon das vierte Glied $\frac{1}{8}$ ab, so bleibt $\frac{5}{8}$ oder $\frac{10}{16}$, und das fünfte dazu giebt $\frac{11}{16}$. Dieses ist von $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ schon nicht sehr verschieden, und dieser Unterschied wird immer kleiner, je weiter man geht.

S. 101. Und so viel von den Summen der Glieder der geometrischen Reihen. Es ist übrig, daß wir zeigen, wie aus jeden zwey Gliedern einer solchen Reihe, deren Entfernung von einander bekannt ist, ein jedes anderes Glied zu finden sey, welches von dem ersten Glied der Reihe um so viel Glieder entfernt ist, als man wil. Es sey eine Reihe, deren erstes Glied 1; und das achte 128 ist, wie groß ist das fünfte Glied dieser Reihe, oder das eilfte? Wie diese und dergleichen Fragen zu beantworten sind, haben wir noch zu weisen. So trocken auch diese Abhandlung scheinen mag, so ist sie doch von ganz ungemeinen Nutzen, und wir sind dem grössen Newton, welcher uns hiezu eine gar bequeme Anweisung gegeben hat, auch davor vielen Dank schuldig.

Wie oft eine beliebige Zahl von zweyerley Buchstaben versetzt werden könne.

S. 102. Wir werden uns bemühen die Gründe dieser Anweisung so kurz und deutlich zu zeigen, als uns möglich ist. Wir müssen aber einige kleine Betrachtungen von der Versetzung zweyerley Buchstaben oder anderer Dinge machen, ehe wir uns wirklich dazu wenden können. Es seyn die zweyen Buchstaben, welche zusammen zu setzen sind a und b , man set a so wohl als b so oft nehmen als man wil, a zum Beispiel ein mal und b zwey mal, und dieselbe folgender gestalt abb , bba , bab zusammen setzen. Die Frage ist, wie oft dieses bey einer jeden angenommenen Zahl des Buchstabens a , und bey jeder angenommenen Zahl des Buchstabens b geschehen könne, und wie viele verschiedene Ordnungen der Buchstaben man dadurch heraus bringe? Wird a nur ein mal und b zwey mal gesetzt, so siehet man leicht, daß sich diese Buchstaben nach nicht mehr verschiedenen Arten zusammen setzen lassen, als nach den dreyen, die wir eben hergesetzt abb , bba , bab .
Wie

XIII. Wie ist es aber, wenn der *a* zwey, drey, vier oder mehrere sind, wie Abschnitt. auch der *b*?

§. 103. Diese Frage leicht zu beantworten bemerken wir erstlich, daß eine jede Ordnung von Buchstaben von der Art derjenigen, die wir betrachten, als *ababba*, aus einer jeden andern Ordnung von eben so vielen Buchstaben entstehen könne, in welcher vor ein *b* der gegenwärtigen Ordnung ein *a* stehet, weil man nemlich vor ein jedes solches *a* wieder das *b* setzen kan. Diese Ordnungen sind: *aaabba*, *abaaba*, *ababaa*. Wenn man in der ersten dieser Ordnungen vor das zweyte *a*, oder in der zweyten vor das dritte *a*, ein *b* setzt; wie auch, wenn man in der dritten in die Stelle des dritten *a* ein *b* bringet, so erhält man immer die erst gegebene Ordnung der Buchstaben *ababba*.

§. 104. Die Anwendung dieses Satzes wird erleichtert, wenn wir ihn also ausdrücken: Eine jede Ordnung von zweyen Buchstaben *ababba*, kan durch die Verwechselung eines einzigen *a* mit einem *b* aus so viel andern Ordnungen eben so vieler *a*, *b*, deren jede aber ein *b* weniger hat, entstehen, als vielmals in der ersten *b* enthalten ist. Nemlich da in der Ordnung, die wir zum Exempel angenommen haben, der Buchstabe *b* drey mal stehet, übrigens aber dieselbe überhaupt sechs Buchstaben hat, so kan dieselbe aus drey Ordnungen von sechs Buchstaben, unter welchen sich aber nur zwey *b* befinden, heraus gebracht werden, welche diese sind: *aaabba*, *abaaba*, *ababaa*. Man siehet leicht, daß dieses mit andern Worten eben das sage, so wir eben gelesen haben.

§. 105. Zweytens bemerken wir, daß aus einer jeden Ordnung zweyer Buchstaben *aabbaa* eine andere Ordnung von eben so vielen Buchstaben, unter welchen aber ein *b* mehr anzutreffen ist, als in der vorigen, so oft könne heraus gebracht werden, als oft in derselben *a* anzutreffen ist. Und dieses deswegen, weil man vor jedes *a* der gegebenen Ordnung ein *b* setzen kan. Es können aus der Ordnung der vier *a*, und zwey *b* welche wir angenommen haben, nachfolgende vier Ordnungen von dreyen *b* und dreyen *a* gemacht werden: *babbaa*, *abbbaa*, *aabbaa*, *aabbab*.

§. 106. Es seyn nunmehr fünf Buchstaben zusammen zu setzen, von zweyerley Benennungen *a* und *b*, so siehet man so gleich, daß, wenn man bloss fünf *a* und gar kein *b* nehmen wil, man aus denselben nicht mehr als eine einzige Ordnung heraus bringen könne, nemlich diese

Diese *aaaaa*. Und dieses ist richtig, es mag die Zahl aller Buchstaben XIII. so groß oder so klein seyn als man wil. Die Ordnung, welche man *Abkürzt* aus zwanzig *a* an einander gesetzt, machen kan, ist ebenfalls nur eine einzige. Denn es wird gesetzt, daß man ein *a* von dem andern, und ein *b* von dem andern nicht unterscheide.

S. 107. Wil man aus dieser Ordnung *aaaaa* eine andere machen, in welcher noch fünf Buchstaben, aber unter derselben ein *b* vorkommt: so kan vermöge des Satzes XIII, 105. dieses so oft geschehen, als viel mal in dieser Ordnung *a* vorkommt, das ist, so viel mal, als viele Buchstaben in derselben stehen, weil man an die Stelle eines jeden *a* ein *b* setzen kan. Dadurch kommen diese fünf Ordnungen

*baaaa**abaaa**aabaa**aaaba**aaaab*.

Und man siehet überhaupt, daß, wenn man sich die Zahl der Buchstaben, deren hier fünf sind, unter den Buchstaben *n* vorstellet, welcher eine jede Zahl bedeuten kan: die Zahl der Ordnungen, die aus einem *b* und einer Zahl der *a*, die um eins kleiner ist als *n*, gemacht werden können, allezeit der *n* gleich seyn werde.

S. 108. Aus einer jeden dieser fünf Ordnungen kan man nun andere machen, welche zwey *b* und nur drey *a* enthalten. Und zwar, weil in jeder der vorstehenden Ordnungen vier *a* stehen, so giebt eine jede derselben vier Ordnungen von drey *a* und zwey *b*. XIII, 105. Die bestehende Tafel weist deutlich wie dieses zu verrichten sey. Die vorigen fünf Ordnungen stehen oben, und diejenigen, die aus einer jeden heraus gebracht werden, unter denselben:

<i>baaaa</i>	<i>abaaa</i>	<i>aabaa</i>	<i>aaaba</i>	<i>aaaab</i>
<i>bbaaa</i>	<i>bbaaa</i>	<i>babaa</i>	<i>baaba</i>	<i>baaab</i>
<i>babaa</i>	<i>abbaa</i>	<i>abbaa</i>	<i>ababa</i>	<i>abaab</i>
<i>baaba</i>	<i>ababa</i>	<i>aabba</i>	<i>aabba</i>	<i>aabab</i>
<i>baaab</i>	<i>abaab</i>	<i>aabab</i>	<i>aaabb</i>	<i>aaabb</i>

Wil man demnach die Zahl aller dieser Ordnungen, in welchen *b* zwey mal vorkommt, geschwind haben, so multiplicire man die Zahl der Ordnungen, in welchen ein *b* vorkommt, 5, durch die Zahl der *a* welche in diesen Ordnungen vorkommen, welche allezeit um 1 kleiner und also hier 4 ist, so ist 5×4 die Zahl aller Ordnungen, in welchen *a* drey mal

XIII. und b zwey mal vorkommt, welche wir dergestalt heraus gebracht haben. Wir werden aber so gleich sehen, daß noch etwas bey dieser Rechnung zu bessern sey. Indessen siehet man nach einem kleinem Nachdenken, daß dieses überall statt haben müsse. Und da wir gesehen, daß, wenn n immer die Zahl der Buchstaben einer jeden Ordnung bedeutet, eben diese Zahl n auch die Zahl der Ordnungen sey, in welchen nur ein b anzutreffen ist, und da die Zahl der a in diesen Ordnungen nothwendig $n - 1$ ist; so ist beständig die Zahl aller Ordnungen von eben so vielen Buchstaben, unter welchen aber zwey b vorkommen, wie wir sie zur Zeit heraus gebracht, dem Product $n \times n - 1$ gleich.

§. 109. Allein wenn wir einen Blick auf die Tafel XIII, 8. zu rück werfen, in welcher wir alle Ordnungen dreyer a und zweyer b vorgestellt haben, so sehen wir, daß diese Ordnungen nicht alle verschieden sind: sondern daß in der Tafel eine jede Ordnung zwey mal vorkomme. Und aus dem vorhergehenden kan uns leicht beyfallen, warum dieses geschehen müsse. Da diese Ordnungen von zweyen b und dreyen a aus den erstern, in welchen nur ein b vorkommt, gemacht worden sind; so ist jede Ordnung so oft heraus gebracht worden, als oft in derselben b stehet, nemlich zwey mal XIII, 104. Wil man also nur die Zahl derjenigen Ordnungen haben, die von einander verschieden sind, um welche es uns auch eigentlich zu thun ist; so muß man die vorige Zahl durch 2 theilen. Es wird also in unserm Exempel die eigentliche Zahl der verschiedenen Ordnungen $5 \times 4 = 10$, und überhaupt $n \times n - 1$.

2

Diese verschiedene Ordnungen sind nachstehende :

$bbaaa$	$abbaa$	$aabba$
$babaa$	$ababa$	$aabab$
$baaba$	$ababb$	$aaabb$
$baaab$	$ababb$	$aaabb$

§. 110. Es wäre zu weitläufig, wenn wir die folgende Ordnungen, in welchen immer ein b mehr und ein a weniger vorkommt, ebenfalls alle wirklich darstellen wolten. Wir haben das bisherige nur zum deutlichen Verstand angebracht, und können nunmehr leicht schließen, daß aus einer jeden der gefundenen Ordnungen dreyer a und zweyer b wir drey Ordnungen machen können, in welchen drey b vorkommen, weil wir nemlich vor ein jedes a einer jeden der letzt gefundenen

XIII. man die Zahl der Ordnungen finden will, in welchen noch ein b mehr und ein a weniger steht, als vorher. Unter den Ordnungen von einem a und vier b , deren Zahl wir bereits gefunden haben, ist diese $abbbb$. An die Stelle eines jeden a kan man b setzen, und weil nur ein a vorhanden ist, so können der Ordnungen, in welchen b fünfmal steht, nur so viele heraus gebracht werden, als viele der Ordnungen von vier b , und einem a sind. Diesem zu folge wäre die ganze Zahl aller Ordnungen, in welchen fünf b und kein a anzutreffen, die Zahl der vorigen von vier b $\times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$ durch 1 multipliciret. Weil aber in diesen Ordnungen fünf b vorkommen, so geben fünf der vorigen Ordnungen nur eine der gegenwärtigen, und man muß nicht durch 1 sondern $\frac{1}{5}$ multipliciren, wenn man die eigentliche Zahl der verschiedenen Ordnungen, die aus fünf b gemacht werden können, haben wil. Es wird demnach diese Zahl $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}$, das ist 1, und man sieht vor sich leicht, daß dieses seine Richtigkeit habe, weil man die Ordnung $bbbbbb$ nicht verändern kan. Ueberhaupt aber wird die Zahl der verschiedenen Ordnungen der Buchstaben a und b , wenn unter denselben fünf b vorkommen, und folgendes $n-5$ die Zahl der a ausdrückt, diese: $\frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3 \times n-4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$. Und dieses ist hin-

länglich einzusehen, wie diese Regul weiter fortzusetzen ist.

§. 113. Wir können diese Sache, nachdem die Gründe davon, wie wir hoffen, nunmehr vollkommen klar sind, auch kürzer fassen. Es sey in einer beliebigen Menge von zweyerley Buchstaben a und b , die Zahl aller Buchstaben, wie bishero immer, n , und die Zahl der b in dieser Menge sey m : so ist die Zahl der a welche in derselben befindlich sind $n-m$. Die Zahl aller Ordnungen aber, welche man den Buchstaben geben kan, wenn m die Zahl der b und $n-m$ die Zahl der a ausdrückt, sey P . Sol man nun hieraus die Zahl aller möglichen Ordnungen finden, welche eben die zwey Buchstaben haben können, deren Zahl noch die vorige n ist, unter welchen aber ein b mehr, und folgendes ein a weniger vorkommt als vorher, so daß die Zahl der b welche nunmehr in den Ordnungen vorkommen, durch $m+1$ auszu- drücken ist: so muß man die Zahl der möglichen Ordnungen P , welche wir als bekannt angenommen haben, durch die Zahl der a multi- pliciren, welche in denselben Ordnungen vorkommen, das ist, durch $n-m$, und nachdem man dadurch das Product $P \times n-m$ erhalten, so muß dasselbe durch die Zahl der b getheilet werden, welche in der neuen Ord-

Ordnungen vorkommen, das ist, durch $m + 1$. XIII, 108. Dadurch erhält man die Zahl aller möglichen Ordnungen die man suchet, und es ist demnach dieselbe $P \times \frac{n-m}{m+1}$. Es verhält sich also bey den öfters

erwehnten Umständen, und wenn man die Ordnungen, in welcher ein b mehr vorkommt, die folgenden nennet, und die andere in welcher ein a mehr vorkommt als in der folgenden, die vorhergehenden: es verhält sich, sage ich, die Zahl der b in den folgenden Ordnungen nemlich $m+1$, zu $n-m$, der Zahl der a in den vorhergehenden, wie sich die Zahl aller möglichen vorhergehenden Ordnungen P , zu der Zahl aller möglichen nachfolgenden Ordnungen verhält.

S. 114. Es sey unter einer beliebigen Zahl n von Buchstaben gar kein b , und folgendes sey $m=0$, so wissen wir bereits, daß sich die Buchstaben von einerley Art nicht in verschiedene Ordnungen, dergleichen wir hier betrachten, setzen lassen, XIII, 106. und daß folgendes P die Einheit bedeute. Wil man nun die Zahl aller möglichen Ordnungen haben, in welchen b einmal vorkommt, so schreibe man in $P \times \frac{n-m}{m+1}$ an statt P die 1, und an statt m setzet man 0, so wird $1 \times \frac{n}{1}$

die Zahl aller möglichen Ordnungen von zweyerley Buchstaben a und b unter welchen b nur einmal vorkommt, wie wir sie bereits oben gefunden.

S. 115. Wil man aus der Zahl dieser Ordnungen, als den vorhergehenden die Zahl aller möglichen Ordnungen finden, welche darauf folgen, in welchen nemlich zwey b vorkommen, so ist P nunmehr so gefunden $= 1 \times \frac{n}{1}$, m aber ist nunmehr $= 1$, und n behält seine

Bedeutung, denn die Zahl aller Buchstaben bleibt beständig einerley. Wenn man demnach in $P \times \frac{n-m}{m+1}$ vor P , $1 \times \frac{n}{1}$, und vor m , die 1, schreibet, so bringet man die Zahl aller Ordnungen heraus, in welcher zwey b vorkommen, und diese ist $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$.

S. 116. Auf eben die Art findet man aus der Zahl aller möglichen Ordnungen der Buchstaben, unter welchen zwey b sind, die Zahl aller möglichen Ordnungen der Buchstaben, unter welchen drey b

XIII. **Abschnitt.** vorkommen. P iſt nunmehr $= 1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$ und $m=2$. Geſet

man nun dieſes beedes an ſeine Stelle in der Regel $P \times \frac{n-m}{m+1}$ ſo wird

die Zahl aller möglichen Ordnungen bey drey b , dieſe $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$
 $\times \frac{n-2}{3}$.

S. 117. Nicht anders ſchließet man auch die Zahl der möglichen Ordnungen der Buchſtaben bey vier, fünf und ſechs b , aus den vorigen. Es gehet alles beſtändig nach einerley Geſetzen fort. Die Nummer der Brüche, welche in einander zu multipliciren ſind, werden immer um eins größer, und die Zehler nehmen um 1 ab: vor jedes b aber, welches in der Menge der Buchſtaben, deren mögliche Ordnungen man ſuchet, an ſtatt eines a geſetzt wird, muß ein dergleichen Bruch zu den vorigen, als ein Factor, hinzu kommen.

S. 118. Wird nun die Bedeutung des Buchſtabens n beſtimmt, und alſo die Zahl der Buchſtaben, welche in ihre Ordnungen zu bringen ſind, wirklich angezeigt; ſo findet man alles in wirklichen Zahlen. Die möglichen Ordnungen z. E. aus fünf Buchſtaben von zweyerley Art a und b ſind dieſe. Sind alle fünf Buchſtaben a , ſo iſt die Summe aller möglichen Ordnungen 1.

Iſt unter denſelben ein b , und ſind die übrigen vier Buchſtaben a , ſo iſt die Summe aller möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1}$, das iſt, weil

$$n=5, 1 \times \frac{5}{1} = 5.$$

Sind unter den Buchſtaben zwey b , und ſind die übrigen drey Buchſtaben a , ſo iſt die Zahl der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}$, das iſt, $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} = 10$.

Sind unter denſelben drey b , und ſind die übrigen zwey Buchſtaben a , ſo iſt die Zahl der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}$, das iſt $1 \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{3}{3} = 10$.

Sind unter den Buchſtaben vier b , und nur ein a , ſo iſt die Zahl der

der möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ das ist $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4}$ XIII.
 $\times \frac{n-4}{5} = 1$.

Sind endlich unter diesen Buchstaben fünf b , und also kein a , so ist die Zahl aller möglichen Ordnungen $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$, das ist $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \frac{n-3}{4} \times \frac{n-4}{5}$, welches nicht mehr als die Einheit bringt. Weiter kan man nicht kommen, weil, wenn man einen Schritt weiter thun wolte, der Bruch, welchen man noch zu dem vorigen, als einen Factor hinzu setzen müste, 0 werden, und dasselbe durch die Multiplication gänzlich vernichten würde. Es sind demnach alle mögliche Ordnungen aus fünf Buchstaben von zweyer Benennung gefunden, welche wir suchten.

§. 119. Aus diesem allen nun können wir sehen, durch wie vielerley Multiplicationen ein Product, in welchem zweien Buchstaben in gewissen Dignitäten vorkommen, entstehen könne, dergleichen Producte sind ab^2 , a^2b , und überhaupt $a^n b^m$. Das erstere dieser Producte kan auch so geschrieben werden, abb , wie auch bab und bba , und wenn man nach Maafgebung einer jeden Ordnung, diesen Buchstaben multipliciret, so entsteht immer eben das Product ab^2 , weil die Ordnung in der Multiplication nichts ändert. I, 96. Nemlich, wenn man erstlich b durch b , und das Product durch a multipliciret, oder wenn man b durch a und das Product durch b multipliciret, oder auch wenn man a durch b multipliciret, und das Product nochmals durch b , so entsteht allezeit eben das Product ab^2 . Hieraus schliesset man so gleich, daß das Product ab^2 durch so vielerley Multiplicationen entstehen könne, als viel mal sich die drey Buchstaben abb versetzen lassen. Und so ist es in allen dergleichen Fällen. Das Product a^2b kan durch so vielerley Multiplicationen entstehen, als vielmal sich die Buchstaben $aabb$ versetzen lassen, und das Product $a^n b^m$, in welchem wir die Exponenten mit denselben Buchstaben ausgedrucket haben, deren wir uns XIII, 13. bey der Regel bedienen, die wir eben zu Ende gebracht, entsteht durch so vielerley Multiplicationen, als viele der Ordnungen sind, in welche sich die Buchstaben $aaa \dots$ und $bb \dots$ setzen lassen, deren Zahl überhaupt n ist, und unter welchen die Zahl m der b vor- kommt.

XIII.
Abschnitt.

§. 120. Diese Betrachtungen können wieder sehr trocken scheinen. Es wird sich aber der Nutzen derselben so gleich zeigen; indem wir sie auf die Dignitäten solcher Wurzeln, welche aus zwey Theilen bestehen, anwenden, und zeigen wollen, wie solche Dignitäten zusammen zu setzen sind: welches jedoch der geringste Nutzen ist, welchen diese Lehre bringen wird. Die nützlichsten und tiefften Betrachtungen gründen sich darauf, deren einige im Verfolg vorkommen werden,

Die Dignitäten einer zweytheiligen Wurzel.

§. 121. Es bedeute $a + b$ eine Wurzel von zwey Theilen. Wir werden hernach an statt der $+ b$ auch $- b$ setzen. Vors erste aber können wir es bey der angenommenen Zeichnung bewenden lassen. Die zweyte Dignität dieser Wurzel entsteht ohnfehlbar, wenn man sie mit sich selbst, das ist, mit $a + b$ multipliciret. Man verrichte diese Multiplication, aber man verfahre dabey dergestalt, daß man die Buchstaben, mit welchen man multipliciret, allezeit den andern vorsehe, welche man multipliciret, so wird die Rechnung, oder vielmehr die Bezeichnung der Rechnung, welche man vornehmen mußte, wenn an der Stelle der Buchstaben die Zahlen stunden, welche die Buchstaben bedeuten können, diese seyn:

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab + ba + bb \end{array}$$

Das Product ist die zweyte Dignität der Wurzel $a + b$. Betrachtet man dasselbe etwas genauer, so siehet man, daß es aus allen Producten bestehe, welche entstehen können, wenn man zwey der Buchstaben a und b in allen möglichen Ordnungen, die von einander verschieden sind, in einander multipliciret. Denn man hat in denselben wirklich a mit a , b mit a , a mit b , und b mit b multipliciret, und auf mehrere Arten kan man zween Buchstaben von zweyerley Benennung nicht mit einander multipliciren.

§. 122. Will man nun die dritte Dignität von eben der Wurzel $a + b$ haben, so muß man die zweyte, welche wir gefunden, nochmals durch die Wurzel multipliciren. Man verfahre bey dieser Multiplication wieder wie gewiesen worden ist, und schreibe die Buchstaben, durch welche man multipliciret, vor diejenigen, welche man multipliciret, so stehet die Rechnung in folgender Ordnung:

Die

Die zweyte Dignität: $aa + ab + ba + bb$ Die Wurzel $a + b$ XIII.
Abschnitt.

$$\begin{array}{r} aaa + aab + aba + abb \\ + baa + bab + bba + bbb \end{array}$$

Wenn man nun das Product, welches die dritte Dignität der Wurzel $a + b$ ist, ebenfalls betrachtet, so findet man, daß bey demselben eben dergleichen richtig sey, als wir eben bey der zweyten Dignität bemerkt haben. Es bestehet dieses Product aus allen Producten, welche aus den Buchstaben a und b entstehen können, wenn man derselben drey nimmet, wie man nur kan, nemlich entweder drey a , oder zwey a und ein b , oder ein a und zwey b , oder drey b , und multipliciret jede drey angenommene Buchstaben in so mancher Ordnung in einander, als möglich ist. Denn wenn man die zweyen Buchstaben a und b mit einander verknüpft, wie man nur kan, wie dieses bey der zweyten Dignität geschehen, und man setzet hernach einer jeden Verknüpfung so wohl a als auch b vor, so ist klar, daß dadurch alle Verknüpfungen dreyer Buchstaben entstehen müssen, die nur möglich sind. Dieses aber ist geschehen, indem aus der zweyten Dignität die dritte gemacht worden.

§. 123. Wir hatten die zweyen Buchstaben a, b . Vor jeden derselben konnte entweder a oder b stehen. Dieses sind die Ordnungen alle, welche diese Buchstaben haben können, wenn man sie zwey und zwey mit einander verknüpft. Und diese Verknüpfungen zusammen machen die zweyte Dignität der Wurzel $a + b$. In derselben sind also die letzten Buchstaben so oft verändert als möglich ist, und die erstern sind auch so oft verändert als möglich ist. Will man also noch einen Buchstaben vor die zwey vorigen setzen, und denselben wieder so oft verändern als möglich ist, so hat man nur einer jeden der vorigen Verknüpfungen aa, ab, ba, bb so wohl a als auch b vorzusetzen. Dadurch wird auch der erste der drey Buchstaben, welche man dergestalt zusammen setzet, so oft verändert, als bey den gesetzten Bedingungen, daß nemlich nur die beyden Buchstaben a und b gebraucht werden sollen, möglich ist. Und man bekommt also wieder alle Ordnungen, in welche sich die drey Buchstaben setzen lassen, oder alle Producte, welche aus diesen Buchstaben gemacht werden können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen mit einander multipliciret. Nun aber entstehet die dritte Dignität der Wurzel $a + b$ wenn man allen Theilen der zweyten Dignität, so wohl a als auch b als einen Multiplicator vorsetzt.

XIII. **Abchnitt.** **§et.** Demnach enthält diese dritte Dignität alle Producte, die aus dreien Buchstaben, von der Benennung a und b , entstehen können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret.

§. 124. Dieses kan genug seyn uns weiter zu führen. Alle mögliche Ordnungen aus vier Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, entstehen aus allen Ordnungen dreier dieser Buchstaben, wenn man einer jeden dieser Ordnungen so wohl a als auch b vorsetzet, und eben diese Ordnungen bezeichnen alle Producte, welche man aus diesen vier Buchstaben machen kan, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret. Es wird aber durch diese Multiplication aller möglichen Producte aus dreien Buchstaben, erstlich durch a , und so dann auch durch b , die vierte Dignität der Wurzel $a + b$ hervor gebracht: weil, indem man diese Multiplication verrichtet, ein jedes der Producte, aus welchen die dritte Dignität bestehet, so wohl durch a als durch b multipliciret wird. Demnach bestehet die vierte Dignität von $a + b$ aus allen Producten von vier Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, welche entstehen können, wenn diese Buchstaben in jeder möglichen Ordnung in einander multipliciret werden.

§. 125. Und eben so bestehet die fünfte Dignität der Wurzel $a + b$ aus allen Producten aus fünf Buchstaben, deren keiner von a oder b verschieden ist, die entstehen können, wenn man diese Buchstaben in einer jeden möglichen Ordnung in einander multipliciret. Man kan die Rechnung welche wir angefangen leicht fortsetzen, wenn man noch den geringen Anstand bey diesen Dingen haben sollte, und dadurch alles den Augen deutlich vorstellen, so der Verstand begreifen sol. Thut man dieses, so siehet man gar leicht, daß überhaupt eine jede Dignität der Wurzel $a + b$ zu erhalten, man so viele Buchstaben a und b auf alle mögliche Arten nehmen müsse, als viele Einheiten der Exponent der Dignität hat, welche man schaffen sol, und daß aus denselben alle Producte zu machen seyn, welche daraus entstehen können, wenn man sie in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret.

§. 126. Ich will die fünfte Dignität aus $a + b$ haben: so nehme ich $aaaaa$, $aaaab$, $aaabb$, $aabbb$, $abbbb$, $bbbbb$, oder a^5 , a^4b , a^3b^2 , a^2b^3 , ab^4 , b^5 . Der ersten Producte a^5 nehme ich so viele, als vielmals dieses Product aus seinem einfachen Factoren a heraus gebracht werden kan, wenn man die Ordnung der Multiplication verändert so oft man kan. Es kan
aber

aber dieses nur einmal geschehen: ich nehme also auch nur ein a^5 . XIII. Ferner nehme ich der Producte a^4b so viele, als vielmals sich die einfachen Factoren desselben a und b verwechseln lassen. Diese Verwechslung kan fünfmal geschehen, also nehme ich fünf a^4b . Eben so verfähret man mit den übrigen. Das Product a^3b^2 kan aus seinen einfachen Factoren a und b auf zehn verschiedene Arten entstehen, also nehme ich 10 a^3b^2 . XIII, 118. Verfolgt man diese Arbeit, so bekommt man endlich die fünfte Dignität von $a + b$ welche diese ist: $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

§. 127. Will man also überhaupt die Dignität von $a + b$ haben deren Exponent n ist, welche man gemeinlich so ausdrucket $a + b^n$, so wird dieselbe:

$$a^n + n \times a^{n-1} b + \frac{n \times n-1}{2} \times a^{n-2} b^2 + \frac{n \times n-1 \times n-2}{6} a^{n-3} b^3$$
 und so fort. Denn dieses sind alle Producte, welche entstehen können, indem man von den Buchstaben a und b die Zahl n nimmt, wie man nur kan, und dieselbe in allen möglichen Ordnungen in einander multipliciret: weil n die Zahl aller möglichen Multiplication ausdrucket, durch welche $a^{n-1}b$ entstehen kan, und $\frac{n \times n-1}{2}$ die Zahl derjenigen, durch welche man $a^{n-2}b^2$ erhält, und so fort. Dieses ist die Newtonische Regel eine jede Dignität einer Wurzel zu finden, welche aus zweyen Theilen bestehet.

§. 128. Hat, in der Wurzel, b das Zeichen $-$, und ist also die Wurzel $a - b$, so bekommen alle Dignitäten der b , deren Exponent ungerade ist, eben das Zeichen, die übrigen aber behalten das Zeichen $+$. Denn das Product $1 \times -b$ ist $-b$, aber das Product $-b \times -b$ ist b^2 , und das Product $-b \times b^2$ ist $-b^3$. Diese Zeichen werden durch die übrige Multiplicationen, welche die Regel vorzunehmen weist, nicht verändert, und man kan also die Regel leicht machen, nach welcher man die Dignität, deren Exponent n ist, von der Wurzel $a - b$ findet, wenn man nur in der eben gegebenen Regel die Zeichen derjenigen Glieder verändert unter deren Factoren eine Dignität von b mit einem ungeraden Exponenten, 1 oder 3 oder 5 und so fort, vorkommet: Demnach ist $a - b^n = a^n - n \times a^{n-1} b + \frac{n \times n-1}{2} \times a^{n-2} b^2 - \frac{n \times n-1 \times n-2}{6} a^{n-3} b^3 + \frac{n \times n-1 \times n-2 \times n-3}{24} a^{n-4} b^4 - 8c.$

¶

§. 129.

XIII. §. 129. Wir wollen, ehe wir weiter gehen, die Anwendung dieser Regel in einem Exempel weisen, welches zum deutlichen Verstand des folgenden vieles beytragen wird. Man sol das siebende Glied einer geometrischen Reihe, deren erstes die Einheit, und das zweyte 11 ist, oder welches auf eben das hinaus kommt, man sol die sechste Dignität der Zahl 11 schaffen, so theile man diese Zahl 11 in zwey bequeme Theile, welche hier 10 und 1 sind, mit welchen jede Multiplicationen gar leicht zu verrichten stehen, und da also hier $a + b = 10 + 1$, und folgendes in der XIII, 127 gegebenen Regel $a = 10$, $b = 1$, und $n = 6$, so mache man nach Anleitung derselben

$$a^n = 10^6 = - - - - - 1000000.$$

$$n \times a^{n-1} b = 6 \times 100000 = - - - - - 600000.$$

$$n \times n - 1 \times a^{n-2} b^2 = 6 \times \frac{1}{2} \times 10000 = - - - - - 150000.$$

$$\frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times a^{n-3} b^3}{2 \quad 3 \quad 2 \times 3} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 1000}{- - -} = 20000.$$

$$\frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3 \times a^{n-4} b^4}{2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \times 3} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 100}{- - -} = 1500.$$

$$\frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3 \times n - 4 \times a^{n-5} b^5}{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 2 \times 3 \times 4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 10}{- - -} = 60.$$

$$\frac{n \times n - 1 \times n - 2 \times n - 3 \times n - 4 \times n - 5 \times a^{n-6} b^6}{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1}{- - -} = 1.$$

Die Summe aller dieser Zahlen ist die verlangte sechste Dignität der Zahl 11, oder es ist $11^6 = 1000000 + 600000 + 150000 + 20000 + 1500 + 60 + 1$, das ist 1771561.

§. 130. Sol man an statt der 10 + 1 oder 11. die Zahl 10 - 1 oder 9 zur sechsten Dignität erheben, so bleiben die Zahlen alle wie wir sie gefunden; nur bekommt die zweyte Zahl 600000 das Zeichen -, wie auch die vierte und die sechste, und es wird demnach die sechste Dignität der Zahl 9 diese 1000000 - 600000 + 150000 - 20000 + 1500 - 60 + 1 = 53144.

§. 131. Man siehet aus diesem Exempel gar leicht, was auch aus der allgemeinen Betrachtung der Regel erhellet, daß wenn b viel kleiner ist als a , die nachfolgenden Glieder in Ansehung der vorhergehenden gar klein werden: wie denn in unserm Exempel das dritte Glied 150000 noch nicht der zehende Theil ist des ersten und andern zusammen.

men genommen 1600000. Ist demnach das zweyte Glied b in An- XIII.
 sehung des ersten gar sehr klein, so kan man sich blos an dem ersten Abschnitt,
 und zweyten Gliede begnügen lassen. Und es ist in diesem Falle
 $a + b^n = a^n + n a^{n-1} b$, ohne einen sonderlichen Fehler, welcher desto klei-
 ner wird, je kleiner b in Ansehung des a ist. Eben so ist bey diesem
 Verstand fast $a - b^n = a^n - n a^{n-1} b$, und man fehlet, indem man die-
 ses annimmt, desto weniger, je kleiner b in Ansehung des a ist. Ist
 zum Exempel $a = 1000$ und $b = 1$, und man sol die dritte Dignität
 von $a + b$ oder 1001 schaffen, so ist $a^n = 1000^3 = 1000000000$, und
 $n a^{n-1} b = 3000000$. Die Summe dieser zwey Glieder kan man vor
 die verlangte Cubiczahl annehmen. Sie kommt in der That dersel-
 ben gar nahe. Die Summe der gefundenen zwey Glieder ist
 1003000000 und die Cubiczahl von 1001 ist eigentlich 1003003001.
 Man siehet, daß der Unterschied dieser zwey Zahlen 3001 in Ansehung
 des Ganzen in keine sonderliche Betrachtung könne gezogen werden.
 Wir werden künftig diese Anmerkung zu den wichtigsten Erfindungen
 gebrauchen, und sie ist also nicht ausser Acht zu lassen, so gering sie
 auch dem ersten Anblick nach scheinen mag.

Ein jedes Glied einer geometrischen Reihe zu finden.

§. 132. Gegenwärtig wenden wir uns zu demjenigen, so wir bey
 unserer vorhabenden Betrachtung noch zu zeigen haben: wie nemlich
 in einer geometrischen Reihe deren erstes Glied die Einheit ist, und in
 welcher ein anderes Glied zusamt desselben Entfernung von dem ersten
 ebenfalls gegeben ist, erstlich das zweyte, und so dann ein jedes ande-
 res Glied zu finden sey. Es sey das gegebene Glied $a + b^z$: so stelle
 man sich eine geometrische Reihe vor, deren Glieder nachfolgender Ge-
 stalt stehen: 1, $a + b^n$, $a + b^{2n}$, $a + b^{3n}$ $a + b^{zn}$.
 und nehme an, daß das Glied derselben $a + b^{zn}$ mit dem gegebenen
 $a + b^z$ einerley sey, welches allerdings seyn muß, wenn z die Entfer-
 nung des gegebenen Gliedes $a + b^z$ von dem ersten bedeutet, oder wenn
 man setzt, daß z so viele Einheiten enthalte, als viele Glieder in der
 Reihe von dem ersten bis an $a + b^z$ stehen XIII, 82: So ist das zwey-
 te Glied dieser Reihe $a + b^n$. Weil aber $a + b^{zn} = a + b^z$, so sind
 nothwendig die Exponenten dieser Dignitäten einerley, nemlich $zn = z$.

XIII.

Abchnitt. und folgendes $n = \frac{e}{t}$. Man kan also den Exponenten des zweyten Gliedes, aus dem gegebenen Exponenten e , und aus der Zahl der Glieder t , leicht finden.

§. 133. Hat man aber dergestalt n aus e und t ausgedrückt, so kan man auch das zweyte Glied aus dem gegebenen $a + b^e$ und der Zahl t wirklich ausdrücken. Denn $a + b^n$ hat man in der allgemeinen Regel $= a^n + n \times a^{n-1}b + n \times \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 \&c.$ Setzet man nun

in derselben vor n überall den Bruch $\frac{e}{t}$ so wird wirklich das zweyte Glied, welches man suchte $a + b^e$ aus dem gegebenen Gliede $a + b^e$, und aus der Zahl t bestimmt. Wir wollen uns aber hieby noch nicht aufhalten.

§. 134. Gleichwie in der bezeichneten Reihe 1, $a + b^n$, $a + b^{2n}$, $a + b^{3n}$, $a + b^{4n}$ &c. $2n$ der Exponent desjenigen Gliedes ist, so von der Einheit um zwey Glieder entfernt ist, und $3n$ der Exponent desjenigen, so von der Einheit um 3 Glieder abstehet: also bedeutet überhaupt in dieser Reihe $a + b^{rn}$ ein jedes Glied, welches von dem ersten Gliede der Reihe 1 um so viel Glieder abstehet, als viele Einheiten in der Zahl r enthalten sind. Und wil man dieses Glied aus der allgemeinen Regel ausdrücken, so hat man in derselben nur überall an statt n das Product rn zu setzen. Nun haben wir gesehen, daß bey demjenigen, so wir hier zum Grunde legen; $n = \frac{e}{t}$ also ist $rn = \frac{re}{t}$:

und das Glied, welches durch $a + b^{rn}$ bezeichnet wird, das ist, ein jedes Glied der Reihe 1, $a + b^n$, $a + b^{2n}$ &c. welches von dem ersten um so viele Glieder entfernt ist, als viele Einheiten in der Zahl r enthalten sind, wird auch durch $a + b^{\frac{re}{t}}$ ausgedrückt, welche Zeichnung an die Hand

gibt, wie dasselbe aus dem gegebenen Gliede der Reihe $a + b^e$, und aus der Zahl der Glieder entstehen könne, die in der Reihe zwischen der 1 und $a + b^e$ stehen, welche Zahl wir uns unter t vorstellen. Es wird demnach dieses Glied gefunden, wenn man in der Regel an statt des n überall den Bruch $\frac{re}{t}$ setzet.

§. 135.

§. 135. Man nehme $e = r$, wie man der Bequemlichkeit halber gewöhnlich zu thun pfleget, so wird $\frac{r^e}{e} = \frac{r}{e}$. Setzt man nun diesen

XIII. Abschnitt.

Bruch an die Stelle des n der Regel, so wird $a^n = a \cdot \frac{r}{a}$.

$$n \times a^{n-1} b = \frac{r}{e} \times \frac{e}{a^e} - 1 b = \frac{r}{e} \times \frac{e}{a^e} b$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times a^{n-2} b^2 = \frac{r}{e} \times \frac{e}{2e} \times \frac{e}{a^e} - 2 b^2 = \frac{r}{e} \times \frac{e}{2e} \times \frac{e}{a^e} b^2$$

$$n \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times a^{n-3} b^3 = \frac{r}{e} \times \frac{e}{2e} \times \frac{e}{3e} \times \frac{e}{a^e} b^3, \text{ und so fort,}$$

$$\text{wie man leicht sieht. Demnach ist } a + b \frac{r}{e} = a^e + \frac{r}{e} \times \frac{e}{a^e} b + \frac{r}{e} \times \frac{e}{2e} \times \frac{e}{a^e} b^2$$

$$+ \frac{r}{e} \times \frac{e}{2e} \times \frac{e}{3e} \times \frac{e}{a^e} b^3, \text{ und so fort. Oder wenn man dem}$$

gemeinschaftlichen Factor $a^{\frac{r}{e}}$ von dem übrigen absondert, so wird

$$a + b \frac{r}{e} = a^{\frac{r}{e}} \times \left(1 + \frac{r}{e} \times \frac{b}{a} + \frac{r}{e} \times \frac{r-1}{2e} \times \frac{b^2}{a^2} + \frac{r}{e} \times \frac{r-1}{2e} \times \frac{r-2}{3e} \times \frac{b^3}{a^3} + \dots \right)$$

und so immer fort, nach eben den Gesetzen. Diese Reihe drückt also

ein Glied einer geometrischen Reihe $a \times b^{\frac{r}{e}}$ aus, welche von der 1 anfängt, und in welcher das Glied $a + b^{\frac{r}{e}}$, so wir vor $a + b^e$, gesetzt haben, um so viele Glieder von der 1 entfernt ist, als viele Einheiten die Zahl e enthält. Die Zahl der Glieder aber, welche in der Reihe von der Ein-

heit an, bis an das Glied $a \times b^{\frac{r}{e}}$ stehen, dieses Glied mit gerechnet,

oder die Zahl aller Glieder der Reihe bis an das Glied $a \times b^{\frac{r}{e}}$, die Einheit mit gerechnet, und dieses Glied ausgeschlossen, ist e .

§. 136. Man sieht leicht, daß man nach eben der Regel auch

$$a - b$$

XIII.

Abschnitt.

$a - b^r$ zusammen setzen könne, und daß dazu nichts anders erfordert werde, als daß man dem b immer das Zeichen — gebe, so oft es vorkommt, wobei nur nicht aus der Acht zu lassen, daß $-b \times -b$ das Product $+bb$ gebe, und so in andern dergleichen Fällen. Alles übrige

bleibt. Es bedeutet $a - b^r$ ebenfalls in der Reihe, in welcher $a - b^r$ oder $a - b$ von der Einheit um so viele Glieder entfernt ist, als viele Einheiten in r enthalten sind, dasjenige Glied, welches von dem ersten um so viele Glieder absteht, als viele Einheiten die Zahl r ausma-

chen. Dieses Glied $a - b^r$ ist also $= a^{\frac{r}{t}} \times (1 - \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} + \frac{r}{t} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{b^2}{a^2} - \frac{r}{t} \times \frac{r-1}{2} \times \frac{r-2}{3} \times \frac{b^3}{a^3} + \&c.$

§. 137. Es enthält diese Regel alles was bisher von dieser Sache gewiesen worden ist, weil die Buchstaben r, t eine jede Zahl bedeuten können, die man nur annehmen wil; und wir werden uns also künftig hin an diese Regel allein halten. Auch hier kan man öfters nur die drey oder zwey ersten Glieder vor die ganze Reihe annehmen, wenn die Glieder sehr abnehmen, und $\frac{b}{a}$ viel kleiner wird als 1, und so

fort. Ob dieses sey, siehet man in der Anwendung, wenn die Bedeutung der Buchstaben bestimmt wird, gar leicht.

§. 138. Ist t in Ansehung des r sehr groß, es mag nun r bedeuten, was es wil, so ist $r - t$ von $-t$ nicht sonderlich verschieden: noch weniger aber fehlet man, wenn man vor $r - t$ nur $-t$ setzt, und wieder weniger, wenn man vor $r - t$ bloß $-t$ annimmt. Bey diesen geringen Fehlern, welche noch immer kleiner und kleiner werden, je größer t in Ansehung des r wird, kan man nach einer Regel rechnen, welche aus der vorigen mit Hinweglassung aller r , wo dieselben in der Verknüpfung mit t vorkommen, folgender massen gemacht

wird. Es bleibt $\frac{r}{t} = \frac{r}{t}$, aber $\frac{r}{t} \times \frac{r-1}{2}$ wird nunmehr $\frac{r}{t} \times \frac{-1}{2}$

— $\frac{r}{2^t}$ und $\frac{\frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t} - \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t}}{2^t}$ wird $\frac{\frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t} - \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t}}{2^t} = \frac{r}{2^t}$. Das XIII. Abschnitt.

folgende Glied $\frac{\frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t} - \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t}}{2^t} \times \frac{r}{2^t} - \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t}$ verwandelt sich in dieses

$$\frac{\frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t} - \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t}}{2^t} \times \frac{r}{2^t} - \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t} \times \frac{r}{2^t} = -\frac{r}{2^t} \text{ und so geht es weiter fort.}$$

Demnach bey den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich t in Ansehung der r gar sehr groß ist, die Regel selbst nachfolgende Form bekommt:

$$a + \frac{r}{b^t} = a^{\frac{r}{b^t}} \left(1 + \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} - \frac{r}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} + \frac{r}{3t} \times \frac{b^3}{a^3} - \frac{r}{4t} \times \frac{b^4}{a^4} + \text{etc.} \right)$$

S. 139. Hat aber b das gegenseitige Zeichen —, so wird die Regel nachfolgender Gestalt ausgedrückt:

$$a - \frac{r}{b^t} = a^{\frac{r}{b^t}} \left(1 - \frac{r}{t} \times \frac{b}{a} + \frac{r}{2t} \times \frac{b^2}{a^2} - \frac{r}{3t} \times \frac{b^3}{a^3} \text{ und so fort, vollkommen, wie vorher, nur bekommen alle Glieder, ausser dem ersten, das Zeichen —.} \right)$$

Begriffe der Logarithmen.

S. 140. Man hat auf diese Betrachtung, welche ein jedes Glied einer geometrischen Reihe, die von der Einheit anfängt, aus einem gegebenen Glied der Reihe und der Entfernung desselben von der Einheit, zu finden lehret, eine besondere Rechnungsart gegründet, welche nicht nur in vielen Fällen leichter ist als die gemeine; sondern auch verschiedene Aufgaben zu lösen im Stande ist, welche ohne derselben eine ungemeine Schwierigkeit haben würden. Dieses wird vermittelt der so genannten Logarithmen verrichtet, welche man im deutschen Verhältnisszahlen nennen könnte. Diese Zahlen sind zwar bereits gefunden: es kan uns aber bey dem Gebrauch derselben ein gar grosses Licht geben, wenn wir sie auch selber zu finden wissen. Wie dieses ohne grosse Weitläufigkeit geschehen könne, geben die bisherige Betrachtungen an die Hand. Wir wollen diese Materie in eben der Deutlichkeit abzuhandeln trachten, welcher wir uns bisher immer beflissen haben.

XIII. §. 141. Man stelle sich nochmals eine Geometrische Reihe unter
 Abschnitt. der allgemeinen Bezeichnung vor:

$$1, a^n, a^{2n}, a^{3n}, a^{4n}, a^{5n}, a^{6n} \dots a^{mn},$$

so verhält sich ein jedes Glied derselben, welches man annehmen wil, zu den unmittelbar folgenden, wie dieses letztere Glied zu demjenigen, welches unmittelbar nach demselben steht. Es ist $1 : a^n = a^n : a^{2n}$, und $a^n : a^{2n} = a^{2n} : a^{3n}$, und so überall. Dieses ist aus den ersten Begriffen klar. Denn eben diese Gleichheit der Verhältniß eines jeden Gliedes zu demjenigen, welches unmittelbar auf dasselbe folgt, machet, daß die Glieder eine Geometrische Reihe mit einander machen. Folgendes entsteht die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, welches von demselben das zweite ist, als $a^n : a^{3n}$, wenn man die Verhältniß eines Gliedes der Reihe, welches man annehmen wil, zu demjenigen so unmittelbar auf dasselbe folgt, als $1 : a^n$, zweymal setzt. VIII, 2. Dadurch entsteht die Verhältniß $1 : a^{2n}$, und die Verhältniß $a^n : a^{3n}$ ist dieser Verhältniß $1 : a^{2n}$ gleich. Man siehet leicht, daß eben dieses richtig seyn werde, wenn man diese Verhältnisse verkehrt setzt. Die Verhältniß $a^{3n} : a^n$ ist ebenfalls aus der Verhältniß $a^n : 1$ zweymal genommen, zusammen gesetzt.

§. 142. Auf eben die Art siehet man, daß die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so von demselben um drey Glieder entfernt ist, als $a^n : a^{4n}$ entstehe, wenn man die Verhältniß eines Gliedes eben der Reihe zu dem unmittelbar folgenden $1 : a^n$ drey-mal nimmt, denn wenn man die Verhältniß $1 : a^n$ drey-mal zusammen setzt, so bekommt man die Verhältniß $1 : a^{3n}$, und diese ist mit der vorigen $a^n : a^{4n}$ einerley. Auf eben die Art schließet man, daß die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so von demselben das vierte ist, entstehe, wenn man die Verhältniß eines jeden Gliedes eben der Reihe viermal zu sich selbst setzt und so fort. Auch dieses ist richtig, wenn man die Verhältnisse verkehrt setzt.

§. 143. Betrachtet man nun die Verhältniß eines Gliedes einer solchen Reihe zu demjenigen, so unmittelbar auf dasselbe folgt, welche allezeit der Verhältniß $1 : a^n$ gleich ist, als einfach, so muß man die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, welches von demselben um zwey Glieder entfernt ist, als $a^n : a^{3n}$, als zweyfach ansehen, weil sie durch die Zusammenlegung zweier Verhältnisse, die der ersten gleich sind, entsteht; und die Verhältniß eines jeden Gliedes zu demjenigen, so von demselben um 3 Glieder entfernt ist, muß man

man bey eben dieſen Bedingungen als dreyſach anſehen, und ſo fort. XIII.
 VIII, 7. Die Entfernung des zweyten Gliedes der Verhältniß von Abſchnitt.
 dem erſten, in der angenommenen Reihe, zeigt allezeit, wie oft die
 Verhältniß eines Gliedes derſelben zu dem unmittelbar folgendem, zu-
 ſammen zu ſetzen ſey, damit die gedachte Verhältniß heraus komme.
 Iſt ein Glied der Reihe, welches wir q nennen wollen von a^m um ei-
 ne Zahl von Gliedern entfernt, welche durch m ausgedrückt wird, ſo
 muß die Verhältniß $1 : a^m$ ſo oft zuſammen geſetzt werden, als viele
 Einheiten in m enthalten ſind, damit eine Verhältniß heraus gebracht
 werde, welche der Verhältniß $a^m : q$ gleich ſey. Und eben ſo oft muß
 die Verhältniß $a^m : 1$ zuſammen geſetzt werden, wenn man die Ver-
 hältniß $q : a^m$ heraus bringen wil. Eben ſo iſt es auch in dem folgen-
 den, ob wir zwar nicht nöthig finden, es allezeit zu erinnern.

S. 144. Es gründen ſich alſo dieſe Benennungen auf die Reihe,
 welche man angenommen, oder vielmehr auf die Verhältniß $1 : a^m$,
 aus welcher man die ganze Reihe beſtimmet hat: welche Verhältniß
 man als die einfache betrachtet. In Anſehung dieſer Verhältniß nen-
 net man die Verhältniß $1 : a^{2m}$ doppelt, und die Verhältniß $1 : a^{3m}$
 dreyſach. Bey einer andern einfachen Verhältniß müſten dieſe Na-
 men ohnfehlbar geändert werden. Zum Exempel, wenn man vor a^2
 die Zahl 2 ſchreibt, ſo wird die Reihe nachſolgende 1, 2, 4, 8, 16, 32,
 64, 128 u. ſ. f. Betrachtet man nun die Verhältniß $1 : 2$, welche der
 Verhältniß $2 : 4$ oder $4 : 8$ gleich iſt, als einfach, ſo iſt die Verhältniß
 $1 : 4$ oder $2 : 8$, oder $4 : 16$ u. ſ. w. als gedoppelt, und die Verhältniß
 $1 : 8$ oder $2 : 16$ oder $4 : 32$ u. ſ. w. als dreyſach anzusehen. Nach eben
 dieſen Geſetzen ſind die Verhältniſſe zu benennen, welche entſtehen,
 indem man die einfache Verhältniß vier, fünf, ſechs und mehrmal
 zuſammen ſetzt. Nimmet man aber eine andere Verhältniß zum
 Grunde, welche man als die einfache betrachtet, und aus derſelben die
 Geometriſche Reihe machet, als dieſe $1 : 4$, wodurch nachſtehende Rei-
 he kommt :

1, 4, 16, 64, 256, 1024, u. ſ. f.

ſo iſt die Verhältniß $1 : 4$, welche in Anſehung der vorigen Verhält-
 niß $1 : 2$ zweyſach war, nunmehr nur einfach, die Verhältniß $1 : 16$
 welche vorher als vierſach angeſehen wurde, iſt nunmehr nur zwey-
 ſach, und ſo gehet es immer fort. Die Sache iſt natürlich. Nach-
 dem dasjenige groß oder klein iſt, welches man vor die Einheit annimt,
 wird ein jedes Ding, ſo man durch dieſelbe Einheit ausmiſſet, bald
 mit einer kleinern bald mit einer gröſſern Zahl ausgedrückt.

XIII. Abschnitt. §. 145. Setzt man zwischen jede zwey Glieder der Geometrischen Reihe, die mittlere Proportionalzahl, so bekommt man eine neue Geometrische Reihe, welche aus dem vorigen dergestalt ausgedruckt ist:

$$1, a^{\frac{n}{2}}, a^n, a^{\frac{3n}{2}}, a^{2n}, a^{\frac{5n}{2}}, a^{3n}, \text{ u. s. f.}$$

Die Glieder, deren Exponenten in Gestalt der Brüche stehen, sind die Glieder, welche man zwischen die Glieder der vorigen Reihe gesetzt hat. Und man sieht leicht, daß dadurch wieder eine Geometrische Reihe heraus gebracht werde, wenn man das erste und zweyte Glied, oder die Verhältniß $1 : a^{\frac{n}{2}}$ zum Grunde nimmt, und aus derselben eine Geometrische Reihe zu machen anfängt. Denn dadurch wird eben diejenige heraus gebracht, welche wir gesetzt haben.

§. 146. Behält man nun im übrigen dasjenige, so im Anfang angenommen worden ist, und betrachtet die Verhältniß $1 : a^n$ noch als einfach, so kan man die Verhältniß $1 : a^{\frac{n}{2}}$ nicht anders als eine halbierte Verhältniß nennen, und eben diesen Namen muß man nunmehr der Verhältniß eines jeden Gliedes gegen dasjenige, so unmittelbar auf dasselbe folgt, geben. Die Verhältniß $a^n : a^{\frac{n}{2}}$ ist eine halbierte Verhältniß, weil die Verhältniß $a^n : a^{2n}$ als die ganze Verhältniß betrachtet wird. Man nennet eine dergleichen Verhältniß im Lateinischen eine rationem subduplicatam.

§. 147. Man kan aber auch zwischen jede zwey Glieder einer Geometrischen Reihe zwey, oder drey, oder mit einem Wort, so viele Glieder setzen als man wil, welche mit denjenigen, zwischen welche man sie gesetzt hat, wieder eine Reihe geben, und in diesem Fall entsteht allemal eine neue Geometrische Reihe, wenn man eben dergleichen Zwischensätze bey allen Gliedern der vorigen vornimmt. Wir lassen uns begnügen, zwischen die Glieder der erst bezeichneten Reihe, zwey andere zu setzen, welche die angegebene Eigenschaften haben, so siehet die neue Reihe in folgender gestalt:

$$1, a^{\frac{n}{3}}, a^{\frac{2n}{3}}, a^n, a^{\frac{4n}{3}}, a^{\frac{5n}{3}}, a^{2n}, a^{\frac{7n}{3}}, a^{\frac{8n}{3}}, a^{3n}.$$

Weil hier wieder die Verhältniß $1 : a^{\frac{n}{3}}$ oder $a^n : a^{\frac{2n}{3}}$ als die einfache Ver-

Verhältniß angesehen wird, und die Verhältniß $1 : a^3$, oder $a^3 : a^3$, oder überhaupt die Verhältniß eines jeden Gliedes der Reihe zu demjenigen, so unmittelbar auf dasselbe folget, drey mal zusammen gesetzt werden muß, damit die gedachte einfache Verhältniß $1 : a^n$ heraus komme: so

muß man die Verhältniß $1 : a^3$ und eine jede andere, die ihr gleich ist, ansehen, als ob sie entstanden wäre, indem man die einfache Verhältniß in drey gleiche Verhältnisse zertheilet. Man nennet deswegen eine solche Verhältniß, indem man sie auf die Verhältniß beziehet, welche man als einfach und ganz ansiehet, eine rationem subtriplicatam: und hieraus verstehet man leicht, was rationes subquadruplicatae, subquintuplicatae und submultiplicatae quavis, heißen.

§. 148. Aus diesen Gründen folget dasjenige, so wir von dem Gebrauch der Logarithmen oder den Verhältnißzahlen zu sagen haben; unmittelbar; und man siehet gar leicht, warum sie so genennet werden. Man stelle sich eine beliebige Geometrische Reihe vor, welche man von der Einheit anfangen kan, ob zwar dieses nicht unumgänglich nöthig ist. Wir wollen dazu eine der leichtesten annehmen, nemlich 1, 2, 4, 8, 16 und so fort. Denn es ist leicht sie fort zu setzen, so weit man wil. Man nehme in derselben zwey Glieder nach Belieben an, und stelle sich die Verhältniß des ersten dieser Glieder zu dem zweyten als einfach vor. Es ist also wieder nicht nöthig, daß das erste Glied eben die Einheit sey, doch hat man einige Bequemlichkeit davon, wenn man auch dieses annimt. Wir wollen es thun, und uns also die Verhältniß $1 : 8$ als die einfache Verhältniß vorstellen. So bald man dieses angenommen, so ist die Verhältniß des ersten Gliedes der Reihe zu dem zweyten $1 : 2$, als der dritte Theil der ersten Verhältniß $1 : 8$ anzusehen, und die Verhältniß $1 : 4$ muß also als $\frac{2}{3}$ eben der Verhältniß $1 : 8$ betrachtet werden, welche man als einfach angenommen hat, und so weiter. Schreibt man demnach also:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512

$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3$

so zeigt jede unter einem Glied der Geometrischen Reihe stehende Zahl an, wie die Verhältniß des ersten Gliedes der Reihe, zu dem Gliede, unter welchem die Zahl stehet, aus der einfachen Verhältniß $1 : 8$ entstehe. Nemlich der unter dem Glied 2 stehende Bruch $\frac{1}{3}$ zeigt, daß die Verhältniß $1 : 2$ entstehe, indem man die einfache Verhältniß $1 : 8$

Es 3

gleich

XIII. Abschnitt. gleichsam in drey gleiche Verhältnisse theilet, oder zerfällt, aus deren Zusammensetzung die Verhältniß $1:8$ entsteht. Der unter der 4 stehende Bruch $\frac{1}{4}$ zeigt an, daß man die einfache Verhältniß $1:2$ in drey gleiche Verhältnisse zerfallen müsse, deren jede $1:2$ seyn wird, und daß man zwey dieser Verhältnisse zusammen setzen müsse, die Verhältniß $1:4$ heraus zu bringen. Eben so zeigt der Bruch $\frac{1}{8}$ unter 128 an, daß man die einfache Verhältniß $1:2$ in drey gleiche Verhältnisse zerfallen, und sieben solche Verhältnisse zusammen setzen müsse, damit die Verhältniß $1:128$ entstehe.

S. 149. Es misset oder zehlet also jede Zahl, welche unter einem Glied der Geometrischen Reihe steht, wirklich die Verhältniß der Einheit zu dem Glied der Reihe, unter welchem sie steht, und das Maas, dessen man sich dazu bedient, ist die Verhältniß, welche man als ganz und einfach angenommen hat. Die unter den Gliedern der Geometrischen Reihe stehende Zahlen sind demnach die wirklichen Logarithmen oder Verhältnißzahlen, welche die Verhältniß der Einheit zu den Gliedern, unter welchen sie stehen, ausdrücken. Die Zahl $\frac{1}{2}$ ist der Logarithmus der Verhältniß $1:2$, die Zahl $\frac{1}{4}$ ist der Logarithmus der Verhältniß $1:4$, und so weiter. Alles dieses ist wieder richtig, wenn man diese Verhältnisse umkehret, und machet daß die grössern Glieder vorher gehen, und die Kleinern darauf folgen.

S. 150. Man pflegt eben diese Zahlen auch Logarithmen der Glieder der Geometrischen Reihe selbst zu nennen, unter welchen sie stehen, und dieser Benennung zu Folge müssen wir sagen: es sey bey der angenommenen einfachen Verhältniß $1:8$ die Zahl 2 der Logarithmus zu 64. Dieses ist etwas undeutlich gesprochen. Denn was sol dieses sagen, 2 sey die Zahl der Verhältniß zu 64 oder von 64? Eine jede Verhältniß erfordert ja zwey Glieder. Es verhält sich dieses in der That nicht anders, aber es wird in diesem Fall, wenn man den Logarithmus einer Zahl nennet, das erste Glied der Verhältniß verschwiegen, weil es allezeit die Einheit ist, und nach dieser Erinnerung man es in allen Fällen anzugeben weiß. Kurz der Logarithmus einer Zahl heisset nichts anders, als der Logarithmus der Verhältniß der Einheit zu dieser Zahl. In unserm Exempel ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus zu 128, das ist, der Logarithmus der Verhältniß $1:128$. Gemeinlich nehmen gute Schriftsteller die einfache Verhältniß so, daß die Einheit die zweyte Stelle bekommt, da dann der Logarithmus einer jeden Zahl, der Logarithmus der Verhältniß derselben Zahl zu der

der Einheit ist; und, zum Beispiel, der Logarithmus der Verhältniß 8:1, auch der Logarithmus der Zahl 8 genennet wird. Doch dieses verändert in dem ganzen Vortrage so wenig, daß wir nicht nöthig achten, deswegen von den Begriffen abzugehen, welche uns zuerst befallen sind: und wir erinnern dieses nur deswegen, damit diese kleine Verschiedenheit niemanden aufhalten möge.

S. 151. Man siehet übrigens leicht, daß man die Logarithmen der Zahlen auch durch andere Brüche von andern Benennern ausdrücken könne, wenn nur diese Brüche denjenigen, durch welche sie ausgedrucket sind, gleich genommen werden. Wir wollen dieses thun, und uns dazu der Decimalbrüche bedienen: so bekommen die Logarithmen, welche wir zum Exempel angenommen haben, mit denjenigen, die bereits berechnet sind, und derer man sich gemeiniglich bedienet, eine desto größere Aehnlichkeit.

Zahl.	Logarithmus.
1	0, 000
2	0, 333
4	0, 667
8	1, 000
16	1, 333
32	1, 667
64	2, 000
128	2, 333
256	2, 667
512	3, 000
1024	3, 333
2048	3, 667
4096	4, 000

Es ist bey einer Tafel, welche bloß zum Exempel dienen sol, nicht nöthig, daß wir die Logarithmen genauer ausdrücken. Der Logarithmus von 2 ist eigentlich $\frac{1}{3} = 0,333333$, und so fort ohne Ende, und derjenige welchen wir gesetzt haben 0,333 ist demnach zu klein. Hingegen ist der Logarithmus von 4 eigentlich 0,6666 und so immer fort ohne Ende, und demnach ist derjenige, welchen wir in die Tafel gebracht haben 0,667 etwas zu groß. Es kan aber dieses keinen sonderlichen Fehler in der Anwendung bringen, wenigstens erreichen wir unsern

XIII. - unsern gegenwärtigen Zweck durch die Tafel, wie sie ist, voll-
 schnitt. kommen.

§. 152. Es ist gar leicht aus einer solchen Tafel den Logarithmus einer jeden Verhältniß zu finden, deren Glieder unter den Zahlen der Tafel vorkommen. Denn wenn erstlich das vordere Glied der Verhältniß kleiner ist als das hintere, als wenn die gegebene Verhältniß diese ist $4:512$, deren Glieder beyde in der Tafel vorkommen, so suche man nur den Logarithmus des vordern Gliedes 4 , welcher ist $0,667$, wie auch den Logarithmus des hintern Gliedes 512 , dieser ist $3,000$. Man ziehe den Logarithmus des vordern Gliedes von dem Logarithmus des hintern ab, der Unterschied $2,333$ ist der Logarithmus der Verhältniß $4:512$. Denn der Logarithmus dieser Verhältniß wird aus dem Abstand des vordern Gliedes derselben von dem hintern in der Tafel ermessen, und die Zahl, welche diese Entfernung ausdrückt, ist eben der Logarithmus der gegebenen Verhältniß. XIII, 143. Nun wird der Abstand des ersten Gliedes 4 von der Einheit, durch den Logarithmus desselben $0,667$ ausgedrückt, wie aus der Verfertigung der Tafel klar ist, und den Abstand des letztern Gliedes 512 von der Einheit zeigt ebenfalls der Logarithmus desselben $3,000$ an. Es wird aber der Abstand des zweyten Gliedes der Verhältniß $4:512$ von dem ersten gefunden, wenn man von der Entfernung des zweyten Gliedes von der Einheit, die Entfernung des ersten Gliedes von der Einheit abziehet. Der Ueberschuß von dieser Subtraction ist demnach der gesuchte Logarithmus der gegebenen Verhältniß. Und zehlet man in der Tafel nach, so siehet man deutlich, daß in derselben die Zahl 512 von der 4 um $2,333$ oder um $2\frac{1}{3}$ Glieder entfernt sey, wenn man sich nur erinnert, daß man die Verhältniß eines jeden Gliedes der Geometrischen Reihe zu demjenigen, so von demselben das dritte ist, als einfach angenommen hat, XII, 148. woraus folget, daß man die Entfernung eines Gliedes von demjenigen, so unmittelbar vorher gehet durch $\frac{1}{3}$ ausdrücken müsse. Es stehen von 4 an bis 512 in der Tafel eigentlich 7 Glieder, die Entfernung also der Zahl 512 von 4 beträgt $\frac{7}{3}$ das ist $2\frac{1}{3}$, und dieses ist der gefundene Logarithmus der Verhältniß $4:512$. Man kan zur deutlicheren Einsicht dieser Dinge, mit andern Zahlen eben dergleichen Versuche anstellen.

§. 153. Ist aber zweyten das vordere Glied der Verhältniß größer als das hintere, so findet man den Logarithmus desselben zwar ebenfalls nach der gegebenen Regel. Allein weil in diesem Fall auch der Logarithmus

Logarithmus des vordern Gliedes größer ist als der Logarithmus des hintern, so kan man jenen nicht von diesem abziehen. Man wird also zwar den kleinern Logarithmus von dem größten abziehen, dem Ueberschuß aber das Zeichen — besetzen müssen, wenn man den Logarithmus der gegebenen Verhältniß heraus bringen wil. Mit einem Wort, da der Logarithmus der Verhältniß $4:512$, wie wir gesehen haben: $2,333$ ist, so ist der Logarithmus der Verhältniß $512:4$ zwar von eben der Größe, er hat aber das gegenseitige Zeichen, und da man jenen gemeiniglich als mit $+$ bezeichnet sich vorstelllet, so ist der Logarithmus der Verhältniß $512:4$ dieser, — $2,333$.

S. 154. Es ist nicht schwer dieses in ein vollkommenes Licht zu setzen. Die Zahl 4 ist in der Tafel von 512 um so viele Glieder entfernt, als viele der Glieder sind, um welche die letztere 512 von der erstern 4 entfernt ist. Also kan der Logarithmus der Verhältniß $512:4$ von dem Logarithmus der Verhältniß $4:512$ der Größe nach nicht verschieden seyn. Allein wenn man in der Tafel von 4 bis an 512 zehlet, so zehlet man $2\frac{1}{2}$ Glieder vorwärts, und von 512 bis an 4 stehen eben so viele Glieder rückwärts. Demnach ist der Abstand des Gliedes 4 von 512 mit — zu bezeichnen, da man den Abstand des Gliedes 512 von 4 sich als mit $+$ bezeichnet, vorstelllet.

S. 155. Hieraus siehet man so gleich, daß, da wir bey Vorfertigung unserer Tafel, vor den Logarithmus der Verhältniß $1:8$ die Einheit angenommen, im Gegentheil der Logarithmus der Verhältniß $8:1$, in welcher die Glieder der vorigen in verkehrter Ordnung stehen, — 1 seyn werde, und daß, da der Logarithmus der Verhältniß $1:16$ war $1,333$ oder $1\frac{1}{3}$, im Gegentheil der Logarithmus $16:1$ seyn werde — $1,333$, oder — $1\frac{1}{3}$, und so in allen übrigen Fällen. Siehet man aber den Logarithmus der Verhältniß $8:1$ oder einer jeden andern, bey welcher das zweyte Glied der Einheit ist, als mit $+$ bezeichnet an, so bekommt der Logarithmus der Verhältniß $1:8$, das gegenseitige Zeichen —.

S. 156. Dieses kan uns weisen, wie die Logarithmen der Brüche zu bestimmen sind, welche weniger sind als 1, und uns einen Zweifel benehmen, welcher in der Anwendung vorkommen kan, wenn wir auf Logarithmen kommen, welche mit — bezeichnet sind, und welche zu solchen Verhältnissen gehören, deren vorderstes Glied nach unserm Vortrag, die Einheit ist. Da in diesem Fall das zweyte Glied kleiner seyn muß als die Einheit, so kan es scheinen, als ob solche Logarithmen

XIII. **Abkürzung.** rithmen eine Tafel erforderten, welche vor die Einheit, in die Brüche, zurück geführt ist. Und in der That verhält sich die Sache so: wir werden aber so gleich zeigen, daß eine dergleichen Tafel, als diejenige ist, welche wir zum Exempel hieher gesetzt haben, gar wohl die Stelle derselben vertreten kan.

§. 157. Man führe nemlich die Geometrische Progression $1:2$ vor die Einheit zurück, so werden die Glieder derselben $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, und so fort, und die Progression stehet zu beyden Seiten der Einheit in folgender Gestalt:

$\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,$

Wenn man nur einiger massen darauf Acht hat, wie die Glieder einer Geometrischen Reihe heraus gebracht werden, so siehet man so gleich, daß in den Nennern der Brüche, die die Glieder der Reihe vor der Einheit ausmachen, eben die Zahlen in eben der Ordnung vorkommen müssen, welche die Glieder der Reihe nach der Einheit ausmachen. Was aber die Logarithmen anlanget, welche zu diesen gebrochenen Zahlen gehören, so ist der Logarithmus der Verhältniß $1:\frac{1}{2}$ ohnfehlbar dem Logarithmus der Verhältniß $8:1$ gleich, weil diese Verhältnisse einander gleich sind: und wenn wir also den Logarithmus der Verhältniß $8:1$ bestimmen, so haben wir auch den Logarithmus der Verhältniß $1:\frac{1}{8}$, das ist, den Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{8}$. XIII, 150. Nun ist der Logarithmus der Verhältniß $8:1$ wie wir gesehen haben -1 . Eben dieser ist also auch der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{8}$, und so ist es mit den übrigen Logarithmen aller Brüche. Der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2}$, oder der Verhältniß $1:\frac{1}{2}$ ist $-\frac{1}{2}$, weil der Logarithmus der Verhältniß $2:1$ diese GröÙe $-\frac{1}{2}$ hat, und weil $2:1 = 1:\frac{1}{2}$. Der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{4}$, oder der Verhältniß $1:\frac{1}{4}$ ist $-\frac{2}{2}$, weil der Logarithmus der Verhältniß $4:1$ in unserm Tafelchen $-\frac{2}{2}$ ist, und weil $1:\frac{1}{4} = 4:1$. Eben so ist es beständig, und es würde demnach die vor die Einheit zurück geführte Tafel in folgender Gestalt erscheinen:

Zahl.	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	$\frac{16}{1}$	$\frac{32}{1}$	$\frac{64}{1}$
Logarithmus.	-2	$-\frac{4}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{2}{2}$	$+1$	$+\frac{3}{2}$	$+2$

§. 158. Man siehet aber aus diesem gar leicht, daß dieses nur eine Wiederholung eben der Tafel mit sehr wenig veränderten Umständen seyn würde, und daß man die Zahl, welche zu einem Logarithmus

mus gehört, welcher mit — bezeichnet ist, gar leicht finden kan, wenn man nur in der Tafel diejenige Zahl findet, welche zu eben dem Logarithmus gehört, wie er da stehet, und da man sich diese Zahl als einen Bruch vorstellen kan, von welchem der Nenner die Einheit ist, diesen Bruch umkehret, so daß nunmehr der Zehler die Einheit wird. Wir haben, dieses desto deutlicher zu zeigen, in dem Täfelchen des letzten Absatzes, die ganze Zahlen in Form dergleichen Brüche geschrieben. Es ist in dieser Tafel, welche im Grunde mit der vorigen einerley ist, +2 der Logarithmus zu der Zahl 2^2 , also ist — 2 der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2^2}$. Eben so ist $\frac{1}{2}$ oder 1, 667 der Logarithmus zu $2^{\frac{1}{2}}$; also ist — $\frac{1}{2}$ oder — 1, 667 der Logarithmus zu $\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$.

XIII.
Abschnitt.

Gebrauch der Logarithmen.

§. 159. Nunmehr können wir die Anwendung dieser Lehre auf die gemeinste Rechnungsarten weisen, welche vermittelst der Logarithmen zu verrichten sind, wobey wir uns bloß unserer kleinen Tafel XIII, 151. bedienen werden, weil in der That der Gebrauch einer jeden andern Tafel, von dem Gebrauch derselben, gar nicht verschieden ist. Es seyn A und B zwei Zahlen, welche in der Tafel vorkommen, deren Verhältniß A: B man sich vorstellt. $\lg A$ bedeutet den Logarithmus, welcher zu der Zahl A gehört, und in der Tafel neben derselben stehet, und $\lg B$ bedeutet den Logarithmus von B. Der Logarithmus der Verhältniß A: B hingegen werde durch $\lg A: B$ bezeichnet. Da wir nun XIII, 152. gesehen haben, daß der Logarithmus einer jeden Verhältniß gefunden werde, wenn man den Logarithmus des ersten Gliedes derselben vom Logarithmus des zweyten Gliedes abziehet, es mag nun das erste oder das zweyte Glied das grössere seyn: so siehet man leicht, daß diese Gleichung $\lg A: B = \lg B - \lg A$ allzeit richtig seyn werde. Bedeuten nun C und D zwei andere Zahlen, welche in eben der Tafel vorkommen, und deren Logarithmen folglich bekannt sind, weil sie in der Tafel neben den Zahlen stehen, so ist wiederum $\lg C: D = \lg D - \lg C$.

§. 160. Man setze, daß die zwei Verhältnisse A: B und C: D einander gleich seyn, und daß also die Proportion A: B = C: D ihre Richtigkeit habe: so sind auch die Logarithmen dieser Verhältnisse einander gleich, weil in einerley Tafel allzeit gleiche Verhältnisse gleiche Logarithmen haben, das ist, es ist $\lg A: B = \lg C: D$. Demnach ist auch $\lg B - \lg A = \lg D - \lg C$, weil diese nichts anders sind als die Logarithmen der

XIII. **Abchnitt.** gleichen Verhältnisse, $1A:B, 1C:D$. Setzt man aber zu den beiden Gliedern dieser Gleichung $1B-1A=1D-1C$ den $1C$ hinzu, so findet man $1B+1C-1A=1D$.

§. 161. Diese Regel enthält alles, was von dem Gebrauch der Logarithmen hauptsächlich zu wissen nöthig ist. Wir haben angenommen, daß die vier Zahlen A, B, C und D proportional seyn, und daß folgendes D die vierte Proportionalzahl zu den dreyen A, B und C sey, und haben nach richtigen Gründen schließen können: es sey $1D=1B+1C-1A$, das ist, es entstehe der Logarithmus der vierten Zahl D , wenn man von der Summe der Logarithmen der zweyten und dritten $1B+1C$ den Logarithmus des ersten $1A$ abziehet. Demnach kan man den Logarithmus der vierten Proportionalzahl D leicht finden, wenn man die Logarithmen der drey ersten A, B und C hat. Diese aber stehen in der Tafel neben den Zahlen, und werden gegeben so bald die Zahlen gegeben sind. Und wiederum findet man vermittelst der Tafel die Zahl, welche zu einem Logarithmus gehöret, gar leicht. Man kan demnach vermittelst der Logarithmentafel zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl, bloß vermittelst der Addition und Subtraction, finden.

§. 162. Es sey zum Beyspiel zu den dreyen Zahlen 16, 512 und 128 die vierte Proportionalzahl zu finden, so bedeutet A nunmehr 16, $1A$ stehet in der Tafel neben 16, und ist also $1A=1,333$; B bedeutet 512, und $1B$ ist in der Tafel 3,000. Ferner bedeutet C die Zahl 128 und $1C$ ist 2,333. Endlich bedeutet D die vierte Proportionalzahl welche man suchet, und $1D$ ihren Logarithmus. Da nun $1D=1B+1C-1A$, so seze man

$$1A = 1.16 = 1,333$$

$$1B = 1.512 = 3,000$$

$$1C = 1.128 = 2,333, \text{ und mache}$$

$$1B+1C = 5,333, \text{ und ferner}$$

$1B+1C-1A = 4,000$, so hat man $1D$, gleich dieser letzt gefundenen Zahl 4,000. Da nun neben denselben in der Tafel die Zahl 4096 stehet, so ist diese die vierte Proportionalzahl D , welche man suchte.

§. 163. Man siehet leicht, was vor groffe Mühe man durch diese Rechnungsart ersparet; insonderheit wenn die gegebene Zahlen etwas groß

groß sind. Es sey in einem andern Exempel $A = 1024$, $B = 32$ und $C = 4$, so ist. XIII. Abschnitt.

$$IA = I. 1024 = 3,333$$

$$IB = I. 32 = 1,667$$

$$IC = I. 4 = 0,667, \text{ folgendes}$$

$$IB + IC = 2,333$$

$$IB + IC - IA = -1,000$$

Es ist nemlich hier der IA , welcher von der Summe $IB + IC$ abzutheilen war, größer als diese Summe. Man muß demnach zwar die kleinere Summe $IB + IC$ von der größten IA abziehen, aber dem Ueberbleibsel das Zeichen — geben. Daß wir aber vor dieses Ueberbleibsel 1,000 setzen, geschieht, weil unsere Logarithmen um so vieles fehlen, wie oben XIII, 151. angemerkt worden ist. Es ist also $ID = -1,000$. Nun ist die Zahl, welche zu 1,000 gehöret, in unserer Tafel 8 oder $\frac{1}{8}$. Zu $-1,000$ gehöret also der Bruch $\frac{1}{8}$, XIII, 157. und dieser ist die vierte Proportionalzahl, welche man suchte.

S. 164. Wenn das erste Glied der Proportion A die Einheit ist, so ist die vierte Proportionalzahl D das Product aus den zwei mittlern C und B , und demnach $ID = IC + IB$, weil der Logarithmus der Einheit nichts ist. Wir wollen größerer Deutlichkeit halber die Rechnung wie vorher setzen. Es sey $B = 16$, und $C = 128$, so ist

$$IA = I. 1 = 0,000$$

$$IB = I. 16 = 1,333$$

$$IC = I. 128 = 2,333$$

$$IB + IC = 3,666$$

$IB + IC - IA = 3,666 = ID$. Demnach ist $D = 2048$, und man findet, allezeit den Logarithmus des Products, wenn man die Logarithmen der Factoren addiret, woraus so dann das Product selbst vermittelst der Tafel leicht zu haben ist.

S. 165. Ist eines von den zwei mittlern Gliedern der Proportion als B , die Einheit, so ist das vierte Glied der Proportion, D der Quotient, der vermittelst der Division des andern mittlern Gliedes C durch das erstere A gefunden wird. Weil nun hier $IB = 0$, so wird $ID = IC - IA$, das ist, der Logarithmus des Quotienten bleibt übrig, wenn man den Logarithmus des Theilers von dem Logarithmus der Zahl abziehet, welche zu theilen ist. Wir wollen auch hier dergestalt verfahren,

Et it z

als

XIII. als ob wir die vierte Proportionalzahl zu den dreyen $A=32$, $B=1$, und
 Abschnitt. $C=2048$ zu suchen vor hätten, so ist:

$$1A = 1,32 = 1,667$$

$$1B = 1,1 = 0,000$$

$$1C = 1,2048 = 3,667, \text{ folgendes ist}$$

$$1B + 1C - 1A = 2,000 = 1D, \text{ und demnach ist}$$

$$D = 64.$$

§. 166. Will man von einer Zahl, so in der Tafel vorkommt, die Quadratzahl machen, so ist nur der Logarithmus derselben zwey mal zu nehmen. Der Logarithmus, welcher dergestalt heraus gebracht wird, ist der Logarithmus der Quadratzahl, welche man suchte. Man siehet dieses so gleich aus demjenigen, so XIII, 164. von der Multiplication gewiesen worden ist. Wenn aus der Zahl B die Quadratzahl verfertigt werden sol, so muß man B in B multipliciren, und folgendes $1B$ zu $1B$ addiren, damit man den Logarithmus des Quadrats erhalte. Es ist aber $1B + 1B = 21B$. Der Logarithmus von 32 ist 1,667. Nimt man diesen gedoppelt, so ist 3,334 der Logarithmus von 1024, und dieses ist die Quadratzahl der Wurzel 32. Also ist hinwiederum bloß der Logarithmus der Quadratzahl durch 2 zu dividiren, wenn man den Logarithmus der Wurzel haben wil. Der Logarithmus 4,000 halb genommen ist 2,000, und dieses ist der Logarithmus zu 64, welche Zahl demnach die Quadratwurzel von 4096 ist, zu welcher der Logarithmus 4,000 gehöret.

§. 167. Eine Cubiczahl heraus zu bringen, multipliciret man die Quadratzahl durch die Wurzel: Also muß man den Logarithmus der Quadratzahl zu dem Logarithmus der Wurzel setzen, wenn man den Logarithmus der Cubiczahl haben wil. XIII, 164. Da nun der Logarithmus der Quadratzahl zwey mal so groß ist, als der Logarithmus der Wurzel, so wird der Logarithmus der Cubiczahl drey mal so groß. Und man darf also bloß den Logarithmus der Wurzel durch 3 multipliciren, wenn man den Logarithmus der Cubicwurzel haben wil. Der Logarithmus zu 4 ist in unserer Tafel 0,667, dieser drey mal genommen giebt 2,001 oder 2,000; und dieser Logarithmus gehöret zu 64, welche Zahl also die Cubiczahl von 4 ist.

§. 168. Will man also wieder umgekehrt aus dem Logarithmus der Cubiczahl den Logarithmus der Wurzel haben, so muß man den Logarithmus der Cubiczahl durch 3 dividiren. Der Quotient ist der verlangte

langste Logarithmus der Cubicwurzel. In unserer Tafel steht bey der Zahl 4096 der Logarithmus 4,000, dieser durch 3 getheilet giebt 1,333, bey welchem der Logarithmus 16 steht. Es ist also 16 die Cubicwurzel von 4096. XIII. Abschnitte.

S. 169. Diese Regeln sind allgemein. Der Logarithmus der vierten Dignität einer Zahl ist vier mal so groß, als der Logarithmus der Wurzel, und folgendes ist der Logarithmus der Wurzel der vierten Dignität der vierte Theil des Logarithmus dieser Dignität. Ist die Wurzel A, und hat man dieselbe zu der Dignität erhoben, deren Expo-

nent n ist, so ist $1A^n = nA$, und folgendes $\frac{1A^n}{n} = 1A$. Das ist, es kommt der Logarithmus der Dignität $1A^n$, wenn man den Logarithmus der Wurzel $1A$ durch den Exponenten der Dignität n multipliciret: und aus dem Logarithmus der Dignität $1A^n$ entsteht der Logarithmus der Wurzel $1A$, wenn man den erstern durch den Exponenten der Dignität n dividiret, deren Wurzel man schaffen sol.

S. 170. Man kan dieses unter andern gebrauchen, die Logarithmen der zusammen gesetzten Zahlen, aus den Logarithmen der einfachen Zahlen zu finden, so bald man diese erhalten. Denn alle zusammen gesetzte Zahlen entstehen, wenn man die einfachen in einander multipliciret, II, 54. so entstehen ihre Logarithmen, wenn man die Logarithmen der einfachen Zahlen addiret. Man stelle sich den Logarithmus von 2 unter $1/2$ vor, und den Logarithmus von 3 bedeute man mit $1/3$, so ist 1.2×3 , das ist $16 = 12 + 13$. Dieses erleichtert die Arbeit in Erfindung der Logarithmen ungemein. Denn es ist dieselbe nicht so leicht, als man sich dieselbe vielleicht bey dem ersten Anblick vorstellt.

Von der Berechnung der Logarithmen.

S. 171. Es war uns gar leicht, eine Logarithmische Tafel anzufangen, und bis zu gar grossen Zahlen fortzusetzen. Wirft man aber die Augen auf dieselbe zurück, so siehet man so gleich, daß in derselben gar wenige Zahlen enthalten sind. Die 3 ist nicht in derselben befindlich, auch nicht die 5, die 6 und 7. Zwischen der nächsten Zahl, so in der Tafel vorkommt 8, und der darauf folgenden 16, stehen noch mehr Zahlen, welche die Tafel nicht enthält, und dieses gehet immer weiter. Es wäre demnach eine solche Tafel von gar geringem Gebrauch: als welche bloß dienen könnte, die Logarithmen solcher Zahlen zu finden, welche

XIII. Ob die vierte Proportionalzahlen zu dreym andern, die sämtlich in der Abschnit. Tafel zu finden sind, abgeben.

§. 172. Zwar könnte man die Tafel erweitern, und in dieselbe gar viele ganze Zahlen bringen, ohne sich auf was anders zu gründen, als das, so wir bishero zu erklären bemüht gewesen. Man müste also verfahren. Das zweyte Glied der geometrischen Reihe, welche von der 1 anfängt, müste man nur um einen gar kleinen Bruch grösser annehmen als die Einheit, zum Exempel 1,0001, und die Verhältniß 1:1,0001 vor einfach, oder auch, als aus zwey oder drey oder vier gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt, ansehen. Wir wollen das letzte behalten, so ist 4 der Logarithmus der Verhältniß 1:1,0001 oder der Zahl 1,0001. So bald man dieses angenommen, müste man aus der Verhältniß 1:1,0001 durch die gewöhnlich wiederholte Multiplication eine geometrische Reihe machen, zu deren Gliedern man so dann die Logarithmen leicht schreiben könnte. Die Glieder dieser Reihe würden folgende seyn, 1; 1,0001; 1,00020001; 1,000300030001; 1,0004000600040001, und ihre Logarithmen wären 0, 4, 8, 12, 16 und so fort. Dieses würde eine ungeheure Tafel geben: aus welchen man so dann bloß die ganze Zahlen nehmen, und mit ihren Logarithmen besonders schreiben müste. Denn die Weitläufigkeit wäre gar zu groß, wenn man auch die Brüche behalten wolte. Eine dergleichen Tafel, welche eigentlich nur ein Auszug aus einer viel weitläufigern Logarithmentafel wäre, würde nicht viel anders aussehen, als die gemeinen Logarithmen Tafeln, der wir uns bedienen. Wer siehet aber nicht, daß dieses eine Arbeit geben würde, welche zu unternehmen sich schwerlich jemand entschliessen wird.

§. 173. Wir müssen also noch zeigen, wie die Logarithmen auf eine leichtere Art zu berechnen sind. Denn ob zwar diese Arbeit bereits verrichtet ist, und wir ziemlich weitläufige Tafeln der Logarithmen wirklich haben, so gebraucht man doch vors erste die Logarithmen mit größerer Einsicht und mit größerer Sicherheit, wenn man auch die Rechnung derselben versteht, und vors zweyte kan man, so oft es Noth thut, die Fehler, welche etwa in einer Tafel eingeschlichen seyn möchten, verbessern. Ob zwar übrigens diese Lehre ganz in die Arithmetik gehöret, und zu deren Abhandlung aus der Geometrie nichts erfordert wird: so wollen wir doch uns einer Figur dabey bedienen, und auf die Betrachtung derselben dasjenige, so wir zu zeigen haben, gründen: theils, weil dadurch alles leichter einzusehen ist, und theils, weil wir

wir damit zugleich einige Begriffe beybringen werden, welche zwar in XIII. denjenigen Theil der Geometrie nicht gehören, den wir abzuhandeln Absicht. uns vorgesetzt haben, aber doch in der Anwendung gar grossen Nutzen haben.

Die Logarithmische Linie.

§. 174. Man nehme auf einer geraden Linie VY, zu beyden Enden von A gleiche Theile von beliebiger Grösse, und in beliebiger Zahl an, dergleichen sind AB, BC, CD, DE, wie auch Ab, bc, cd, de und so fort. Man ziehe durch A eine Linie von beliebiger Länge Aa, und durch B eine andere, welche der Aa parallel läuft, und etwas weniger grösser ist als dieselbe. Wir wollen diese Linie nur mit dem einzigen Buchstaben B bezeichnen, weil doch daraus keine Verwirrung folgen kan, und eben dergleichen wollen wir auch bey den übrigen Linien thun, welche der Aa parallel zu ziehen seyn werden, wie auch bey der Aa selbst. Man suche so dann zu den beyden Linien A und B die dritte Proportionallinie, und setze diese an C. Ferner suche man zu A, B und C die vierte Proportionallinie, oder welches auf eben das hinaus kommt, man suche zu B und C die dritte Proportionallinie, und setze dieselbe an D, und so fahre man immer fort, so daß die Linien A, B, C, D, E &c. eine geometrische Progression ausmachen. Auf eben die Art gehe man von der A nach der andern Seite V zurück. Man suche zu B und A die dritte Proportionallinie, und setze dieselbe an b, ferner suche man zu A und b die dritte Proportionallinie, und setze sie an c, und so weiter, wodurch die Glieder der Progression erhalten werden, welcher kleiner sind als A. F. 384.

§. 175. Man stelle sich ferner vor, daß man eine jede der kleinen Linien AB, BC, CD &c. Ab, bc, cd &c. wieder in eine beliebige Zahl gleicher Theile getheilet, und an diese Theile andere gerade Linien der Aa parallel gelegt habe, welche in einer geometrischen Reihe zwischen A, B, C, fallen. Man kan sich dieses am leichtesten vorstellen, wenn man XIII. 147. annimmt, daß jede der kleinen Linien AB, BC, CD und so fort, in zwey gleiche Theile getheilet worden, und daß an das mittlere Punct der AB man der Aa parallel, die mittlere Proportionallinie zwischen der A und B gesetzt, und an das mittlere Punct der BC die mittlere Proportionallinie zwischen der B und C, und so ferner. Und daß man so dann in dieser Arbeit noch weiter dergestalt fortgefahren; indem man nemlich die Helften dieser Linien AB, BC, CD wieder in

u u u u

zwey

XIII. *Wohlschütz.* zwei gleiche Theile getheilet, und an diese letzten Theilungspuncte andere Linien der Aa parallel gesetzt, deren jede die mittlere Proportionallinie zwischen denselben zwei Parallellinien ist, zwischen welchen sie steht, und so immer fort.

§. 176. Man kan sich vorstellen, daß diese Arbeit so lang fortgesetzt worden sey, bis ein jedes der Theilchen AB, BC, &c. in mehr als hundert, oder in mehr als tausend Theilchen zertheilet worden. Hat man dieses, so stelle man sich weiter vor, daß alle Puncte, in welchen sich diese Parallellinien endigen, durch gerade Linien zusammen gezogen seyn: so siehet man leicht, daß dadurch eine Linie XZ zum Vorschein kommen werde, welche von einer wahrhaftig krummen Linie desto weniger verschieden seyn wird, je mehr der Linien sind, welche man der Aa parallel gezogen, deren äußerste Puncte eben diejenigen sind, welche diese Linie XZ bestimmen. Weil man sich dieser der Aa parallel laufenden Linien immer mehr und mehr vorstellen, und dadurch die Linie XZ einer wahrhaftig krummen Linie, die mit einer geraden nichts gemeinschaftliches hat, immer näher und näher bringen kan: so hat es kein Bedenken, daß man dieselbe vor eine eigentliche krumme Linie halten könne. Sie ist unter dem Namen der Logarithmischen Linie bekannt.

§. 177. Die Haupteigenschaft dieser Linie ist, daß, wenn man in der VY von der A an oder sonst, gleiche Theile nach Belieben nimt, als $AE=EF$, $Ae=ef$, und ziehet so dann durch die Puncte f, e, E, F gerade Linien, der Aa parallel, bis an die krumme Linie XZ: die Linien f, e, A, E, F in einer geometrischen Progression stehen werden. Denn, wenn erstlich die Puncte E, F, e, f unter denjenigen sind, welche man auf der Linie VY gleich Anfangs angenommen hat, und man nimmet die Verhältniß A : B vor einfach an: so siehet man leicht, daß die Verhältniß f : e aus so vielen Verhältnissen, die der Verhältniß A : B gleich sind, zusammen gesetzt sey; als viele dergleichen Verhältnisse, A : B zusammen gesetzt worden sind, um die Verhältnisse e : A oder A : E oder auch E : F heraus zu bringen: XIII, 174. woraus so gleich folget, daß die Verhältnisse f : e, e : A, A : E, E : F alle gleich sind: weil durch die Zusammensetzung einer gewissen Zahl gleicher Verhältnisse unmdglich ungleiche Verhältnisse heraus gebracht werden können. VIII, 16. Ist aber dieses, so stehen die Linien f, e, A, E, F, allerdings in einer geometrischen Progression. XIII, 81.

S. 178. Sind aber die Linien AG, GH, Ag, gh zwar wieder gleich, aber dergestalt angenommen worden, daß die Punkte derselben ^{Abchnitt} G, H, g, h in keines der in VY zuerst angenommenen Punkte A, B, C, D, $\frac{1}{2}$, c fallen; und man hat durch diese Punkte die geraden Linien G, H, g und h der Aa parallel gezogen: so kan man schließen, daß diese Linien h, g, A, G, H deswegen dennoch eine geometrische Progression ausmachen müssen, wenn man erweget, daß man sich die kleinen Linien AB, BC alle, und folgendes auch DE, in eine sehr grosse Zahl von gleichen Theilen getheilet, und durch alle diese Theilungspunkte Linien vorstelle, welche der Aa parallel liegen, und sich in der krummen Linie XZ endigen. Woraus folget, daß die Linie G entweder genau auf eine dieser Parallellinien fallen, oder doch von derselben gar wenig entfernt seyn müsse: welche Entfernung man noch so weit vermindern kan, als man will, indem man der Theile in DE, und der Linien zwischen D und E, immer mehrere machet, bis endlich die Entfernung der Linie G von einer dieser Parallellinien zwischen D und E, keinen merklichen Fehler bringt, und also vor nichts gehalten werden kan. Und eben dieses ist auch von den übrigen Linien H, g, h zu sagen. Also sind wir wieder in dem vorigen Fall, da nemlich gesagt wird, es sey die Linie VY in gleiche Theile getheilet, durch ein jedes dieser Theilungspunkte sey eine gerade Linie der Aa parallel gezogen, welche sich in der krummen Linie XZ endiget, unter diesen Linien seyn h, g, G, H, und es sey $hg = gA = AG = GH$. Es wird demnach auch hier der vorige Schluß statt finden, daß nemlich die Linien h, g, A, G, H in einer geometrischen Progression stehen.

S. 179. Hieraus nun siehet man, daß die Figur, welche wir betrachten, die Stelle unendlich vieler Logarithmentafeln vertrete. Denn wenn man in derselben die Linien A, B, D und so fort durch Zahlen ausdrückt, welche sich auf eine beliebige Einheit beziehen, aus welcher man diese Linien misst: stellet sich aber vor, daß die Verhältniß A : B die einfache, und folgendes AB die Einheit sey, vermittelst welcher man die Theile der Linie VY misst: so ist zu der Verhältniß A : E = E : F = f : e = e : A der Logarithmus $AE = 4$, und man bekommt dadurch eine Tafel, welche man so gleich verändert, wenn man sich die Verhältniß A : B als gedoppelt, oder als aus drey gleichen Verhältnissen zusammen gesetzt, vorstellt, deren eine die einfache sey. Wird der dritte Theil der AB vor die Einheit angenommen, so ist der Logarithmus der Verhältniß A : B die Zahl 3, folgendes bekommt die Verhältniß A : E =

U u u 2

E : F

XIII. $E:F = f:e = e:A$ den Logarithmus 12. Und man kan auf die Art, Abschnitt. mit Beibehaltung der Zahlen, welche die Linien f, e, A, E, F ausdrücken, die Logarithmische Tafel ohne Aufhören verändern. Weil aber auch die der Aa parallel laufende Linien nach und nach alle Grössen bekommen, welche eine Linie haben kan, so sind aus dieser Figur, wenn man sie zu beyden Seiten fortsetzt, und diese Parallellinien durch Zahlen ausdrückt, die Logarithmen aller Zahlen zu haben, welche man sich nur vorstellen wil.

§. 180. Man würde wenig Nichtiges erhalten, wenn man sich zur Vorfertigung dieser Tafel des Circels und der Eintheilung der Linien bedienen, und die Tafel also aus der Figur abnehmen wolte. Man müste zu dem Ende folgender gestalt verfahren. Wenn man aus den angenommenen Logarithmen, die Zahlen finden wolte, so müste man den Logarithmus einer Verhältniß $A:F$ zum Exempel von beliebiger Grösse nehmen, als 24, und in so viele gleiche Theile müste man die Linie AF eintheilen. Wolte man so dann die Zahl haben, deren Logarithmus 11 ist, so müste man von A nach F elf Theile der Linie AF tragen. Diese 11 Theilchen machen in unserer Figur die Linie AG aus. Man müste so dann durch G eine Linie der Aa parallel ziehen, und dieselbe aus der A als der Einheit messen. Die Zahl, welche die Linie G ausdrückt, würde die gesuchte Zahl seyn, die zu den Logarithmus $AG = 11$ in einer Tafel gehöret, in welcher der Logarithmus der Zahl, welche F aus der Einheit A ausdrückt, 24 ist.

§. 181. Im Gegentheil müste man aus einer gegebenen Verhältniß $m:n$ den dazu gehörigen Logarithmus also finden. Man müste wieder den Logarithmus einer andern Verhältniß $A:F$ nach Belieben nehmen, als 24: so dann müste man zu m,n , und der A die vierte Proportionalzahl finden, welche wir G nennen; diese G müste man zwischen der VY und XZ der Aa parallel legen: so wäre der Logarithmus der Verhältniß $m:n$ die Zahl welche sich zu der 24 eben so verhält wie AG zu AF , und folgendes in unserer Figur 11. Ein kleines Nachdenken kan diese Sachen vollkommen klar machen, und zugleich zeigen, daß diese Art, die Logarithmen der gegebenen Zahlen, und die Zahlen aus den gegebenen Logarithmen zu finden, zwar leicht, aber doch allzeit mit Fehlern verknüpft sey, welche bey der Eintheilung und Messung der Linien nicht zu vermeiden sind.

§. 182. Indessen siehet man hieraus deutlich, daß in einerley Logarithmentafel der Logarithmus der Verhältniß $A:D$ sich zu den
Logar

Logarithmus der Verhältniß $A:F$ verhalte, wie sich AD zu AF verhält. Und daß in zwei verschiedenen Tafeln sich die Logarithmen, die zu einerley Verhältniß $A:D$ gehören, wie die Zahlen der Theile verhalten, die man sich in der AD vorstellt. Nämlich, der Logarithmus der Verhältniß $A:D$ in der ersten Tafel, verhält sich zu den Logarithmus eben der Verhältniß $A:D$ in der andern, wie die Zahl der Theile, welche man der AD bey Verfertigung der ersten Tafel gegeben hat, zu der Zahl der Theile von eben der Größe, welche man der AD bey Verfertigung der zweyten Tafel gegeben. Und eben so verhalten sich auch die Logarithmen einer jeden andern Verhältniß als $A:F$ in den zwei Tafeln. Denn wenn n die Zahl der Theile ist, welche man der AD in der ersten Tafel gegeben hat, und man machet $AD:AF = n:m$, so ist m die Zahl der Theile der AF in der ersten Tafel, und folgendes der Logarithmus der Verhältniß $A:F$ in dieser Tafel. Ist nun N die Zahl der Theile, die man der AD in der andern Tafel gegeben, und man machet wieder $AD:AF = N:M$, so ist M der Logarithmus der Verhältniß $A:F$ in der andern Tafel. Vergleichet man diese Verhältnisse, so findet man $n:m = N:M$, und folgendes $n:N = m:M$, welches dasjenige ist, so wir erweisen solten, daß nemlich jede zweyen Logarithmen, die zu einerley Verhältnissen und zwei verschiedenen Tafeln gehören, einerley Verhältniß gegen einander haben.

XIII.
Abschnitt.

S. 183. Es können nach diesen Sätzen aus einer Logarithmentafel deren so viele verfertigt werden, als man nur haben wil. Dieses wäre eine ziemlich unnöthige Arbeit, wenn man sie wirklich unternehmen wolte: indessen kan man sich ohne der Einsicht derselben eines vollkommenen Verstandes dieser Dinge nicht rühmen. Und sie trägt auch wirklich etwas zur Berechnung der Logarithmen bey. Diese Berechnung selbst aber gründet sich unmittelbar auf nachfolgende Betrachtung. Nachdem man Aa , Dd und Ff an eine Logarithmische Linie nach Belieben gezogen, und AD in eine große Menge gleicher Theile getheilet hat, deren Zahl m ausdrückt, von welchen Theilchen das erste AI ist, so theile man auch AF in eben so viele Theilchen, und das erste dieser Theilchen sey AK . Weil nun $AD = m \times AI$, und $AF = m \times AK$; so ist $AD:AF = m \times AI:m \times AK$. Da nun aber AD zu AF sich verhält, wie der Logarithmus der Verhältniß $Aa:Dd$ zu den Logarithmus der Verhältniß $Aa:Ff$, XIII, 82. so verhält sich auch AI zu AK wie der Logarithmus der Verhältniß $Aa:Dd$ zu den Logarithmus

F. 385.

XIII. rithmus der Verhältniß $Aa : Ff$. Man ziehe durch a die gerade Linie aL mit der AF parallel, welche die Linien Kk und Li in L und M ſchneidet, ſo iſt kaL kaum von einem geradlinichten Dreieck zu unterſcheiden, und zwar beſto weniger, je kleiner AK angenommen worden iſt. Denn indem Ak abnimmt, wird auch der Bogen ak immer kleiner und kleiner, wodurch er auch ſeine Krümmung nach und nach verliert, und einer geraden Linie immer näher kommt. Iſt aber kaL ein geradlinichtetes Dreieck, ſo iſt $Mi : Lk = aM : aL = AI : AK$; weil in demſelben Mi der Seite kL parallel liegt, VII, 12. und aM der AI , wie auch aL der Ak gleich iſt. Da ſich alſo AI zur Ak verhält, wie der Logarithmus der Verhältniß $Aa : Dd$ zu dem Logarithmus der Verhältniß $Aa : Ff$, ſo wird, wenn man in die Stelle $AI : Ak$ die Verhältniß $Mi : Lk$ ſetzt, auch nachfolgende Proportion $Mi : Lk = 1. Aa : Dd : 1. Aa : Ff$, richtig ſeyn: in welcher $1. Aa : Dd$ den Logarithmus der Verhältniß $Aa : Dd$ und $1. Aa : Ff$ den Logarithmus der Verhältniß $Aa : Ff$, bedeutet.

§. 184. Wenn man demnach die Linie Mi findet, oder durch eine Zahl ausdrückt, und eben dergleichen in Anſehung der Lk verrichtet, indem man die Einheit beibehält die man angenommen hat, die Linie Mi ausdrücken, ſo hat man ſo gleich zwei Zahlen, welche ſich gegen einander, wie die Logarithmen der Verhältniſſe $Aa : Dd$ und $Aa : Ff$ verhalten. Nimt man ſo dann den Logarithmus der Verhältniß $Aa : Dd$ nach Belieben an, wie man denn zu Verfertigung einer jeden Logarithmentafel den Logarithmus einer Verhältniß nach Belieben beſtimmen muß: XIII, 184.) ſo kann man ſo gleich den Logarithmus der Verhältniß $Aa : Ff$ finden, wenn man ſchlieſſet $Mi : Lk = 1. Aa : Dd : 1. Aa : Ff$.

§. 185. Wir könnten ohne Anſtand weiter gehen, wenn wir bloß vorhätten zu zeigen, wie die Logarithmen gefunden werden. Da aber auch mit nicht viel gröſſerer Mühe zu zeigen iſt, wie ſie viel leichter zu finden ſind, als nach einer Regel, welche bloß aus dem flieſſet, ſo biſher gezeigt worden; ſo haben wir nicht umgehen wollen, die Kleinigkeiten, die noch dazu erfordert werden, mit anzuhängen: welche faſt bloß in einer Wiederholung der letztern Betrachtungen, mit etwas wenig veränderten Umſtänden beſtehen.

§. 186. Man muß zu dem Ende die Logarithmiſche Linie auf der andern

andern Seite der Aa nach X fortgezogen haben. Ist dieses geschehen, XIII.
 so nehme man AE dergestalt, daß, wenn man durch E die Ee der Aa Abschnitt.
 parallel ziehet, diese Ee von der Aa so viel unterschieden sey, als Aa
 von der Ff unterschieden ist, das ist, daß $Aa - Ee = Ff - Aa$.
 Man theile so dann EA wieder in eine Zahl gleicher Theile, welche
 der vorigen m gleich ist, in welche man AD und AF getheilet hat;
 und das erste dieser Theilchen sey RA, so ist wieder $EA : AF = m \times$
 $RA : m \times AK = RA : AK$, und weil auch $EA : AF = 1. Ee : Aa : 1.$
 $Aa : Ff$: so ist $RA : AK = 1. Ee : Aa : 1. Aa : Ff$. Man verlängere
 die Rr und La, bis sie einander in s erreichen: so fließet aus der
 Ähnlichkeit der Dreiecke Sar, kaL die Proportion $sr : Lk = as :$
 $aL = RA : AK$. Und wenn man diese Proportion mit der vorigen
 vergleicht, so findet man $sr : Lk = 1. Ee : Aa : 1. Aa : Ff$. Dieses ist
 die Proportion, welche wir noch suchten.

§. 187. Man nenne Aa nunmehr a und den Unterschied der Li-
 nien Aa und Ee, welches zugleich der Unterschied der Linien Aa
 und Ff ist, weil XIII, 186. angenommen worden, daß $Aa - Ee =$
 $Ff - Aa$, nenne man d , so ist $Ee = a - d$ und $Ff = a + d$. Und
 demnach ist $1. a - d : a : 1. a : a + d = sr : Lk$. Und man hat nunmehr
 bloß die kleinen Linien sr, Lk durch Zahlen auszudrücken, wenn man
 die Verhältniß dieser Logarithmen wirklich darstellen wil: woraus so
 dann die Logarithmen leicht gefunden werden. Wir wollen bey dem
 letztern Lk anfangen.

Wirkliche Berechnung der Logarithmen.

§. 188. Es wird diese Lk folgender gestalt gefunden. Es ist
 $Kk = Aa + Lk$. Und indem man AF in eine Zahl von gleichen Thei-
 len getheilet, die man sich unter m vorstellt, so siehet man, daß, wenn
 man auf alle Theilungspuncte der AF gerade Linien bis an die XZ
 zöge, gleichwie man sich Kk an das erste dieser Theilungspuncte gezo-
 gen vorstellt, die Linien Aa, Kk und so fort bis an Ff, eine geome-
 trische Reihe ausmachen würden, deren letztes Glied Ff von dem ers-
 ten um so viel Glieder entfernt ist, als viele Einheiten in m enthalten
 sind, in welcher Reihe Kk das zweyte Glied abgibt. Da wir nun
 Aa mit a und Ff mit $a + d$ bezeichnet haben, so ist $Kk = a + d \frac{1}{m}$;
 dem

XIII. dem zu folge ſo bey der Betrachtung der geometriſchen Reißen XIII, 132. Abſchnitt.

gezeigt worden iſt, und alſo $Lk = a + d^{\frac{1}{m}} = a$.

§. 189. Auf eben die Art findet man auch sr. Wenn man auf alle Theilungspuncte der EA ſich gerade Linien vorſtellt die der Aa parallel laufen, und bis an XZ reichen, ſo hat man eine abſteigende geometriſche Progreſſion, deren Glieder an der Zahl m ſind, deren erſtes Glied Aa oder a, und das letzte Ee = $a - d$ iſt, und bey welcher Rr die Stelle des zweyten Gliedes vertritt. Es wird demnach dieſes zweyte Glied Rr hier $a - d^{\frac{1}{m}}$ und folgendes sr = sR - rR = $a - d^{\frac{1}{m}}$.

§. 190. Wir haben aber oben gewieſen, wie ein Glied einer geometriſchen Reiße, welches durch $a + d^{\frac{1}{m}}$ oder $a - d^{\frac{1}{m}}$ ausgedrückt wird, durch eine Reiße von Zahlen ſo nahe angegeben werden kan, als man wil. Weil nemlich hier m gar ſehr groß iſt, ſo bedienet man ſich der Regel des 138 und 139 Abſatzes, in welcher

$$\frac{a+b}{z} = a \frac{r}{z} \times (1 + \frac{r}{z} \times \frac{b}{a} - \frac{r}{2z} \times \frac{b^2}{a^2} + \frac{r}{3z} \times \frac{b^3}{a^3} \&c. \text{ und } \frac{a-b}{z} =$$

$$a \frac{r}{z} \times (1 - \frac{r}{z} \times \frac{b}{a} + \frac{r}{2z} \times \frac{b^2}{a^2} - \frac{r}{3z} \times \frac{b^3}{a^3} \&c. \text{ In welchen man nur an}$$

ſtatt b die Buchſtaben d, an ſtatt z aber m, und an ſtatt r die 1 zu ſetzen hat, um $a + d^{\frac{1}{m}}$ oder $a - d^{\frac{1}{m}}$ durch eine Reiße von Ziffern darzuſtellen. Es wird alſo:

$$\frac{a+d}{m} = a \frac{1}{m} \times (1 + \frac{1}{m} \times \frac{d}{a} - \frac{1}{2m} \times \frac{d^2}{a^2} + \frac{1}{3m} \times \frac{d^3}{a^3} - \frac{1}{4m} \times \frac{d^4}{a^4} + \&c.)$$

$$\text{und } \frac{a-d}{m} = a \frac{1}{m} \times (1 - \frac{1}{m} \times \frac{d}{a} + \frac{1}{2m} \times \frac{d^2}{a^2} - \frac{1}{3m} \times \frac{d^3}{a^3} + \frac{1}{4m} \times \frac{d^4}{a^4} - \&c.)$$

§. 191. Es iſt demnach

$$sr = a - \frac{a-d}{m} = a \frac{1}{m} \times (-1 + \frac{d}{ma} + \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3} + \&c.) + a,$$

und

und $Lk = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - a = \frac{1}{a} \times (1 + \frac{d}{ma} - \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3} - \text{&c.}) - a$, XIII. Abschnitt.

folgendes die Verhältniß $sr : Lk$ gleich der Verhältniß der Summe der Glieder der Reihe $a + \frac{1}{a} \times (-1 + \frac{d}{ma} + \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3} - \text{&c.})$ zu der

Summe der Glieder dieser zweyten Reihe $-a + \frac{1}{a} \times (1 + \frac{d}{ma} - \frac{d^2}{2ma^2} + \frac{d^3}{3ma^3} - \text{&c.})$ Und eben so verhält sich der Logarithmus der Verhältniß

$a - d : a$ zu dem Logarithmus der Verhältniß $a : a + d$. Man wird sich nach einem kleinen Nachsinnen in die Veränderung der Zeichen leicht finden können. Es gründet sich alles auf dasjenige, so wir gewiesen, und es kommet in diesen Dingen hier gar nichts neues vor.

S. 192. Multipliciret man alle Glieder der Reihen, welche die Verhältniß $sr : Lk$ ausdrücken durch m und dividiret sie durch $\frac{1}{a^m}$, so wird dadurch die Verhältniß nicht geändert. Die dergestalt veränderte Reihen aber, welche diese Verhältniß $sr : Lk$ ausdrücken, sind:

$$+ \frac{ma}{\frac{1}{a^m}} - m + \frac{d}{a} + \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} - \text{&c. und}$$

$$- \frac{ma}{\frac{1}{a^m}} + m + \frac{d}{a} - \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} - \text{&c.}$$

Und weil $sr : Lk = l. a - d : a : ba : a + d$, so verhält sich auch die Summe der Glieder der ersten Reihe, zu der Summe der Glieder der zweyten, wie $l. a - d : a$ zu $l. a : a + d$.

S. 193. Weil man nun bey Verfertigung einer Logarithmen Tafel einen Logarithmus nach Belieben annehmen muß, so setze man die erste Reihe sey selbst der Logarithmus der ersten Verhältniß $a - d : a$, so wird auch die zweyte Reihe der Logarithmus der zweyten Verhältniß, und man hat demnach;

Erst

$l. a - d :$

XIII.
Abschnitt.

$$L. a - d : a = \frac{ma}{\frac{1}{a^m}} - m + \frac{d}{a} + \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} + \frac{d^4}{4a^4} \&c.$$

$$L. a : a + d = - \frac{ma}{\frac{1}{a^m}} + m + \frac{d}{a} - \frac{d^2}{2a^2} + \frac{d^3}{3a^3} - \frac{d^4}{4a^4} \&c.$$

woraus man diese Logarithmen selbst finden kan. Es wird aber insonderheit alles viel leichter, wenn man a der Einheit gleich setzt. Dadurch wird der Logarithmus der Verhältniß $a - d : a = d + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{3} + \frac{d^4}{4} \&c.$ und der Logarithmus der Verhältniß $1 : 1 + d$

oder der Zahl $1 + d$ wird: $d - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{3} - \frac{d^3}{4} + \frac{d^4}{5}$ und so immer fort bis man auf Kleinigkeiten kommt, welche hier vor nichts gehalten werden können. Die Logarithmen, welche heraus gebracht werden, indem man selbst die Summe der Glieder $\frac{ma}{\frac{1}{a^m}} - m + \frac{d}{a} \&c.$ vor dem

Logarithmus der Verhältniß $a - d : a$ annimmt, heißen die natürlichen Logarithmen.

§. 194. Allein ob zwar diese Anweisung ungemein leichter ist als diejenige, der sich die ersten Berechner der Logarithmen bedienet haben, welche eine ungemein oft wiederholte Ausziehung der Quadratwurzel erfordert; so ist sie doch noch zu schwer, so lang eine leichtere vorhanden ist. Diese aber erhält man, wenn man die zwei Reihen, die wir eben heraus gebracht haben, vereinigt. Nämlich wenn man den Logarithmus einer Verhältniß $a - d : a$ zu den Logarithmus einer andern Verhältniß $a : a + d$ hinzusetzt, so erhält man dadurch den Logarithmus der Verhältniß, welche aus diesen beyden zusammen gesetzt ist, XIII, 184. welche in dem gegebenen Fall, da das erste Glied der ersten Verhältniß mit dem zweyten Glied der andern einerley ist, keine andere seyn kan als $a - d : a + d$ VIII, 2. Es wird demnach der Logarithmus der Verhältniß $a - d : a + d$ durch die Addition der Reihen des 192 Absatzes gefunden. Diese Addition aber bringt die Summe $\frac{2d}{a} + \frac{2d^3}{3a^3} + \frac{2d^5}{5a^5} + \frac{2d^7}{7a^7} \&c.$ weil die übrigen Glieder einander aufheben.

§. 195. Es

S. 195. Es lassen sich aber jede zwei Zahlen durch $a-d$, $a+d$ ausdrücken. Denn a ist eigentlich die halbe Summe der Zahlen $a-d$ und $a+d$, weil diese Zahlen, wenn man sie addiret $2a$ geben, und d ist der halbe Unterschied derselben. Denn wenn man $a-d$ von $a+d$ abziehet, so bleibt $2d$. Will man demnach zum Exempel den Logarithmus des Verhältniß $5:9$ nach dieser Regel finden, so ist $a = \frac{5+9}{2} = 7$, und $d = \frac{9-5}{2} = 2$. Man darf also nunmehr nur in der letzten Regel

XIII. Abschnitt.

an statt des a überall 7, und an statt des d die 2 setzen, so wird der Logarithmus von $5:9$ so genau als man will heraus gebracht.

S. 196. Man kan aber auch unter d sich den ganzen Unterschied zweier Zahlen vorstellen, und unter a ihre ganze Summe. Denn der Bruch $\frac{d}{a}$ bedeutet nichts anders, wenn d und a zweymal mehr bedeuten, als sie vorher bedeutet, weil $\frac{2d}{2a} = \frac{d}{a}$, und also wird auch die

Bedeutung der übrigen Brüche $\frac{d^3}{a^3}$, $\frac{d^5}{a^5}$, und so weiter nicht geändert, wenn man d den ganzen Unterschied und a die ganze Summe bedeuten läßt. Man kan auch die 2 aus den Zählern der Brüche der Reihe gar weglassen, und setzen, der Logarithmus der Verhältniß $\frac{a-d}{a+d}$ sey $= \frac{d}{a} + \frac{d^3}{3a^3} + \frac{d^5}{5a^5} + \frac{d^7}{7a^7}$ &c. Denn ob zwar

dadurch ein jeder Logarithmus nur halb so groß heraus gebracht wird, als nach der vorigen Regel; so bleibt doch die Verhältniß der Logarithmen, in beyden Berechnungen einerley: worauf doch alles ankommt. Wir bleiben indessen bey der erstern Reihe, XIV. 194. Uebrigens thut man bey der wirklichen Berechnung der Logarithmen am besten, wenn man die Zahlen so annimt, daß d eins werde. Dadurch wird die Arbeit ungemein erleichtert, wie ein Exempel zeigen wird.

S. 197. Es sey der Logarithmus der Verhältniß $1:2$ oder der Zahl 2 zu finden, so ist $d=1$ und $a=2$, und die Reihe

$\frac{2d}{a} + \frac{2d^3}{3a^3} + \frac{2d^5}{5a^5} + \frac{2d^7}{7a^7} + \frac{2d^9}{9a^9}$ &c. verwandelt sich in diese nachfolgende:

Es sey $a = 2$

XIII.
Abschnitt. $\frac{2}{3} + \frac{2}{3 \cdot 3} + \frac{2}{5 \cdot 3^2} + \frac{2}{7 \cdot 3^3} \quad \&c.$

Diese Glieder können folgender Gestalt nach und nach aus dem ersten heraus gebracht werden. Man theile das erste Glied $\frac{2}{3}$ durch $3 \times 3 = 9$,

so ist der Quotient $\frac{2}{3^2}$, diesen theile man wieder durch 3×3 oder 9, so

kommt $\frac{2}{3^3}$, und durch eine wiederholte Division durch eben die 9 ent-

steht $\frac{2}{3^4}$. Man bekommt also nach und nach folgende Reihe,

$\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2}{3^3}, \frac{2}{3^4} \&c.$ Und man sieht, daß man aus derselben Reihe vor

den Logarithmus von 1:2 wirklich heraus bringe, wenn man das erste Glied dieser Reihe noch durch 1, das zweite durch 3, das dritte durch 5, und so ferner dividiret. Es ist aber in lehenstheiligen Brüchen:

$$\frac{1}{3} = 0,333\,333\,333 \text{ folgendes } \frac{1}{3 \times 1} = 0,333\,333\,333$$

$$\frac{1}{3^2} = 0,037\,037\,037 \quad - \quad \frac{1}{3^2 \times 3} = 0,012\,345\,679$$

$$\frac{1}{3^3} = 0,004\,115\,226 \quad - \quad \frac{1}{3^3 \times 5} = 0,000\,823\,045$$

$$\frac{1}{3^4} = 0,000\,457\,247 \quad - \quad \frac{1}{3^4 \times 7} = 0,000\,065\,321$$

$$\frac{1}{3^5} = 0,000\,050\,805 \quad - \quad \frac{1}{3^5 \times 9} = 0,000\,005\,645$$

$$\frac{1}{3^6} = 0,000\,005\,645 \quad - \quad \frac{1}{3^6 \times 11} = 0,000\,000\,513$$

$$\frac{1}{3^7} = 0,000\,000\,627 \quad - \quad \frac{1}{3^7 \times 13} = 0,000\,000\,048$$

$$\frac{1}{3^8} = 0,000\,000\,069 \quad - \quad \frac{1}{3^8 \times 15} = 0,000\,000\,004$$

Die Summe hiervon gedoppelt giebt $0,346\,573\,588$

Der Logarithmus von 2 = $0,693\,147\,176$

§. 198. Hieraus kan man so gleich den natürlichen Logarithmus XII. zu 4 haben, wenn man den gefundenen Logarithmus verdoppelt, und ~~abnimmt~~ es ist demnach der Logarithmus von 4 dieser 1, 386294352. Auf eben die Art aber wie wir den Logarithmus der Verhältniß 1:2 gefunden, findet man auch den Logarithmus der Verhältniß 4:5. Es ist in diesem Fall $a = 9$ und $d = 1$, folgendes verwandelt sich nunmehr die Reihe in diese nachfolgende: $\frac{2}{9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7}$ &c. und also

$$\begin{array}{lcl} \frac{2}{9} = 0,222\ 222\ 222 \text{ folgendes } & \frac{2}{1 \cdot 9} = 0,222\ 222\ 222 \\ \frac{2}{9^3} = 0,002\ 743\ 484 - - - & \frac{2}{3 \cdot 9^3} = 0,000\ 914\ 494 \\ \frac{2}{9^5} = 0,000\ 023\ 870 + - - & \frac{2}{5 \cdot 9^5} = 0,000\ 006\ 774 \\ \frac{2}{9^7} = 0,000\ 000\ 418 - - - & \frac{2}{7 \cdot 9^7} = 0,000\ 000\ 059 \end{array}$$

Die Summe hiervon, nemlich 0,223 143 549 ist der gesuchte Logarithmus der Verhältniß 4:5. Also ist:

$$\begin{array}{lcl} L. 1:4 = 1,386294352 & & \\ L. 4:5 = 0,223143549 & \} & \text{addirt} \\ \hline L. 1:5 = 1,609437901 & & \end{array}$$

§. 199. Und da die Zahl 10 das Product aus 5 und 2 ist, so findet man ihren Logarithmus XIII, 164. wenn man die bereits gefundene Logarithmen von 2 und 5 addiret. Es war

$$\begin{array}{lcl} L. 2 = 0,693147176 & & \\ L. 5 = 1,609437901 & \} & \text{addirt} \\ \hline L. 10 = 2,302585077 & & \end{array}$$

Wir achten dieses zu unserm Zweck hinlänglich, welcher bloß war zu zeigen, wie die Logarithmen gefunden werden. Denn wenn man sie genau finden wil, so muß man dieselbe in viel mehrern Ziffern angeben, welches geschieht, wenn man nur die Division weiter fortsetzet, wie aus den Exempeln zu sehen, die der selige Professor Haulsen in seinen vortreflichen Elementen angebracht. Es sind diese Logarithmen alle natürlich, und von denjenigen verschieden, die wir gemeiniglich haben. Um diese zu erhalten, müssen die gefundenen Logarithmen annoch in

XIII. solche verwandelt werden, die sich in die gemeine Briggsische Tafel
Wohnen. schicken.

200. Es ist XIII, 182. gezeigt worden, wie dieses zu thun ist. Man muß, den Logarithmus einer Verhältniß der Briggsischen Tafel wissen, und dazu schickt sich am besten der Logarithmus der Zahl 10 oder der Verhältniß 1: 10, welcher in dieser Tafel die Einheit, oder 1, 000 0000 ist. Will man nun zum Exempel den Logarithmus von π in dieser Tafel finden, so sage man wie der natürliche Logarithmus von 10 zu dem natürlichen Logarithmus von 2, so der Briggsische Logarithmus von 10 zu den Briggsischen Logarithmus von π . Eben so findet man auch den Briggsischen Logarithmus zu einer jeden andern Zahl, wenn man nemlich die Briggsischen Logarithmen mit L und die natürlichen nach wie vor mit ι bezeichnet, und man wil den Briggsischen Logarithmus der Zahl π haben, so ist $\iota. 10 : \iota. \pi = L. 10 : L. \pi$, folgendes der gesuchte $L. \pi = \frac{L. 10}{\iota. 10} \times \iota. \pi$. Und man sieht also, daß

man den natürlichen Logarithmus $L. \pi$, bloß mit dem Bruch $\frac{L. 10}{\iota. 10}$ multipliciren müsse, um den Briggsischen Logarithmus eben der Zahl zu erhalten. Dieses geschieht am leichtesten, wenn man den Bruch $\frac{L. 10}{\iota. 10}$ oder $\frac{1,000\,000}{2,302\,585}$ durch einen Decimalbruch ausdrückt, und hernach durch diesen Bruch multipliciret. Es ist aber in Decimalbrüchen $\frac{L. 10}{\iota. 10} = 0,43429\,448. \dots$ Durch diese Zahl also muß man den

natürlichen Logarithmus einer Zahl multipliciren, wenn man den Logarithmus der gewöhnlichen Briggsischen Tafel heraus bringen wil.

§. 201. Da übrigens in der Briggsischen Tafel der Logarithmus von 10 die 1, 0000000 ist, so ist nothwendiger Weise der Logarithmus von 100, 2, 0000000, und der Logarithmus von 1000 ist 3, 0000000, der Logarithmus aber von 10 000, 4, 0000000, und so fort XIII, 164. Die Logarithmen aller Zahlen aber von 1 bis an 10, fangen von der 0 an, wie zum Beyspiel der Logarithmus von 6, welcher dieser ist: 0, 7781513. Die Logarithmen aller Zahlen von 10 bis 100 fangen mit der 1 an, wie der Logarithmus von 48, welcher ist, 1, 6812412; die Logarithmen aller Zahlen von 100 bis an 1000 fangen mit der 2 an; die von 1000 bis an 10000 mit der 3, und so fort.

Dies

Diese Zahl wird die Characteristick des Logarithmus genennet, und des wegen gemeinlich von den übrigen Ziffern des Logarithmus abgesondert. XIII. Abschnit.

S. 202. Es sind bey dieser Einrichtung die Logarithmen aller Zahlen, welche mit einerley Ziffern geschrieben werden, einerley, was auch diese Ziffer vor Ordnungen von Einheiten bedeuten mögen: Bloß die Characteristicken sind verschieden. Als zum Beispiele der Logarithmus der Zahl 2849 ist 3, 4546924. Der Logarithmus aber der Zahl 28490 ist 4, 4546924, und der Logarithmus der Zahl 284900 ist 5, 4546924, und so immer fort. Im Gegentheil ist der Logarithmus der Zahl 284,9, dieser 2, 4546924, der Logarithmus der Zahl 28,49 aber ist, 1, 4546924 und so weiter. Man siehet dieses vollkommen ein, wenn man erweget, daß der Logarithmus einer Zahl 10^n , welche zehenmal größer ist, als eine andere n aus dem Logarithmus n entstehe, wenn man zu diesem Logarithmus n den Logarithmus von 10, welcher 1, 0000000 ist, hinzu setzet XIV, 164. Und daß hinwiederum aus dem Logarithmus der Zahl 10^n der Logarithmus der Zahl n , welcher zehenmahl kleiner ist, heraus gebracht werde, wenn man von $1. 10^n$ den $1. 10$ abziehet XIV. 165.

S. 203. Ob zwar also die Logarithmen in den Tafeln, welche bey uns am meisten zu haben sind, nicht über 10000 gehen, so kan man doch aus diesen Tafeln die Logarithmen aller Zahlen, dergleichen wir eben beschrieben haben, nehmen; und ein Exempel kan am deutlichsten zeigen, wie dieses bequem zu verrichten ist. Es sey der Logarithmus der Zahl 0,02849 zu finden. So schläget man in der Tafel den Logarithmus zu 2849 auf, welcher ist, 3, 4546924. Weil nun die Zahl 0,02849, deren Logarithmus gesucht wird, aus dieser Zahl 2849 entstehet, wenn man sie durch 100000 dividiret, oder, wenn man das Zeichen der einfachen Einheiten um 5 Stellen zurück nach der Linken setzet; so muß von der Characteristick des gefundenen Logarithmus 3, die Zahl 5 als die Characteristick von 100000, abgezogen werden XIII, 202. Dadurch erhält man — 2, 4546924, und dieses ist der Logarithmus der Zahl 0,02849. Auf eben die Art verfähret man in allen dergleichen Fällen. Nämlich nachdem man den Logarithmus einer Zahl gefunden hat, welche in der Tafel stehet, und eben die Ziffer hat, als diejenige, deren Logarithmus man suchet; so setzet man der Characteristick des gefundenen Logarithmus so viele Einheiten zu, oder ziehet von derselben so viele Einheiten ab, als viele der Stellen sind, um welche man das Zeichen der einfachen Einheiten nach der Rechten fortsetzet, oder nach der Linken zurück rücken muß, damit aus der angenommenen die gegebene Zahl werde.

XIII. S. 204. Hieraus aber läßt sich ferner zeigen, wie aus der Logarithmentafel die Logarithmen der Zahlen bis 10000 die Logarithmen der übrigen Zahlen bis zu 10 000 000, und aller andern Zahlen, die aus sieben Ziffern bestehen, zu finden seyn. Denn weiter kan man bey den gewöhnlichen Logarithmen nicht gehen; weil in so wenigen Ziffern als dieselben haben, der Unterschied der Logarithmen sehr grosser Zahlen, die nicht weit von einander entfernt sind; kaum mehr zu merken ist: und, wenn zum Exempel die Logarithmen der Zahlen 5327954384 und 5327954300 angegeben werden sollten, ihr Unterschied weit kleiner seyn würde, als zween Logarithmen, die aus nicht mehr als acht Ziffern bestehen, von einander unterschieden seyn können. Zumalen, da man sich nicht einmal auf die letzten Ziffer der Logarithmen, verlassen kan, weil sie meistens etwas zu groß oder zu klein sind.

F. 385.

S. 205. Gesezt, es sey Ee die Einheit, und Aa werde aus derselben durch eine Zahl ausgedrückt, die noch in der Logarithmentafel steht, als durch 7532. Kk aber werde durch die Zahl 7533 ausgedrückt, die zu nächst auf die vorige folget. Es sey aber der Logarithmus der Zahl 7532, 643 zu finden, die zwischen beyden vorigen steht, indem der Kleinern noch der Bruch 0, 643 zugefeghet worden ist. So stelle man sich vor daß Li durch diese mittlere Zahl ausgedrückt werde: Es ist EA der Logarithmus zu Aa so wol als EK der Logarithmus zu Kk aus der Tafel bekant, und EI der Logarithmus zu Li wird gesucht. Diesen nun zu erhalten, verfähret man also. Man ziehet die Zahl AA von der Zahl Kk ab, so bleibet Lk übrig: und diese ist die Einheit, weil die Zahlen Aa, Kk unmittelbar auf einander folgen. Ferner ziehe man auch Aa von der Li ab: so bleibet der Bruch übrig, um welchen die mittlere Zahl die Kleinere übertrifft, und dieser Bruch drückt die im aus. Endlich ziehe man auch den Logarithmus der Kleinern ganzen Zahl EA von dem Logarithmus der größern ganzen Zahl EK ab, so bleibet AK = aL, der Unterschied der Logarithmen. In dem angenommenen Exempel ist,

$$\begin{aligned} EK &= 1.7533 = 3,8769680 \\ EA &= 1.7532 = 3,8769103 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} EK &= 1.7533 \\ EA &= 1.7532 \end{aligned}} \right\} \text{Subt.}$$

$$AK = aL = \dots\dots\dots 577$$

S. 206. Nun sehe man KaL als ein geradelinihtes Dreypck an, weil in der That der Bogen ak so wenig gekrümmt ist, daß diese Krümmung kaum gemerket werden kan, so ist kL; im = aL; aM oder AL.

Al. Das ist, wie die Einheit zu dem Bruch, 0,643 um welchen die XIII. gegebene Zahl 7532,643 die kleinere 7532 übertrifft, so der gefundene Unterschied der Logarithmen 577, zu Al dem Ueberschuß des gesuchten Logarithmus über den Kleinern. Wenn man derothalben 577 durch 0,643 multiplicirt, so ist das Product 371,011 der gesuchte Unterschied, welcher dem Kleinern Logarithmus 3,8769103 zugesetzt werden muß, damit der Logarithmus 3,8769474 heraus komme, der zu der Zahl 7532,643 gehöret...

S. 207. Aus diesem Logarithmus der Zahl 7532,643 ist nummehr der Logarithmus der Zahl 7532643 leicht zu machen. Man vermehre nur XIII. 403. die Characteristic des gefundenen Logarithmus um drey Einheiten, so erlanget man denselben. Er ist nemlich 6,8769474. Und auf die Art verfähret man allzeit, wenn der Logarithmus einer Zahl zu finden ist, die nicht mehrere Ziffer hat, als oben XIII. 204. angezeigt worden. Ist der Logarithmus der Zahl 1793248 zu finden, so suche man erstlich den Logarithmus der Zahl 7932,48, wie gewiesen worden, und mache so dann aus demselben den Logarithmus zu 793248. Und eben so verfähre man auch wenn der Logarithmus zu 0,0793248, oder einer jeden andern dergleichen Zahl zu finden ist.

S. 208. Auf eben die Art findet man auch die Zahl, so zu einem Logarithmus gehöret, der nicht in der Tafel angetroffen wird. Wie wollen dieses wieder mit einem Beispiel weisen. Der Logarithmus sey 3,8769474, dieser stehet nicht in der Tafel; denn der unmittelbar Kleinere ist 3,8769103, und der unmittelbar grössere, 3,8769680. Der Unterschied aber dieser Logarithmen ist 577. Da also zu den ersten dieser Logarithmen die Zahl 7532 gehöret, und zu dem zweyten die Zahl 7533, so ist die Zahl, so zu dem gesuchten Logarithmus gehöret, grösser als 7532, und kleiner als 7533. Will man nun den Ueberschuß dieser Zahl über die kleinere 7532 genau haben: so suche man auch den Ueberschuß des gegebenen Logarithmus 3,8769474 über den Kleinern, welcher 371 ist. Stellet man sich nun vor, daß al, wieder den Unterschied der zwey Logarithmen EA und EK bedeute, zwischen welchen der gegebene EI stehet, und folgendes Al = aM den Ueberschuß dieses gegebenen Logarithmus über den Kleinern; A2, aber Ii und Kk die Zahlen, die zu diesen Logarithmen gehören: so siehet man, daß man sagen müsse, wie al zu aM so Lk zu Mi. Das ist, in unserm Exempel, wie 577 zu 371, so die Einheit zu dem Ueberschuß der gesuchten Zahl li über

XIII. über die kleinere A a. Es ist also, dieser Ueberschuß, 0,643, und demnach die gesuchte Zahl 7532,643.

§. 209. Auf eben die Art findet man auch die Zahl zu einem Logarithmus, welcher größer ist, als der größte Logarithmus der Tafel: zum Exempel zu 6,8769474. Man vermindert erstlich die Characteristic so sehr als es erfordert wird, daß sie in die Tafel falle: und merket die abgezogene Einheiten an, deren hier 3 sind: Der Logarithmus wird dadurch 3,8769474. So dann suchet man die Zahl, so zu diesem Logarithmus gehört 7532,643, woraus dann leicht die Zahl zu finden ist, welche zu den Logarithmus gehört, welcher eben die Ziffer hat, aber dessen Characteristic um drey Einheiten größer ist: welches eben der Logarithmus 6,8769474 ist, so im Anfang gegeben worden. Es ist nemlich diese Zahl 7532643.

§. 210. Ist der Logarithmus $-2,8769474$ gegeben, so setze man seiner Characteristic fünf Einheiten zu, damit derselbe in die Tafel falle, indem er wieder 3,8769474 wird; suche so dann die Zahl, so zu diesem Logarithmus gehört, nemlich die vorige 7532,643, rücke aber in derselben das Zeichen der einfachen Einheiten um fünf Einheit zurück, so ist die Zahl 0,07532643 diejenige, die zu dem Logarithmus $-2,8769474$ gehört. Alles dieses kan eine wiederholte Anwendung auf verschiedene Exempel, so mit einigem Nachsinnen verknüpft ist, deutlicher machen als viele Worte.

§. 211. Da 3,4043205 der Logarithmus der Zahl 2537 ist: so ist $-3,4043205$ der Logarithmus des Bruchs $\frac{1}{2537}$, XIII, 158. Will man diesen Bruch in einen Zehentheiligen verwandeln; so darf man nur den Zehler desselben durch den Nenner dividiren: Folgendes kommt der Logarithmus des zehentheiligen Bruchs welcher dem Bruch $\frac{1}{2537}$ gleich ist, wenn man den gegebenen Logarithmus 3,4043205, von dem Logarithmus der Einheit; das ist, von 0,0000000, das ist von $-10 + 9,9999999$ abziehet. XIII, 165. Man erhält dadurch $-4,5956795$, und dieses ist der Logarithmus des verlangten Decimalbruchs. Man ist die Zahl, welche zu dem Logarithmus $-4,5956795$ gehört 39416,64, folgendes ist der Bruch selbst 0,0003941664. Eben so verfähret man in allen übrigen der gleichen Fällen.

Wier

Hierziehender Abschnitt. Berechnung der Cirkel und Winkel.

Ein wichtiger Grundsatz.

§. 1.

Summeß können wir uns zu der Berechnung des Cirkels und der übrigen krummen Flächen, welche wir in der Geometrie betrachtet haben, wenden. Es wird aber hier alles hauptsächlich darauf ankommen, daß man eine gerade Linie zu schaffen wisse, welche so groß sey als der Umkreis eines gegebenen Cirkels. Sind wir dieses zu thun im Stande, so folget das übrige alles gar leicht. Dieses also muß vor allen Dingen ausgemacht werden.

§. 2. Man kan aber diese Untersuchung am besten auf folgenden Satz gründen, dessen wir bereits oben XIII, 131. erwähnet, und seinen Nutzen angepriesen. Man stelle sich nemlich eine beliebige Größe unter T vor, und vermehre sie um eine Kleinigkeit, welche in Ansehung der ganzen T in gar keine Betrachtung kommen kan. Diese sey z , und die vermehrte Größe sey also $T+z$. Man erhebe T zu einer beliebigen Dignität, deren Exponenten man sich unter m vorstellet, und welche folgendes durch T^m bedeutet wird, oder welches auf eben das hinaus komt, man stelle sich in einer geometrischen Reihe, die von der Einheit anfängt, und deren zweytes Glied T ist, das Glied T^m vor, welches von dem ersten um so viele Glieder entfernt ist, als viele Einheiten die Zahl m enthält. Eben dieses thue man bey der vermehrten Größe

$T+z$, und mache $T+z$: so wird diese $T+z = T^m + m T^{m-1}z$. Also ist bey den gesetzten Bedingungen, wenn nemlich z so klein ist, daß es in Ansehung der T in keine Betrachtung kommen kan, der Ueber-

schuß der $T+z$ über T^m dieselbe $m T^{m-1}z$. Und indem T um die Größe z angewachsen, so ist die Dignität derselben, deren Exponent m ist, um $m T^{m-1}z$ vergrößert worden.

§. 3. Man findet also aus dem z , um welches die Wurzel oder das zweyte Glied der Reihe T vermehrt worden, und aus dem Exponenten

XIV. ~~Wissheit.~~ ten der Dignität oder des Gliedes T^m , die GröÙe, um welche diese Dignität angewachsen, indem die Wurzel um r vergrößert worden ist, gar leicht. Man gebe dem T einen Exponenten, der um eins kleiner ist als m , und multiplicire diese Dignität T^{m-r} so wohl durch den vorigen Exponenten m als auch durch r , mit welches die Wurzel angewachsen, so hat man mT^{m-r} , welches man suchte.

S. 4. Will man also hinwiederum aus dieser GröÙe mT^{m-r} , um welche die Dignität angewachsen, die Dignität T^m selbst finden, welche dergestalt gewachsen ist, so hat man nur den Exponenten des T^{m-r} mit der Einheit zu vermehren, und also mT^{m-r} in mT^m zu verwandeln, so dann aber diese GröÙe mT^m so wohl durch den Exponenten m als auch durch r zu dividiren, so erhält man T^m , welche man suchte.

S. 5. Es sey $m=2$, so wird $T^m = T^2$, und mT^{m-r} wird $2T^r = 2T^1$. Vermehret man nun in dieser GröÙe den Exponenten der Dignität der T um r , und dividire dieselbe durch $2r$, so hat man wieder T^2 . Es sey $m=3$, so wird $T^m = T^3$, und mT^{m-r} wird $3T^2$. Wenn man nun hier wieder den Exponenten 2 mit r vermehret, und mit $3r$ dividiret, so bringt man aus $3T^2$ wieder die T^3 heraus, welche um $3T^2$ vermehret worden ist, indem T selbst um r angewachsen.

S. 6. Ist zu zwei gegebenen GröÙen n , r und zu der Dignität T^n die vierte ProportionalgröÙe gefunden worden, welche $\frac{r}{n} \times T^n$ ausdrückt, und ist wieder T um die Kleinigkeit r vermehret worden; so ist $\frac{r}{n}$

$\times T + s = \frac{r}{n} \times T^n + \frac{r}{n} \times mT^{m-r}$, wie man leicht sieht. Der Ueberschuß dieser letztern Dignität über die erstere ist demnach $\frac{r}{n} \times mT^{m-r}$. Daß also denselben heraus zu bringen, man erstlich eben der Regel, vermittelst welcher der Ueberschuß des $T + s$ über T^n dargestellt wird, folgen, so dann aber, das also gefundene mT^{m-r} , mit dem Bruch $\frac{r}{n}$ multipliciren muß. Und hinwiederum kommt $\frac{r}{n} \times T^n$ aus dem Ueberschuß $\frac{r}{n} \times mT^{m-r}$, wenn man sich Anfangs an den Bruch $\frac{r}{n}$ nicht lehret, sondern aus mT^{m-r} die T^m nach den gegebenen Regeln herausbringt, und denselben so dann den Bruch $\frac{r}{n}$ vorschreibt.

S. 7. Es

§. 7. Es sey nunmehr die Dignität zu finden, deren Wurzel, XIV. wenn sie um z vermehret wird, die Dignität selbst um T^z vermehret: ~~Wissens~~
so stelle man sich vor, daß diese GröÙe mit der $\frac{r}{m} \times mT^{m-1}$ einerley be-
deute, welches seyn wird, wenn m der Zahl 4 gleich ist, und $\frac{r}{m} = \frac{1}{4}$.

Denn wenn man diese Bedeutung an gehörigen Ort setzt, so wird $\frac{r}{m}$
 $\times mT^{m-1} = \frac{1}{4} \times 4T^3 = T^3$. Da nun aber die Dignität, welche um
 $\frac{r}{m} \times mT^{m-1}$ zugenommen, indem die Wurzel zu $T+z$ angewachsen, $\frac{r}{m}$
 $\times T^m$ ist, so kan man dieselbe, bey der bestimmten Bedeutung des Bruchs
 $\frac{r}{m}$, und des Exponenten m , leicht finden. Sie ist T^4 . Und auf die
Art kan man immer verfahren. Wird die GröÙe gesucht, welche um
 T^z angewachsen, indem die Wurzel T und z vermehret worden, so
setze man wieder $T^z = \frac{r}{m} \times mT^{m-1}$, so ist $z = m - 1$, folgendes $m = z + 1$,
und $\frac{r}{m} \times m = 1$, weil vor der T^z kein anderer Factor steht, als die Ein-

heit. Dividiret man nun beyderselts durch m ; so wird $\frac{r}{m} = \frac{1}{m}$. Da
nun bekannt ist, daß $\frac{r}{m} \times T^m$ die GröÙe ist, welche man suchet, so setze
man nur in derselben an statt m , $z+1$, und an statt $\frac{r}{m}$ schreibe man $\frac{1}{m}$,

das ist $\frac{1}{z+1}$, so wird eben die GröÙe aus derjenigen, so gegeben wor-
den, unmittelbar bestimmt. Nämlich die dergestalt heraus zu bringende
 $\frac{1}{z+1} \times T^{z+1}$ ist die GröÙe, welche, wenn man in derselben T um z ,
vermehret, dadurch um die gegebene T^z vermehret wird.

§. 8. Dieser Satz ist allgemein: betrachtet man ihn aber etwas
genauer, so findet man, daß sich auch auf denselben die An-
fangs XIV. 4. gegebene Regel schicke. Sol aus dem T^z die $\frac{1}{z+1}$
 $\times T^{z+1}$ heraus gebracht werden, so muß man erstlich den Exponenten z
um die Einheit vermehren, und so dann T^{z+1} so wohl durch $z+1$ als
auch durch z dividiren. Dasjenige so von den Brüchen XIV. 6. ge-
wie

XIV. wiesen worden, bleibt übrigens in seinem Werth, wie man leicht sieht:
 Anmerk. Wenn $\frac{r}{n} \times T^r$ gegeben ist, und man sol die wachsende Größe finden, so
 wird dieselbe $\frac{r}{n} \times \frac{T^{r+1}}{r+1}$. Man bekümmert sich nemlich im Anfang
 um den Bruch nicht, sondern schreibt ihn nur zuletzt vor die gefundene
 $\frac{T^{r+1}}{r+1}$, wie man ihn vor der gegebenen T^r findet.

§. 9. Dieses sind die Sätze auf welche sich die neuern Geometrer
 gründen, so oft sie die krummen Linien durch Zahlen ausdrücken wol-
 len, welche ihre Verhältniß gegen gerade Linien genau, oder doch so
 nahe darstellen, als nöthig ist: wenn diese Verhältniß nicht genau in
 Zahlen oder geraden Linien anzugeben ist. Wir werden dieselbe so
 gleich auf die Cirkelbogen anwenden.

Berechnung des Umkreises eines Cirkels.

F. 383. §. 10. Es sey AB ein Cirkelbogen, dessen Mittelpunkt in C fällt,
 AC sey ein Radius desselben, und AD berühre den Bogen in A. Man
 ziehe CBD nach Belieben, und nachdem man den Bogen etwas wen-
 ges bis in b fortgezogen, und zugleich die Tangente AD so viel nö-
 thig ist, verlängert hat, so ziehe man auch Cbd, und beschreibe durch
 D den Bogen DE um den Mittelpunkt C. Weil man nun Bb gar
 klein genommen, so ist dieser Bogen Bb von einer geraden Linie kaum
 verschieden, und zwar destoweniger, je kleiner man ihn genommen:
 so daß, wenn man ihn so sehr vermindert, daß er fast gar nichts ist,
 auch seine Krümmung unbegreiflich klein wird, und man also diesen
 Bogen Bb so wohl als DE, vor eine gerade Linie halten kan. So
 bald man dieses angenommen, muß man DEd als ein geradlinichtes
 Dreyeck ansehen, dessen Winkel bey E gerade ist, weil ein jeder Cirkel-
 bogen mit seinem Halbmesser einen geraden Winkel machet. V, 47.
 Da nun aber auch der Winkel d dieses Dreyecks demselben, und dem
 ebenfalls geradwinklichten Dreyeck dAC gemeinschaftlich ist, und da al-
 so die Dreyecke DEd und dAC ähnlich sind, VII, 23. so ist Dd:DE=
 DC:AC. Aufset dem aber verhalten sich die Bogen DE, Bb, wie die
 Halbmesser, mit welchen sie beschrieben worden sind. VII, 53. Es ist
 nemlich DE:Bb=DC:BC., oder DE:Bb=DC:AC. Vergleicht
 man nun diese Proportion mit der vorigen Dd:DE=DC:AC, so sie-
 het

het man, daß die Verhältniß Dd:Bb aus der Verhältniß DC:AC XIV. entstehe, wenn man diese verdoppelt. VIII, 9. Demnach verhält sich Dd zur Bb, wie sich das Quadrat aus DC zu dem Quadrat aus AC verhält, oder kurz, es ist $DC^2:AC^2 = Dd:Bb$. IX, 69.

S. 11. Man nenne nunmehr den Radius AC der Kürze halber R, und die Tangente AD nenne man T, so ist IX, 66. $CD^2 = AD^2 + AC^2 = R^2 + T^2$. Die Dd ist das Theilchen, um welches die Tangente T angewachsen, indem der Cirkelbogen AB um Bb größer worden, und dieses Theilchen ist in Ansehung der ganzen T so klein, daß es mit demselben in keine Vergleichung zu ziehen ist. Man benenne diese Dd mit r , so wird die Proportion, die wir eben erwiesen haben, unter diesen Benennungen also stehen: $RR + TT : RR = r : Bb$. Demnach ist $Bb =$

$$\frac{RR}{RR + TT} \times r.$$

S. 12. Der Bruch $\frac{RR}{RR + TT}$, durch welchen r zu multipliciren ist, damit Bb erhalten werde, ist, von der Summe aller Glieder einer geometrischen Progression, welche beständig absteiget, destoweniger unterschieden, je weiter man die Progression fortführet, wie wir oben gesehen haben, als wir von solchen Progressionen handelten. XIII, 99.

Und zwar ist diese Progression $1 - \frac{T^2}{R^2} + \frac{T^4}{R^4} - \frac{T^6}{R^6} + \frac{T^8}{R^8} - \&c.$

Denn wenn a das erste Glied einer geometrischen Progression bedeutet, welche mit verwechselten Zeichen absteiget, und b das zweyte: so ist

die Summe aller Glieder derselben $\frac{aa}{aa + bb}$ XIII, 99. Setzet man aber

$$\text{vor } a \text{ die } 1, \text{ und vor } b, \frac{T^2}{R^2}; \text{ so wird } \frac{aa}{aa + bb} = \frac{1}{1 + \frac{TT}{RR}} = \frac{RR}{RR + TT}.$$

Und wenn man also in dem Ausdruck der Bb an statt des Bruchs

$$\frac{RR}{RR + TT}$$

diese Reihe setzet; so findet man $Bb = r -$

$$\frac{T^2}{R^2} + \frac{T^4}{R^4} - \frac{T^6}{R^6} + \frac{T^8}{R^8} - \&c.$$

XIV. S. 13. Wir haben also das unendlich kleine Theilchen, Bb aus der
 Abschnitt. ABD oder T, und aus dem Theilchen derselben Dd dergestalt ausge-
 drückt, daß wir eine Reihe von unendlich kleinen Grössen z , —
 $\frac{T^2_r}{R^2} + \frac{T^4_r}{R^4}$ gefunden, welche zusammen die Bb ausmachen. Wir

wissen aber auch, XIV, 7. wie aus solchen Theilchen als z , $\frac{T^2_r}{R^2}$,

die wachsenden Grössen T, $\frac{T^3}{3R^2}$ &c. selbst zu finden sind, und man
 sieht vor sich, daß die Grösse, welche um Bb angewachsen ist, der
 Bogen AB sey.

S. 14. Nun aber ist klar, erstlich daß, wenn zwei Grössen, welche
 im Anfang beyde nichts gewesen sind, nach und nach dergestalt an-
 wachsen, daß die Theile, um welche sie zugleich anwachsen, immer
 gleich sind; auch die ganzen Grössen, welche dergestalt zugleich ange-
 wachsen sind, immer gleich seyn werden. AB wächst von nichts, denn
 bey A ist der Bogen von keiner Grösse. Ein Theilchen um welches es
 angewachsen ist, ist Bb. Ein jedes solches Theilchen ist der Summe

aller Glieder der Reihe z — $\frac{T^2_r}{R^2} + \frac{T^4_r}{R^4}$ &c. gleich. Also ist auch ein
 jedes AB selbst der Grösse gleich, welche in der Zeit um z —
 $\frac{T^2_r}{R^2} + \frac{T^4_r}{R^4}$ &c. anwächst, in welcher zu der AB das Theilchen Bb
 hinzukommt.

S. 15. Zweitens ist klar, daß, wenn eine Grösse z von nichts an-
 wächst, und ihr Wachsthum z ist aus verschiedenen Theilen $o - p + q$
 zusammen gesetzt: auch die ganze Grösse z welche dergestalt angewach-
 sen, aus den Grössen $o - p + q$ bestehen werde, deren erstere o aus
 der Kleinigkeit o angewachsen, und die zweite p entstanden, indem das
 Ganze immer um p abgenommen, die dritte q aber durch den beständi-
 gen Zuwachs der q heraus gekommen. Denn gesetzt jemand, welcher
 gar nichts hat, bekäme täglich geschenkt z , welches unser o seyn sol, er
 gebe täglich aus $7 = p$, und er verdiene $3 = q$, so ist kein Zweifel, daß
 nach sieben Tagen er haben werde $7o - 7p + 7q$. Und so ist es im-
 mer, man mag diese oder jene Zahl der Tage annehmen. Wird nun
 die Zahl der Tage durch N ausgedrückt, und bedeutet z die Summe
 seines

Eines Vermögens nach dieser Zeit, so ist ohnstreitig $S = N_o - N_p +$ XIV. N_q . Und weil N_o dasjenige ist, welches aus dem o angewachsen, und N_p dasjenige, welches entstanden, indem das Ganze immer um p abgenommen, wie auch N_q dasjenige, so durch den täglichen Zuwachs q heraus gebracht worden; so muß man, wenn man sich der vorigen Zeichnung bedienen wil, N_o nennen O , und N_p wird P , wie auch $N_q = Q$. Folgendes ist $S = O - P + Q$. Man siehet leicht, daß eben dieses richtig seyn müsse, wenn die Einnahme und Ausgabe täglich ungleich sind. S ist auch in diesem Fall gewiß gleich der Summe alles geschenkten o , und der Summe alles verdienten q , weniger der Summe alles ausgegebenen p .

§. 16. Wenden wir nun dieses auf unsere Reihe an, da Bb , das Wachstum der AB , aus den verschiedenen Theilen $= \frac{T^2}{R^2} + \frac{T^4}{R^4}$ besteht: so siehet man, daß die ganze AB welche dergestalt angewachsen ist, aus $T - \frac{T^3}{3R^2} + \frac{T^5}{5R^4}$ &c. bestehen werde, und man hat also:

$$AB = T - \frac{T^3}{3R^2} + \frac{T^5}{5R^4} - \frac{T^7}{7R^6} + \frac{T^9}{9R^8} - \frac{T^{11}}{11R^{10}} \text{ \&c.}$$

Oder wenn der gemeinschaftliche Factor T abgesondert wird, und man nimmt den Halbmesser R vor die Einheit an, so ist:

$$AB = T \times \left(1 - \frac{T^2}{3} + \frac{T^4}{5} - \frac{T^6}{7} + \frac{T^8}{9} - \frac{T^{10}}{11} \text{ \&c.} \right)$$

Und man kan aus dieser Reihe AB so nahe finden als man wil, wenn nur bekant ist, wie sich T oder AD gegen den Halbmesser AC verhalte, damit man nemlich T aus diesem, das ist, aus der angenommenen Einheit, ausdrücken könne.

§. 17. Dieses zu erhalten, sey der Bogen AB der dritte Theil eines Quadranten, oder der sechste Theil des halben Umkreises, und man ziehe BF auf AC perpendicular. Diese BF wird dadurch die Hälfte der Sehne eines Bogens, welcher zweymal so groß als AB , und folgendes der sechste Theil des ganzen Umkreises ist. Und da die Sehne des sechsten Theils des Umkreises dem Halbmesser des Cirkels AC gleich ist, V , 89. und dieser vor die Einheit angenommen worden, so ist $BF = \frac{1}{2}$ und $BF^2 = \frac{1}{4}$. Da nun in dem geradenwinklichen

XIV. *Abchnitt.* ten Dreieck BCF, $FC^2 = BC^2 - BF^2$, IX, 66. so ist $FC^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Und weil $CF:FB = AC:AD = AC:T$, und also auch $CF^2:FB^2 = AC^2:AD^2$, IX, 73. das ist, $\frac{1}{2}:\frac{1}{2} = 1:T^2$, so ist $T^2 = \frac{1}{2}$, und folgendes $T = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Man hat also AD oder T aus dem Halbmesser des Cirkels bestimmt, und die Verhältniß des Bogens AB zu den halben Cirkel ist ebenfalls bekannt. Also ist weiteres nichts nöthig, als daß man an statt des T^2 in der heraus gebrachten Reihe überall $\frac{1}{2}$ schreibe, wenn der sechste Theil des halben Umkreises AB wirklich aus dem Radius ausgedrucket werden sol, welchen man voran angenommen hat. Es wird dadurch:

$$AB = T \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11} \right), \text{ und so fort.}$$

S. 18. Es ist nicht ohne Bedacht geschehen, daß wir den gemeinschaftlichen Factor T stehen lassen, da wir an die Stelle desselben hätten $\sqrt{3}$ schreiben können. Wil. man den halben Umkreis auf die Art ausdrücken, so hat man nur beyderseits mit 6 zu multipliciren, so wird, wenn man den ganzen Umkreis sich unter P vorstellt, und S die Summe aller Glieder der Reihe bedeuten läßt, die durch T zu multipliciren sind, $6AB = \frac{1}{2}P = 6T \times S$, folgendes $\frac{1}{2}PP = 36TT \times SS$. Da nun $TT = \frac{1}{2}$, so ist $\frac{1}{2}PP = 36 \times \frac{1}{2} \times SS = 12SS$. Und wenn man also wieder beyderseits die Quadratwurzel. nimt, so ist $\frac{1}{2}P = \sqrt{12 \times S}$. Denn man kan die Quadratwurzel von 12 nicht genau schaffen. Schreibt man nun an die Stelle des S wiederum die Reihe,

$$\text{so wird } \frac{1}{2}P = \sqrt{12 \times \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} - \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11} \right)}, \text{ und so fort.}$$

Diese Reihe kan man nachfolgender maßen am bequemsten rechnen.

S. 19. Man fänget an, III, 50. die Quadratwurzel von 12 in Dezimalbrüchen so nahe zu schaffen, als man es nöthig erachtet, und dividirt diese Wurzel mit 3, und den Quotienten von dieser Division wieder mit 3. Eben dieses thut man mit dem neuen Quotienten, und so immer fort bis man auf unbetrachtliche Kleinigkeiten kommt. Dadurch

erhält man die Reihe $\sqrt{12}, \frac{\sqrt{12}}{3}, \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3}, \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 3}$ &c. Nach diesem dividirt man die dergestalt berechneten Glieder dieser Reihe, wie sie in der

der Ordnung auf einander folgen, das erste durch 1, das zweyte XIV. durch 3, das dritte durch 5, und so fort, so erhält man die Glieder Abschnitte der Reihe, welche den halben Umkreis ausdrückt, selbst, nemlich

$$\frac{\sqrt{12}}{1}, \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3}, \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 5}, \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}, \frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} \text{ \&c.}$$

Nur muß man sich erinnern, daß das erste dieser Glieder das Zeichen + habe, das zweyte aber —, das dritte wieder +, und so immer abgewechselt, und daß man also die Summe des zweyten, vierten, sechsten und aller übrigen Glieder, deren Entfernung von dem ersten eine gerade Zahl ausdrückt, von der Summe der übrigen Glieder abziehen müsse, wenn man den Umkreis wirklich erhalten wil. Aus dieser Ursach thut man wohl, wenn man so gleich, indem man diese Glieder machet, diejenigen besonders schreibt, welche + haben, und die übrigen auch besonders, wodurch die Rechnung folgendes Ansehen bekommt:

$\frac{\sqrt{12}}{1} = 3,46410161$	$\frac{\sqrt{12}}{1} = 3,46410161$	
$\frac{\sqrt{12}}{3} = 1,15470053$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{3^3} = 0,38490017$
$\frac{\sqrt{12}}{3 \cdot 3} = 0,38490017$	$\frac{\sqrt{12}}{5 \cdot 3^2} = 0,07698003$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^3} = 0,12830005$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{7 \cdot 3^3} = 0,01832853$
$\frac{\sqrt{12}}{3^4} = 0,04276668$	$\frac{\sqrt{12}}{9 \cdot 3^4} = 0,00475183$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^5} = 0,01425556$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{11 \cdot 3^5} = 0,00139596$
$\frac{\sqrt{12}}{3^6} = 0,00475183$	$\frac{\sqrt{12}}{13 \cdot 3^6} = 0,00036553$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^7} = 0,00158395$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{15 \cdot 3^7} = 0,00010559$
$\frac{\sqrt{12}}{3^8} = 0,00052798$	$\frac{\sqrt{12}}{17 \cdot 3^8} = 0,00003105$	- - - -
$\frac{\sqrt{12}}{3^9} = 0,00017599$	- - - -	$\frac{\sqrt{12}}{19 \cdot 3^9} = 0,00000936$

$\frac{\sqrt{12}}{3^{10}} = 0,00005866$	$\frac{\sqrt{12}}{21.3^{10}} = 0,00000279$	-	-	-	-
$\frac{\sqrt{12}}{3^{11}} = 0,00001955$	-	-	-	$\frac{\sqrt{12}}{23.3^{11}} = 0,00000085$	-
$\frac{\sqrt{12}}{3^{12}} = 0,00000652$	$\frac{\sqrt{12}}{25.3^{12}} = 0,00000026$	-	-	-	-
$\frac{\sqrt{12}}{3^{13}} = 0,00000217$	-	-	-	$\frac{\sqrt{12}}{27.3^{13}} = 0,00000008$	-
$\frac{\sqrt{12}}{3^{14}} = 0,00000072$	$\frac{\sqrt{12}}{29.3^{14}} = 0,00000003$	-	-	-	-
$\frac{\sqrt{12}}{3^{15}} = 0,00000024$	-	-	-	$\frac{\sqrt{12}}{31.3^{15}} = 0,00000009$	-
<hr/>					
+	3,54623314				0,40464049
-	0,40464049				
<hr/>					
	3,14159265				

§. 20. Es enthält also der halbe Umkreis den Halbmesser drey-
mal, und über dieses 0,14159265 Theilchen desselben, oder wenn man
den Radius in 100000000 Theilchen theilet, so enthält der halbe
Umkreis dieser Theilchen 3,14159265, und wie sich die erste dieser Zah-
len zu der zweyten verhält, so verhält sich der halbe Durchmesser zu
dem halben Umkreis. Eben diese Verhältniß hat auch der ganze Durch-
messer zu dem ganzen Umkreis. Man kan aber auch diese Verhältniß
in mehreren Ziffern noch genauer schaffen, wenn man sich nur der
Quadratwurzel von 12 durch kleinere Brüche noch mehr nähert, als
wir der Kürze wegen gethan haben. Thut man dieses, oder siehet
auch nur die Rechnungen geschickter Männer nach, so findet man,
daß alle Ziffern richtig sind, die wir gefunden haben, da man sonst
wegen der zwey letzten in Zweifel stehen müßte, weil die Brüche, wel-
che zusammen gerechnet werden mußten, um Kleinigkeiten fehlen. Es
haben aber diese Fehler einander durch die Subtraction des einen feh-
lerhaften von dem andern, wie öfters geschieht, aufgehoben.

§. 21. Es erfordert aber die Ausübung selten und vielleicht gar
niemals, daß man die Verhältniß des Diameters eines Cirkels gegen
seinen Umkreis genauer bestimme, als wir gethan, ja man braucht
selbst die Ziffern, welche dergestalt gefunden worden sind, gar selten.
Man

Man läßt meistens in der Zahl, welche den Umkreis ausdrückt, die letzten Ziffern als Kleinigkeiten weg, und nimmt nur die ersten an. Man setzt zum Exempel, der Durchmesser verhalte sich zu dem Umkreis wie 1 zu 3,14, wenn man nicht sonderlich genau rechnen wil, oder wie 1 zu 3,141, wenn man etwas genauer zum Zweck zu kommen verlangt. Noch genauer ist die Verhältniß 1 zu 3,14159, und an dieser kan man sich meistens begnügen. Die nachstehende Verhältniß des Durchmessers zu dem Umkreis ist ohnfechtig überflüssig genau: 1 : 3,141592653589793238.

XIV.

Abchnitt:

Verschiedene Berechnungen, die sich auf die Ausmessung des Umkreises eines Cirkels gründen.

§. 22. Da ein Grad der 180ste Theil des halben Umkreises ist, so bekommt man die Verhältniß der Länge desselben gegen den Halbmesser seines Cirkels, wenn man die Zahl, welche den halben Umkreis aus dem Halbmesser ausdrückt, durch 180 theilet. Es kommt durch diese Division der Quotient 0,0174532925, und dieses ist also die Zahl der Theilchen, deren der Halbmesser 1,00000000 enthält, die einen Grad des Cirkels ausmachen. Theilet man diese Zahl nochmals durch 60, so bekommt man die Zahl der Theilchen eben des Cirkels, die eine Minute ausmachen. Der Quotient von dieser Theilung ist 0,0002908882, und diese Zahl bestimmt also die Größe einer Minute. Eben so findet man, daß, wenn der Halbmesser 1,00000000 Theilchen hat, eine Secunde 0,000004848: dergleichen Theilchen enthält. Auch von diesen Ziffern kan man nur die ersten nehmen, wenn es nicht nöthig ist, daß man die Verhältniß so gar genau bestimme.

§. 23. Es wird vermittelst dieser Zahlen aus einem jeden Durchmesser, der zu derselben gehörige Umkreis, und aus einem jeden Umkreis hinwiederum desselben Durchmesser gefunden. Denn alle Durchmesser haben gegen ihre Umkreise, einerley Verhältniß, diejenige nemlich, welche die gegebene Zahlen gar nahe angeben, welche wir uns der Kürze und Deutlichkeit halben unter den Buchstaben d, p vorstellen wollen, daß also d : p die Verhältniß eines jeden Durchmessers zu seinem Umkreis, und p : d die Verhältniß eines jeden Umkreises zu seinem Durchmesser ausdrückt. Ist nun der Diameter eines Cirkels in Zahlen gegeben, oder man hat ihn durch einen beliebigen Maßstab gemessen und gefunden, daß derselbe zum Exempel 92,34 Theile hat, welche Zahl wir uns unter D vorstellen wollen, so mache man

3111

man

KIV. Abschnitt. man $d: p = D: P$, so ist $P = \frac{p \times D}{d}$ der gesuchte Umkreis zu dem

Durchmesser D : und wird demnach in unserm Exempel gefunden, wenn man $D = 92, 34$ durch $3, 14159$ multipliciret, weil $d = 1$ nicht dividiret. Es ist also $P = 290, 0944$, wenn man nemlich die unnöthigen Kleinigkeiten wegläßet. Und umgekehrt wird aus dem gegebenen Umkreis P der Durchmesser D des Circels gefunden, wenn man

machet $p: d = P: D$. Es ist also $D = \frac{P \times d}{p}$ und kommt, wenn man

den gegebenen Umkreis P durch die Zahl $p = 3, 14159$ Sec. dividiret, weil wider die Einheit d nicht multipliciret. Es sey der Umkreis

$290, 0944$ gegeben, so ist $\frac{290, 0944}{3, 14159} = 92, 34$, und dieses ist der gesuchte Durchmesser.

S. 24. Fast auf eben die Art verfähret man, wenn die Verhältniß eines Bogens gegen den Umkreis durch die Zahl der Grade, Minuten und Secunden ausgedruckt wird, welche er hält, und man so entweder aus dem Bogen den Radius, oder aus dem Radius den Bogen finden. Denn weil man weiß, wie viel Theile des Radius auf einen Grad, eine Minute und eine Secunde gehen: so kan man leicht berechnen, wie viel Theile des Radius so viel Grade, Minuten und Secunden ausmachen, als deren der Bogen hält, von welchen die Frage ist. Hat man dieses dergestalt gefunden, so hat man die Verhältniß dieses Bogens zu dem Radius, mit welcher man sodann eben so verfahren muß, wie wir bey dem ganzen Umkreis und dem Durchmesser gewiesen.

J. 25. Es sey ein Bogen von $30, 24, 15''$, und dieser sey lang $32, 7$ wie groß ist dessen Radius.

Es hält 1 Grad 0,01745329 Theilchen des Radius, folgendes XIV.
30 multipl. Abschmitt.

halten 30 Grade 0,52359870

Es hält 1 Minut 0,000290881 Theilchen des Radius.
24 multipl.

0116952

58176

folgendes halten 24. 0,00698112

Es hält 1 Sec. 0,00000484

15 multipl.

2420

484

folgendes halten 15. 0,00007260

Da nun also 3° = 0,52359870

24' = 0,00698112

15" = 0,00007260

so ist 30, 24, 15" = 0,53065242.

Folgendes verhält sich ein Bogen von 30, 24, 15" zu seinem Halbmesser, wie sich 0,53065242 zu der 1 verhält, und es ist nunmehr leicht, aus dem gegebenen Radius die Länge eines solchen Bogens, und aus dem gegebenen Bogen den Radius zu finden. Bey dem gegebenen Exempel, da der Bogen 32, 7 hält, sage man wie 0,53065242 zu 1, so 32, 7 zu dem Radius, und so in den übrigen Fällen.

S. 26. Hat man nur
oder aus dem Umkreis
sind sonst diese beyden
Kreis selbst leicht gefunden
gleich ist, dessen Grund
der Radius desselben ist
den Radius multiplieirt
welche den Inhalt des
zur Einheit angenommen
92,34, folgendes dessen
sein Umkreis seyn werde
len in einander, und m
kreis sehr, auf einmal 1

XIV. welche den Radius ausdrucket, durch die Helfte der Zahl, welche den Abschnitt. Umkreis ausdrucket, oder die Zahl, welche den Umkreis ausdrucket, durch die Helfte derjenigen, welche den Radius darstellt, so ist das Product 145, 0472 \times 46, 17, oder 290, 0944 \times 23, 085 = 669, 6829 224 der Inhalt des Cirkels.

§. 27. Auf eben die Art verfähret man mit einem jeden Abschnitt, nachdem man den Bogen desselben so wohl als den Radius gemessen oder XIV, 25 berechnet: so multipliciret man hernach die Zahl, welche den Bogen ausdrucket durch die Helfte derjenigen, welche den Radius misst. Die Sache hat keine Schwierigkeit, und braucht nach dem Beyspiel, welches wir von einem ganzen Cirkel gegeben, keine weitere Erläuterung.

§. 28. Man siehet aus demjenigen, so wir IX, 36. in der Geometrie gewiesen, so wohl als aus der gegenwärtigen Berechnung desselben, daß der Cirkel einem geradewinklichten Viereck gleich seyn werde, dessen eine Seite dem Durchmesser gleich ist, welche wir die Grundseite nennen wollen, und die andern, die wir nunmehr als die Höhe ansehen müssen, dem vierten Theil des Umkreises. Ein Quadrat, dessen Seite der Durchmesser ist, ist ebenfalls ein geradewinklichtes Viereck, dessen Grundseite mit der Grundseite des vorigen übereinkommt, die Höhe aber von der Höhe desselben verschieden ist. Da nun jede zwey Parallelogramme, die gleiche Grundlinien haben, sich wie ihre Höhen verhalten: so verhält sich das Viereck so dem Cirkel gleich ist, zu dem Quadrat des Durchmessers, wie der vierte Theil des Umkreises sich zu den Durchmesser verhält. Und es ist demnach dieses Verhältniß durch Zahlen, welche gar wenig fehlen, leicht auszudrücken. Die Verhältniß des Umkreises zu dem Durchmesser ist 3, 14159265: 1, theilet man die erstere Zahl durch 4, so erlanget man den vierten Theil des Umkreises 0, 78539816. Wie sich also diese Zahl zu der Einheit verhält, so verhält sich der Cirkel zu dem Quadrat seines Durchmessers. Auch hier kan man die kleinern Brüche weglassen, wenn es nicht nöthig ist alles so genau zu nehmen, und dieses hat überhaupt bey allen dergleichen Zahlen statt.

§. 29. Diese Zahlen können uns dienen den Inhalt eines Cirkels aus seinem Durchmesser auf eine andere Art zu finden. Es sey der Durchmesser eines Cirkels 9, 2, so berechne man das Quadrat desselben, welches 84, 64 ist, und sage sodann wie 1 zu 0, 78539 ... so das

Das gefundene Quadrat 84, 64 zu dem Inhalt des Cirkels; dessen Durchmesser 9, 2 war. Dieser Inhalt ist also 66, 47 54 09, XIV. Abschnitt.

§. 30. Man kan aber auch vermittelst dieser Zahlen den Durchmesser eines Cirkels finden, dessen Inhalt gegeben ist. Es sey der gegebene Inhalt 66, 47 54 09, so darf man nur auf eben den Weg, welchen wir gegangen, und vermittelst, welches wir aus dem Durchmesser den Cirkel heraus gebracht haben, zurück gehen, so erlanget man den Durchmesser wiederum. Man sage erstlich wie 0, 78539 . . . zu 1, das ist, wie ein jeder Cirkel zu dem Quadrat seines Durchmessers, so der gegenwärtige 66, 47 54 09 zu 84, 64, welches demnach das Quadrat des Durchmessers dieses Cirkels seyn wird. Die Quadratwurzel dieser Zahl 9, 2 drückt also den Durchmesser selbst aus.

§. 31. Es ist nunmehr etwas leichtes die krummen Oberflächen der Körper der ersten, andern und dritten Art zu berechnen, nachdem wir einen Cirkelbogen in eine gerade Linie zu verwandeln wissen. Denn so bald wir eine gerade Linie annehmen, welche einen Theil des Umkreises eines Cirkels, oder auch dem ganzen Umkreis gleich ist: können wir diese Oberflächen mit geradelinichten Figuren vergleichen, und wir haben XIII, 12 gewiesen, wie die geradelinichten Figuren zu berechnen sind.

§. 32. Da nemlich XI, 108. die krumme Oberfläche eines geraden Walze einem rechtwinklichten Viereck gleich ist, dessen Seiten sind, die Höhe der Walze, und eine gerade Linie, die dem Umkreis seiner Grundfläche gleich ist: so siehet man, daß diese Oberfläche gemessen werde, wenn man erstlich aus dem Durchmesser der Grundfläche der Walze, deren Umkreis suchet, und so dann die Zahl, welche dieselbe ausdrückt, durch diejenige multipliciret, welche die Höhe des Cylinders angiebt. Auf eben die Art findet man auch einen jeden Theil der krummen Oberfläche eines geraden Cylinders, welcher von zweyen Bogen der Umkreise seiner Flächen, und von zween geraden Linien, die der Axe parallel sind, beschloffen wird: wenn man nur an statt des ganzen Umkreises den Theil des Umkreises der Grundfläche nimmt, welcher zu dem Theil der Oberfläche gehört, die man suchte.

§. 33. Und da die Oberfläche eines geraden Kegels einem Dreieck gleich ist, dessen Grundlinie dem Umkreis der Grundfläche des Kegels gleich ist, und dessen Höhe so groß ist, als die Seite des Kegels XI, III. so kan es wohl mit der Berechnung dieser Oberfläche so wohl als

U a a a a

mit

XIV. mit der Berechnung der Theile derselben, welche wir betrachten, und ~~schon~~ mit geradelinichten Figuren verglichen haben, keine Schwierigkeit setzen.

§. 34. Die Oberfläche der Körper der dritten Art, welche in Betrachtung gezogen werden konnten, konnten wir XI, 125 mit Cylindrischen Oberflächen vergleichen, und also ist auch bey dieser Berechnung nichts weiter zu sagen. Und da die Oberfläche einer Kugel mit unter die Classe dieser Oberflächen gehdret, und dieselbe einem geradenwinklichten Viereck gleich ist, dessen Höhe der Diameter der Kugel ist, und seine Grundfläche der Umkreis eines der größten Cirkels derselben, so wird die Oberfläche der Kugel so gleich gefunden, wenn man nur den Durchmesser derselben durch seinen Umkreis multiplicirt.

§. 35. Was nun aber die Körper der ersten, der andern und dritten Art anlanget, welche Cirkel oder Theile desselben zu ihrer Grundfläche haben, so ist die Berechnung derselben von der Berechnung der Körper eben dieser Art, deren Grundflächen geradelinichte Figuren sind, gar nicht unterschieden, ausser daß man die Grundflächen nach den Regeln der Cirkelmessung berechnen muß, und es ist gar nicht nöthig, daß wir uns bey diesen leichten Dingen aufhalten.

Berechnung der Seiten und Winkel der Dreiecke.

§. 36. Wir wenden uns also zu einer andern Berechnung der ausgedehnten Größen, welche die Dreiecke betrifft, da wir zeigen wollen, wie aus drey Theilen eines Dreiecks die drey übrigen durch Rechnung gefunden werden. Wir haben uns dieser Redensart bereits bedienet, und die sechs Theile eines Dreiecks genennet seine drey Seiten und seine drey Winkel. Wie man aus dreyen dieser Dinge die übrigen finden sol, indem man die Dreiecke verzeichnet, ist gleich im Anfang der Geometrie gelehret worden. Nur mußte unter den drey gegebenen Theilen, sich wenigstens eine Seite befinden. Unter eben den Umständen wollen wir wissen, wie man durch Rechnungen auf eben das kommen könne. Denn aus den drey Winkeln werden die Seiten eines Dreiecks niemals bestimmt; sondern es können unendlich viele Dreiecke seyn, deren drey Winkel einerley Größe haben, nemlich alle, die einander ähnlich sind, haben diese Gleichheit der Winkel; ob-zwar im übrigen ihre Seiten der Größe nach von einander noch so sehr verschieden sind.

Sinus.

Sinus. Cosinus.

XIV.
Abshuler.

S. 37. Es kommt das meiste hiebey auf den richtigen Verstand gewisser Kunstwörter an, welche man hat erfinden müssen, damit man sich, auch ohne Figur, deutlich erklären könnte. Man beschreibe auf dem nach Belieben angenommenen Durchmesser AB, um den Mittelpunct C einen halben Cirkelkreis ADB, und theile denselben vermittelst des Halbmessers DC in zween Quadranten AD, DB. Man nehme in einem dieser Quadranten das Punct E nach Belieben, und ziehe von demselben EF auf den Radius AC perpendicular. Diese Perpendicularslinie heißet der Sinus des Bogens AE, welcher zwischen A und E liegt.

F. 386.

S. 38. Man kan aber diesen Bogen auf verschiedene Art durch Worte ausdrücken, wenn man ihn nicht, wie wir gethan, ohne Umschweif bezeichnen wil. Es machet der Bogen AE mit dem ED einen Quadranten, und AE ist also die Ergänzung des Bogens ED zu einem Quadranten, gleichwie hinwiederum ED den Bogen AE zu einem Quadranten ergänzt. Demnach kan auch EF der Sinus der Ergänzung des Bogens ED zu einem Quadranten genennet werden. Eine solche Ergänzung nennet man auch das Complement eines Bogens: man wird also, wenn man dieses Wort gebrauchen wil, EF den Sinus des Complements des Bogens ED nennen müssen.

S. 39. Zieheth man von eben dem Punct E auch eine gerade Linie EG perpendicular auf den Radius DC, so ist diese EG der Sinus des Bogens ED, und folgendes der Sinus des Complements des Bogens AE. Das Viereck FEGC ist geradewinklicht, wie leicht zu sehen ist, und es sind demnach in demselben die einander entgegen gesetzten Seiten gleich, $EF = GC$, und $EG = FC$. Demnach ist auch FC der Sinus des Complements des Bogens AE, und CG ist der Sinus des Complements des Bogens ED.

S. 46. Man ziehe EC, welche dem Radius AC gleich seyn wird, so misset VII, 66. der Bogen AE den Winkel ACE, und der Bogen ED misset den Winkel ECD, welcher die Ergänzung des vorigen zu einem geraden Winkel ist. Man nennet aus der Ursach auch EF den Sinus des Winkels ACE; und also wird auch EG der Sinus des Winkels ECD genennet. Dieser Winkel ECD ist dem Winkel FEC gleich, wie gar leicht einzusehen ist, und ECA ist $= CEG$. Demnach ist auch EG oder FC der Sinus des Winkels FEC, oder der Sinus des Complements des Winkels FCE: und EF oder CG

Z a a a a 2

ist

XIV. ist der Sinus des Winkels $CEG = ACE$, oder der Sinus des ~~Winkels~~ Complements des Winkels ECG . Und man kan mit einem Wort hier an statt des Bogens allzeit den Winkel nennen, welcher von dem Bogen gemessen wird, welches in der Anwendung desto weniger Schwierigkeit macht, weil die Winkel durch die Zahl der Grade und deren Theile ausgedrückt werden, die in dem Bogen enthalten sind, XIII, 9.

§. 41. Der Sinus des Complements eines Bogens oder eines Winkels wird auch der Cosinus desselben Winkels genennet. Also ist der Cosinus des Bogens AE , oder des Winkels ACE die gerade Linie $FC = EG$, und der Cosinus des Bogens ED ist EF oder CG . Und wenn man in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck, dergleichen EFC ist, die Seite, welche dem geraden Winkel F entgegen steht, EC , vor den Radius annimmt; so wird die Seite FE , welche dem Winkel ECF entgegen gesetzt ist, der Sinus dieses Winkels, und FC , welche an diesem Winkel FCE lieget, und denselben mit der größten Seite EC einschließt, wird dieses Winkels Cosinus. Denn man kan allzeit die Seite CF in A verlängern, und um den Mittelpunct C durch E den Bogen EA beschreiben, wodurch diejenige Figur erhalten wird, aus welcher wir diese Benennungen des Sinus und Cosinus hergenommen haben.

F. 387.

§. 42. Hat man aber in dem rechtwinklichten Dreyeck BCD den Bogen EA mit einem Radius beschrieben, der größer oder kleiner ist als die größte Seite desselben DC , und so dann den Sinus des Winkels C , nemlich EF gezogen, wodurch auch eben desselben Winkels Cosinus FC abgeschnitten wird, so siehet man doch, daß EF sich zu EC verhalte, wie DB zu DC , wie auch, daß $FC : EC = BC : DC$, und $FC : FE = BC : BD$. Diese letztern Proportionen werden uns bloß dienen, künftig ein und anderes zu erweisen, und es ist also nur die erste derselben hauptsächlich zu merken, welche man sich unter diesen Worten bekant machen kan: In einem jeden geradwinklichten Dreyeck BCD verhält sich eine der Seiten, die den geraden Winkel einschließen DB , zu der größten Seite DC , wie der Sinus des Winkels C , welcher der ersten Seite entgegen steht, sich zu dem Radius verhält.

§. 43. Diese Proportion ist bey einer jeden beliebigen Größe des Radius richtig. Und wenn man also zu dem Winkel C noch einen Bogen ea mit einem andern Radius eC beschrieben, und so dann den Sinus

Sinus ef verzeichnet hat, so ist $ef : eC = DB : DC$, nun war auch $EF : EC = DB : DC$, folgendes ist $ef : eC = EF : EC$, und $ef : EF = eC : EC$. Das ist, die Sinus von einerley Winkel C, welche zu verschiedenen Halbmessern CE, Ce gehören, verhalten sich gegen einander, wie diese Halbmesser. Eben dieses ist auch von den Cosinen fC, FC zu sagen.

S. 44. Uebrigens ist leicht einzusehen, daß, wenn der Bogen AE und der Winkel C, welchen er misst, sehr klein ist, auch der Sinus desselben sehr klein, und dem Bogen ohne einigen merklichen Fehler gleich seyn werde, und daß, indem der Bogen und der Winkel wächst, auch der Sinus mit wachsen werde, bis der Bogen ein Quadrant, und der Winkel gerade wird: in welchem Fall der Sinus DC so groß ist als der Radius. Dieses ist der größte Sinus unter allen, und man kan aus der Ursach auch den Halbmesser eines Cirkels, den größten Sinus nennen. Im Latein nennet man ihn Sinus totus. Will man aber den Sinus eines stumpfen Winkels ECB, oder den Sinus eines Bogens EDB, welcher größer ist als ein Quadrant nehmen, so wird derselbe von dem Sinus des Winkels ECA nicht verschieden. Und man muß demnach sagen, daß der Winkel ECA und seine Ergänzung zu zweyen geraden Winkeln ECB, oder der Bogen AE, und seine Ergänzung zu einem halben Cirkel EDB einerley Sinus EF haben. Dieses ist in der Anwendung wohl zu merken. Man würde sich in einigen Fällen öfters verstoßen, wenn man dieses nicht beobachtet wolte. Man pflegt die Ergänzung eines Bogens zu einem halben Cirkel, oder die Ergänzung eines Winkels zu zweyen geraden, auch des Bogens oder des Winkels Supplement zu nennen, und es ist also EDB das Supplement des Bogens AE, und AE ist das Supplement des Bogens EDB.

F. 386.

S. 45. Was aber den Cosinus FC eines spitzigen Winkels ECA, oder des Bogens AE, welcher ihn misst, anlangt, so ist derselbe im Anfang, wenn der Winkel oder der Bogen gar klein ist, fast so groß als der Radius AC, und wird immer kleiner und kleiner, indem der Bogen AE mit dem Winkel ACE wächst, bis er endlich gar verschwindet, wenn der Bogen AE bis zur Größe des Quadranten AD erwachsen, und der Winkel gerade worden. Der Cosinus des stumpfen Winkels ECB, und des Bogens EDB welcher ihn misst, ist mit dem Cosinus des Supplements derselben EA oder ECA einerley, und kein anderer als FC, und es ist also mit dem Cosinus eben so be-

Na a a a 3

schaf-

XIV. schaffen, wie mit dem Sinus. Der Cosinus eines Bogens, und seines Supplements ist in allen Stücken einerley.

§. 46. Wir können noch anmerken, daß das Stück des Radius AF zwischen dem Sinus und dem Umkreis, der Sinus versus des Bogens AE, oder des Winkels ACE genennet werde. Wir werden aber in unserer Abhandlung dieses Wort nicht gebrauchen. Ferner können wir anmerken, daß EG, welche der Sinus ist des Bogens ED, die Helfte der Sehne EH sey, welche zu dem Bogen EDH gehöret, der doppelt so groß ist als ED. Denn weil die Sehne EH auf dem Halbmesser CD perpendicular steht, so ist so wohl $ED = DH$, als auch $EG = GH$. V, 19.

Tangenten.

F. 388. §. 47. So viel von der ersten Benennung, die man bey der vorhabenden Berechnung gebrauchet. Die zweyte Linie, welche hier einen besondern Namen bekommt, ist die Tangente. Man beschreibe wie der auf den Durchmesser AB, um den Mittelpunct C einen halben oder ganzen Cirkel, nehme in dessen Umkreis das Punct E nach Belieben, und ziehe durch dasselbe CE ohne Ende. Man ziehe eine andere gerade Linie FAG, welche den Cirkel in A berühret, und die erst gezogene CE in F schneide: welches V. 42. geschieht, wenn man auf AC durch das Punct A eine Perpendicularlinie ziehet, welches eben die verlangte FG seyn wird. Und damit die Figur, wie wir sie gebrauchen, gleich Anfangs vollkommen werde, so setze man auf CF die CG perpendicular, welche die Tangente in G, und den Umkreis in H schneiden wird. Auch ziehe man durch C den Radius CD auf AB perpendicular. So mißt der Bogen AE den Winkel ACE, und der Bogen AH mißt den Winkel ACH, welcher das Complement des erstern Winkels ECA zu einem rechten Winkel ist. Demnach ist auch der Bogen AH das Complement des Bogens AE zu einem Quadranten die AF nunmehr, welche den Circul in A berühret, und zwischen den Radius AC und der Linie CEF lieget, die den Bogen AE abschneidet; heißet die Tangente dieses Bogens AE, wie auch die Tangente des Winkels FCA, welchen die FC mit dem Radius AC machet. Und AG ist die Tangente des Winkels ACG, oder des Bogens AH, welcher auf der andern Seite auf eben die Art, vermittelst der CG, abgeschnitten wird.

§. 48. Weil der Bogen AH das Complement ist des Bogens AE, so kan man auch die Tangente AG, die Tangente des Complements des Bogens AE nennen, und die Tangente des Winkels ACG ist auch die Tangente des Complements des Winkels ECA. Und wiederum ist AF die Tangente des Complements des Bogens AH oder des Winkels ACG. Die Tangenten der Complementary werden auch Cotangenten genannt, und also ist AG die Cotangente von AE oder FCA; und AF ist die Cotangente des AH oder ACH.

XIV.
Schmitz.

§. 49. Man siehet hieraus so gleich, daß jederzeit der Radius die mittlere Proportionallinie sey zwischen der Tangente eines Winkels, und der Cotangente eben desselben Winkels. Denn es ist in dem Dreyeck FCG der Winkel FCG gerade, und aus dessen Spitze fällt CA auf die größte Seite FG perpendicular. Es ist aber VII, 78. erwiesen, daß in diesem Fall diese Proportion $FA:AC=AC:AG$ allezeit richtig, und also AC die mittlere Proportionallinie sey, zwischen AF und AG. Man gebe diesen Linien AF, AC, AG die Namen, welche wir eben erklärt haben, so hat man dasjenige, so wir angegeben.

§. 50. Das Dreyeck FAC ist ebenfalls bey A rechtwinklicht. Man kan auch in einem jeden rechtwinklichten Dreyeck, um C als den Mittelpunct, mit dem Radius CA, einen Bogen AE beschreiben, welcher den Winkel ACE messen wird. Und demnach kan man allezeit eine der Seiten, welche den rechten Winkel A in einem solchen Dreyeck einschließen, AC, vor den Radius annehmen, und es wird dadurch die andere Seite AF die Tangente des Winkels ACF, welcher ihr entgegen steht: oder die Tangente des Bogens AE, welcher diesen Winkel misst. Und ziehet man auf FC die CG perpendicular, und verlängert auch die Seite FA bis an diese Linie in G, so hat man auch die Tangente des Winkels F. Denn der Winkel ACG ist dem Winkel F gleich, weil so wohl $ACF+F$ als $ACF+ACG$ einen geraden Winkel ausmachet: also kan die Tangente des F von der Tangente des Winkels ACG nicht verschieden seyn, wenn man zu beeden einerley Halbmesser CA annimt.

§. 51. Hat man aber bey dem geradwinklichten Dreyeck DBC den Radius AC größer oder kleiner angenommen als die Seite BC, und so dann den Bogen AE, und FA die Tangente desselben und des Winkels C, beschrieben; so hat doch der Radius AC gegen die Tangente AF eben die Verhältniß, welche die Seite CB gegen die Seite BD

F. 389.

XIV BD hat, die dem Winkel C entgegen steht. Denn weil so wohl FA als DB auf BC perpendicular stehen, so ist allerdings $AC:AF=BC:BD$. VII, 12. Und wenn man zu einem andern Radius Ca, und zu dem Bogen ac, welcher eben den Winkel C misst, die Tangente af ziehet, so ist auch $aC:af=BC:BD$, und demnach $aC:af=AC:AF$, wie auch $aC:AC=af:AF$. Das ist, die Tangenten von einemley Winkel C, zu verschiedenen Halbmessern aC, AC verhalten sich gegen einander wie diese Halbmesser.

§. 52. Und weil auch BC sich zur BD verhält, wie der Cosinus des Winkels C zu seinem Sinus, XIV, 42. so kan man allzeitl sagen, wie der Cosinus eines Winkels C sich zu dem Sinus eben des Winkels C verhält; so verhält sich der Radius zu der Tangente eben des Winkels. Wenn man nemlich den Sinus des Winkels C nennet fC, stellet sich aber die Ergänzung dieses Winkels zu einem geraden Winkel unter cC vor, indem man nemlich das c vor das Wort Complementum setzet, und nennet also den Cosinus von C, scC, und den Radius r, und bezeichnet die Tangente eben des Winkels C mit tC: so ist $scC:fC=BC:BD$, aber auch $r:tC=BC:BD$, folgendes $scC:fC=r:tC$, und weil dieses überhaupt von einem jeden Winkel richtig ist, so kan man auch nur schreiben $sc:f=r:t$.

§. 53. Wir wollen ferner tcC die Cotangente des Winkels C bedeuten lassen, so haben wir gesehen, daß die Verhältniß $r:tC$ der Verhältniß $tcC:r$ gleich sey. Denn es ist $tC:r=r:tcC$, XIV, 49. folgendes umgekehrt $r:tC=tcC:r$. Setzet man diese Verhältniß an die Stelle der vorigen, so bekommet man $scC:fC=tcC:r$. Diese zwei Proportionen werden uns bey demjenigen, so künftig zu beweisen seyn wird, wohl zu statten kommen.

F. 390. §. 54. Noch müssen wir folgendes anmerken. Wenn zwey geradwinklichte Dreyecke ABC, DBC auf einer Grundlinie BC dergestalt stehen, daß ihre Seiten BA, BD in einem fort gehen, oder welches auf eben das hinaus kommt, wenn in dem Dreyeck ACD, die gerade Linie BC auf AD perpendicular steht: so verhält sich allzeit $AB:BD$, wie die Tangente des Winkels ACB, zur Tangente des Winkels BCD, wenn nemlich diese Tangenten zu gleichen Halbmessern gehören. Denn es ist $BC:AB=r:t.ACB$, oder $BC:r=AB:t.ACB$, und auch $BC:r=BD:t.BCD$, XIV, 51. Weil also die Halbmesser r einander gleich sind, so ist auch $AB:t.ACB=BD:t.BCD$, und $AB:BD=t.ACB:t.BCD$. Man siehet leicht daß eben dieses richtig sey, wenn der Winkel DCB an die andere Seite der BC in dCB fällt.

S. 55. Wenn der Bogen AE sehr klein ist, so ist auch seine Tangente AF sehr klein. Ja sie ist in diesem Fall von dem Bogen AE selbst gar nicht merklich verschieden. Sie kommt demnach auch mit dem Sinus dieses Bogens ohne merklichen Fehler überein. Wächst so dann der Bogen mit dem Winkel ECA, welchen er misst, so wächst auch die Tangente, und wird letztere, wenn der Bogen AE groß wird, gar groß. Wird AE ein Quadrant, und dem AD gleich, und kommt also CE in CD zu liegen, so endiget sich die Tangente niemals, oder das Punct F, welches es endigen sollte, ist nirgends anzutreffen. Denn dieses Punct ist allzeit da, wo die verlängerten AF und CE einander schneiden. Nun können AF und CD einander nicht schneiden, weil sie beyde auf der AC perpendicular stehen, und einander also parallel laufen.

XIV.
Abschnitt.
F. 388.

S. 56. Ist aber der Winkel grösser als ein gerader, so ist seine Tangente mit der Tangente seines Supplements zu zween geraden Winkeln einerley. Der Winkel ECB zum Exempel, kan keine andere Tangente haben, als die AF, welche auch die Tangente seines Supplements ECA ist. Wie wolte man sonst die Tangente dieses stumpfen Winkels ziehen? Also haben zween Winkel, die mit einander zween gerade Winkel ausmachen, und zween Bogen die zusammen einen halben Cirkel geben, gleiche Tangenten, gleichwie sie gleiche Sinus haben. Und eine jede Tangente gehöret zu zween Winkeln.

S. 57. Die Linie FC welche den Umkreis in E schneidet, und sich mit der Tangente in F endiget, heisset die schneidende Linie, Secans, des Bogens AE, oder des Winkels ECA. Wir werden aber diese Benennung nicht gebrauchen, und halten uns also auch dabey nicht auf, sondern gehen nunmehr zur Anwendung dieser Benennungen, und der kleinen Sätze, welche wir daraus gezogen haben, über.

Vorbereitung zur Berechnung der Sinus und Tangenten.

S. 58. Diese Anwendung bestehet in zweyerley. Wir haben zu wissen, wie die Sinus und Tangenten aller Bogen, von einer Minute bis auf neunzig Graden, in Zahlen zu finden: oder wie ihre Verhältniß gegen den Radius durch Zahlen auszudrücken sey, welche so wenig fehlen, als man zur genauesten Ausübung nur wünschen mag. Und wir haben zu lehren, wie die dergestalt durch Zahlen ausgedrückte Si-

B b b b

aus

XIV. **Abchnitt.** nus und Tangenten zu gebrauchen sind, um aus dreyen Theilen eines Dreyecks die drey übrigen zu berechnen. Es ist wahr, die Sinus und Tangenten sind längst berechnet, und wir haben uns hierinne keine weitere Mühe zu geben: allein man verstehet die Berechnung der Dreyecke ungemein besser, und verfähret bey derselben mit einer viel grössern Gewisheit, wenn man die Art eingesehen hat, wie die Sinus und Tangenten der Bogen heraus zu bringen sind, als wenn man dieselbe gänzlich auf Treu und Glauben anzunehmen gezwungen ist.

§. 59. Wir werden uns bey den Beweisen, die zu dem Ende zu geben sind, und überhaupt bey der Berechnung der Dreyecke, öfters auf einen Satz gründen, welcher bereits verschiedentlich von uns gebraucht worden ist, doch so, daß wir den Beweis desselben noch immer in das übrige eingewebet haben. A und B sind zwei beliebige Größen von einerley Art, und B ist grösser als A. Es kan erwiesen werden, daß die Größen B aus der halben Summe der Größen $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, und aus ihrem halben Unterschiede $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$ zusammen gesetzt sey, und daß die kleinere A übrig bleibe, wenn man von der halben Summe $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, den halben Unterschied $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$ abziehet. Man siehet dieses gar leicht ein. Denn setzet man $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$ zu $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$, so wird die Summe $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}B$, das ist, B, weil $-\frac{1}{2}A$ das $+\frac{1}{2}A$ aufhebet. Ziehet man aber den halben Unterschied $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$ von der halben Summe $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$ ab, welches geschieht, wenn man jenen zu dieser mit verwechselten Zeichen hinzu setzet, so erhält man $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, und dieses ist $= \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A = A$, weil das übrige einander wieder aufhebet.

§. 60. Ist demnach die halbe Summe zweier Größen gegeben, samt ihrem halben Unterschied, so kan man daraus die Größen leicht finden. Man setze den halben Unterschied zur halben Summe, so hat man das grössere; und man ziehe den halben Unterschied von der halben Summe ab, so hat man das kleinere. Wird man gefragt, was das vor Zahlen sind, deren halber Unterschied 3 und deren halbe Summe 7 ist, so ist die Antwort, die grössere dieser Zahlen sey $7 + 3 = 10$, und die kleinere $7 - 3 = 4$. Der Unterschied dieser Zahlen 10 und 4 ist 6, und also ihr halber Unterschied 3, und die Summe eben der Zahlen $10 + 4$ ist $= 14$, und ihre halbe Summe 7. Keine andere Zahlen haben diese Eigenschaften, als die zwei, welche dergestalt gefunden worden.

S. 61. Man siehet hieraus so gleich, daß hinwiederum die halbe Summe zweier Grössen $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$ komme, wenn man zu dem halben Unterschied derselben $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$ die kleinere A hinzusetzt. Denn es ist allerdings $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + A = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$. Eben so wird der halbe Unterschied heraus gebracht, wenn man von der halben Summe der Grössen $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$ die kleinere A abziehet, weil $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - A = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$.

S. 62. Wir können uns nunmehr zur Betrachtung der Figur wenden, auf welche wir das hauptsächlichste, so wir zu weisen vorhaben, gründen werden. ABC ist ein Quadrant, und in dem Bogen desselben, welcher in der 392 Zeichnung verlängert worden ist, sind die Punkte D und E nach Belieben angenommen worden. Man hat durch diese Punkte die Sehne DE gezogen, und beyderseits verlängert, bis sie die, nach Nothdurft, verlängerte Halbmesser CA, CB in F und G erreicht. Aus dem Mittelpunct C ist auf diese Sehne die CH perpendicular gezogen worden, welche dieselbe in I in zwei gleiche Theile DI=IE geschnitten, und den Bogen derselben DHE in H ebenfalls gleich getheilet hat. V, 19. Aus den Puncten D, H, I, E hat man auf den Halbmesser AC die Perpendicularlinien DK, HL, IM, EN fallen lassen; und durch die Puncte D und I sind DO und IQ mit eben der AC parallel gezogen worden. Die DO schneidet die IM in O, und IQ die EN in P, und die BC in Q. Ferner sind die Halbmesser CD und CE sichtlich gemacht. Durch diese Zeichnung sind die Dreyecke FIM, EIP, DIO, GIQ, HCL, ICM einander alle ähnlich worden. Denn daß FIM dem IDO ähnlich sey, siehet man daraus, weil DO der Seite FM des Dreyecks IFM parallel liegt. Und fast eben so leicht siehet man, daß IFM dem IEP, und IEP dem GIQ ähnlich sey. Es ist aber auch das Dreyeck FIC bey I rechtwinklicht, und aus I ist IM auf die größte Seite desselben perpendicular gefallen: demnach ist auch FIM dem ICM ähnlich, VII, 78. und daß ICM dem HCL ähnlich sey, siehet man gar leicht. Dieses aber sind die Dreyecke, deren Aehnlichkeit wir angegeben, alle. Es kommen noch mehrere ähnliche Dreyecke in der Figur vor, welche zu betrachten unser Zweck nicht erfordert. Dieses aber haben wir noch zu bemerken, daß weil die Dreyecke IDO, EIP ähnlich, und ihre Seiten DI, IE einander gleich sind; auch die übrigen Seiten einander gleich seyn müssen DO=IP, und IO=EP.

S. 63. Die bemerkten ähnlichen Dreyecke aber enthalten eine gute Anzahl Proportionen, welche meistens von Nutzen seyn können.

XIV. Wir wollen nur diejenigen anmerken, die wir nöthig haben, und die übrigen denjenigen überlassen, die sich ihrer in einer andern Absicht bedienen wollen. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke IFM, EIP folgt:

$$1) FI: IE = IM: EP,$$

und weil auch die Dreiecke GIQ, IDO ähnlich sind, so ist auch

$$2) IG: DI = IQ: DO.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ICM, HCL schließen wir

$$3) HC: IC = HL: IM, \text{ und}$$

$$4) HC: IC = CL: CM.$$

Und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke HCL, IDO.

$$5) HC: DI = HL: DO, \text{ und}$$

$$6) HC: DI = CL: IO.$$

Dieses ist zu unserm Zweck genug.

§. 64. Um nun diese Proportionen anzuwenden, müssen wir bemerken, daß wenn man den Bogen AD mit A, und den Bogen AE mit B bezeichnet: DE der Unterschied dieser Bogen $B - A$ seyn werde. Bezeichnen wir aber auch BD, das Complement des ersten Bogens AD mit cA, und BE, das Complement des zweiten B, oder auch den Ueberschuß desselben über einen Quadranten, nachdem er nemlich kleiner oder grösser ist als ein Quadrant, mit cB: so wird eben dieser Bogen DE auch $cA - cB$. Weil auch DE in H in zwey gleiche Theile getheilet wird, so ist $DH = HE = \frac{B - A}{2}$, und zugleich $= \frac{cA - cB}{2}$ in

der 391 Figur, und $\frac{cA + cB}{2}$ in der 392 Figur. Ferner ist der Bogen

AH, welcher aus dem kleinern AD und aus DH dem halben Unterschied der Bogen AD, AE zusammen gesetzt ist, die halbe Summe dieser Bogen AD und AE, XIV, 61. und folgendes $AH = \frac{A + B}{2}$.

Und aus eben der Ursache ist $BH = BE + EH = \frac{cB + cA}{2}$ in der 391

Figur: aber in der 392 Figur ist $BH = \frac{cA - cB}{2}$, weil dieser Bo-

gen übrig bleibt, wenn man von der halben Summe HE den kleinern Bogen BE wegnimmt. XIV, 61. Die Buchstaben A, B, cA, cB können auch die Winkel bedeuten, welche die Bogen messen, die wir mit diesen Buchstaben bezeichnet haben.

S. 65. Wenn wir nun wieder die Sinus dieser und dergleichen Bogen und Winkel dadurch ausdrücken, daß wir den Buchstaben, mit welchen wir die Winkel bezeichnen, ein s vorsetzen, so wird sA den Sinus des Bogens oder Winkels A , und sB den Sinus des Winkels oder Bogens B , ingleichen $sA+B$ den Sinus der halben

Summe der Bogen A und B , und $sB-A$ den Sinus des halben

Unterschiedes dieser Bogen bedeuten. Und da cA das Complement des Bogens oder Winkels A , und cB das Complement des Bogens oder Winkels B bedeutet: so kan wieder scA nichts anders, als den Sinus des Complements zu A oder den Cosinus von A , bedeuten. In eben dem Verstand ist scB zu nehmen, und so in allen ähnlichen Fällen. t sol nach eben den Umständen eine Tangente anzeigen, und also tA die Tangente des Bogens A und tcA die Tangente seines Complements. Den Radius oder größten Sinus wollen wir ferner mit einem R oder r ausdrücken.

S. 66. Nun ist DK der Sinus des Bogens DA , und KC ist der Cosinus desselben, also ist $DK=sA$, $KC=scA$. Ferner ist EN der Sinus des Bogens AE und NC ist sein Cosinus, also $EN=sB$, und $NC=scB$. Da auch $KD+IO+EP$ die EN giebet, so ist $IO+EP$ der Unterschied der Sinus DK und EN : und da diese Linien IO und EP einander gleich sind, so ist $IO=EP$ der halbe Unterschied derselben, oder $IO=EP=sB-sA$. Und weil IM aus dem Kleinern

dieser Sinus DK und aus deren halben Unterschied IO zusammen gesetzt werden kan: so ist diese IM die halbe Summe dieser Sinus, XIV, 61. das ist, $IM=sA+sB$. Weil aber auch $DO=IP$, und

folgende $KM=MN$, und weil in der 391 Figur $KN=KM+MN$ der ganze Unterschied der Cosinus CN und CK ist, so ist KM oder MN der halbe Unterschied derselben, und folgende $KM=DO=IP=MN=scA-scB$. Woraus man wieder leicht schliesset, daß $MC=IQ$

die halbe Summe dieser Sinus seyn müsse, oder daß $MC=IQ=sA+sB$. In der 392 Figur aber ist $KN=KC+CN$ die Summe

der Cosinus der Bogen AD und AE , und folgende, da auch hier $KM=MN$, so ist $KM=MN=DO=IP$, der halben Summe dieser Co-

XIV. $\sinus \text{fcA} + \text{fcB}$ gleich. Und weil in eben dieser Figur CM entster Abschnitt. het, indem man von der halben Summe der Cosinus MN den Kleinern CN wegnimmt, so ist $\text{MC} = \text{IQ} = \text{fcA} - \text{fcB}$.

§. 67. Ferner ist HL der Sinus der halben Summe der Bogen AE und AD, und also $\text{HL} = \text{fA} + \text{B}$, und LC ist der Cosinus dieser halben Summe der Bogen AE und AD, das ist, des Bogens AH, oder $\text{LC} = \text{fcA} + \text{B}$. Aber DI=IE ist der Sinus des Bogens DH, welcher der halbe Unterschied ist der Bogen AE und AD, folgendes $\text{DI} = \text{IE} = \text{fB} - \text{A}$. Endlich ist IC der Cosinus dieses Bogens DH, und also $\text{IC} = \text{fcB} - \text{A}$. Die Verhältniß aber FI:IE ist die Verhältniß der Tangente des Winkels FCI zu der Tangente des Winkels ICE, XIV, 54. oder die Verhältniß der Tangente des Bogens AH zur Tangente des Bogens HE, und weil $\text{AH} = \text{B} + \text{A}$, und $\text{HE} = \text{B} - \text{A}$, so ist $\text{FI} : \text{IE} = \text{tB} + \text{A} : \text{tB} - \text{A}$. Und eben so ist $\text{IG} : \text{ID} = \text{tHB} : \text{tDH} = \text{t cA} + \text{cB} : \text{t cA} - \text{cB}$ in der 391 Figur. In der 392 Figur aber ist $\text{IG} : \text{ID} = \text{tHB} : \text{tDH} = \text{t cA} - \text{cB} : \text{t cA} + \text{cB}$.

§. 68. Wenn wir nun diese Benennungen an die Stelle der Buchstaben in den Proportionen setzen, welche wir aus der gegenwärtigen Figur XIV, 63. gezogen haben; so wird die erste derselben $\text{FI} : \text{IE} = \text{IM} : \text{EP}$, dergestalt ausgedrucket:

$$\text{tB} + \text{A} : \text{tB} - \text{A} = \text{fB} + \text{fA} : \text{fB} - \text{fA} = \text{fB} + \text{fA} : \text{fB} - \text{fA}.$$

Und man kan also allezeit sagen: wie die Tangente der halben Summe zweyer Bogen oder Winkel, zu den Tangenten des halben Unterschiedes eben der Bogen oder Winkel: so die Summe der Sinus derselben Bogen oder Winkel, zu dem Unterschied dieser Sinus.

§. 69. Die andere Proportion XIV, 63. $\text{IG} : \text{ID} = \text{IQ} : \text{DO}$, wird auf gleichmäßige Art, in dem Fall, welchen die 391 Figur vorstellet, also ausgedrucket:

t cA

$$\frac{t c A + c B : t c A - c B}{f c A + f c B : f c A - f c B} = \frac{f c A + f c B : f c A - f c B}{f c A + f c B : f c A - f c B} \quad \text{XIV.}$$

Abſchnitt;

In der 392 Figur aber verwandelt ſich dieſe Proportion in die nachfolgende:

$$\frac{t c A - c B : t c A + c B}{f c A - f c B : f c A + f c B} = \frac{f c A - f c B : f c A + f c B}{f c A - f c B : f c A + f c B},$$

welche mit der vorigen auf eins hinaus kommt.

S. 70. Die dritte Proportion XIV, 63. $HC:IC = HL:IM$, wird unter eben dergleichen Benennungen dieſe:

$$r : f c B - A = f A + B : f A + f B, \text{ und die vierte } HC:IC = LC:MC, \text{ wird}$$

$$r : f c B - A = f c A + B : f c A + f c B.$$

Es verhält ſich nemlich der Radius zu dem Coſinus des halben Unterſchiedes zweyer Bogen B und A, wie ſich der Sinus der halben Summe derſelben zu der halben Summe der Sinus verhält. Ingleichen verhält ſich der Radius zu dem Coſinus des Unterſchieds zweyer Bogen, wie ſich der Coſinus der Summe derſelben zu der Summe ihrer Coſinus verhält. Dieſes iſt wieder in allen Fällen ſo.

S. 71. Auf eben die Art kan man auch bey der fünften und ſechſten Proportion XIV, 63. verfahren. Die fünfte war $HC:DI = HL:DO$. Schreibt man hier wieder vor HC, r, vor DI, $f B - A$, vor HL, $f B + A$, und vor DO, $f c A - f c B$ ſo wird dieſelbe:

$$r : f B - A = f B + A : f c A - f c B. \text{ Und die ſechſte Proportion } HC:$$

$DI = CL:IO$, wenn man auſſer den vorigen vor CL ſchreibt $f c B + A$ und vor IO, $f B - f A$, wird:

$$r : f B - A = f c B + A : f B - f A.$$

Dieſe Regeln ſind bloß aus der 391 Figur genommen, denn in der 392 Figur iſt $DO = f c B + f c A$. Indessen werden wir dieſe Propo-

tion nicht anders als auf dergleichen Fälle anwenden, welche die 391 Figur darſtellt, aus welcher ſie genommen worden; und wir finden alſo nicht nöthig uns hierbey aufzuhalten: ſondern wir wollen zeigen, wie vermittelt dieſer Regeln die Sinus aller Bogen zu finden ſind.

S. 72. Man

XIV. S. 72. Man kan sich darzu entweder der beyden mittlern oder Abschnitt. der beyden letztern Regeln bedienen. Uns scheinen die letztern die bequemsten, welche man auch dergestalt setzen kan, wenn man die zweyten und die letzten Glieder derselben verdoppelt:

$$r : 2fB - A = fB + A : fcA - fcB,$$

$$r : 2fB - A = fcB + A : fB - fA.$$

Berechnung der Sinus.

F. 393. S. 73. Es sey nunmehr der an den Mittelpunct C beschriebene Quadrant DL in eine beliebige Zahl gleicher Theile DE, EF, FG... HI, IK... getheilet, und eines dieser Theile sey die Einheit, vermittelst welcher man einen jeden andern Theil dieses Quadranten misst, so sich von D anfänget, und bis an eines der Theilungspuncte erstrecket, zum Exempel, DL. Es bedeute n die Zahl dieser Einheiten, so in dem Bogen Dt enthalten sind, welche n folgend die Größe des Bogens aus der angenommenen Einheit ausdrucket. Es sey aber DH ein anderer Bogen, welcher um ein Theilchen weniger hat als der vorige, so daß die Zahl aller Theile desselben $n-1$ ist. Dieser Bogen sey derjenige, welchen wir uns sonst in dieser Betrachtung unter A vorgestellt haben. B aber bedeute hier den Bogen DK, welcher um ein Theilchen mehr hat, als A, und welcher also durch die Zahl $n+1$ ausgedrucket wird. So ist die halbe Summe dieser Bogen $B+A = n+1+n-1 = n$. Und der halbe Unterschied derselben $B-A = n+1-n-1$ ist $= 1$. Die Verhältnisse aber, welche wir eben heraus gebracht haben, verwandeln sich unter diesen Benennungen in die nachfolgende:

$$r : 2f1 = fn : fc n-1 - fc n+1 \text{ und}$$

$$r : 2f1 = fc n : fn+1 - fn-1$$

S. 74. Vermittelst dieser Regeln findet man die Sinus und Cosinus aller Bogen, so aus Graden zusammen gesetzt sind, wenn nur erst der Sinus wie auch der Cosinus eines Bogens bekannt ist, der nur einen Grad hält. Und eben dieses erlanget man auch, wenn man die Bogen aus Minuten zusammen setzt: es muß aber hier der Sinus, wie auch der Cosinus einer Minute bekannt seyn. Man kan aber

aber den Sinus einer Minute leicht haben, nachdem der ganze Umkreis des Cirkels berechnet ist. Denn bey so kleinen Bogen ist der Sinus von dem Bogen ganz nicht merklich unterschieden. Und da wir also XIV, 22. gefunden, daß der Bogen von einer Minute 0,0002908882 hält, wenn der Radius 1 ist; so drückt eben diese Zahl auch den Sinus einer Minute aus. Wenn aber der Sinus bekannt ist, so ist auch der Cosinus leicht zu finden. Denn weil überall $R^2 = S^2 + C^2$, und folgendes $R^2 - S^2 = C^2$, XIV, 39. so bleibt das Quadrat des Cosinus übrig, wenn man von dem Quadrat des Halbmessers das Quadrat des Sinus abziehet, aus welchem man so dann den Cosinus selbst durch Ausziehung der Quadratwurzel erhalten kan. Verrichtet man diese Arbeit, so findet man den Cosinus von einer Minute, oder den Sinus von $89^\circ, 59' = 0,9999999577$.

§. 75. Nun kan man die Arbeit selbst anfangen, wenn man nur erst noch bemerkt, daß der Cosinus eines Bogens, welcher sich bey D anfängt und endiget, und welcher also eigentlich nichts ist, der Radius DC sey. Setzet man nun die Einheit, durch welche die Bogen von D an gemessen werden, sey eine Minute, und n bedeute ebenfalls Zahlen von Minuten, und lässet erstlich n diese Einheit bedeuten, welche wir uns unter dem Bogen DE vorstellen können, so wird die Regel:

$$r : 2 \sin 1 = \sin 1 : \sec 1 - \sec 1 \text{ und}$$

$$r : 2 \sin 1 = \sec 1 : \sin 2$$

Weil nun in diesen Proportionen die drey ersten Glieder bekannt sind, so findet man aus denselben den Sinus von 2, wie auch $\sec 1 - \sec 2$ oder $1 - \sec 2$; und wenn man dieses von dem Radius r abziehet: so bleibet $r - r + \sec 2 = \sec 2$, das ist, der Sinus des Complements zu zweyen Minuten, oder der Sinus zu $89^\circ, 58'$, übrig.

§. 76. Nun setze man zweyten $n = 2$, und stelle sich diesen Bogen, größerer Deutlichkeit halber, unter DF vor: so wird die Regel nunmehr:

$$r : 2 \sin 1 = \sin 2 : \sec 1 - \sec 3, \text{ und}$$

$$r : 2 \sin 1 = \sec 2 : \sin 3 - \sin 1.$$

Weil nun die drey ersten Glieder dieser Proportionen wieder bekannt sind, so findet man auch die vierten; und aus $\sec 1 - \sec 3$ erhält man $\sec 3$, wenn man $\sec 1 - \sec 3$ von $\sec 1$ abziehet: aus $\sin 3 - \sin 1$ aber wird $\sin 3$, wenn man demselben $\sin 1$ zusetzet.

Ecc cc

§. 77. Auf

XIV. §. 77. Auf eben die Art gehet man weiter. Man setze dreittens **Abchnitt.** π bedeute 3, und drücke also den Bogen DG aus: so werden die Regeln, vermittelst welcher der Sinus und Cosinus des Bogens 4 gefunden wird, diese:

$$s : \sin 1 = s_3 : s_4 - s_4$$

$$s : \sin 1 = s_4 : s_4 - s_4$$

Und dieses ist zu unserm Zweck hinlänglich: insonderheit da wohl schwerlich jemand eine neue Berechnung einer Tafel unternehmen wird, die bereits verfertigt ist, und es uns nur darum zu thun war, daß wir zeigten, wie sie habe verfertigt werden können.

§. 78. Wolte man die Sinus von Secunden zu Secunden oder wenigstens von zehn zu zehn Secunden haben, so könnte man zwar nach eben der Anweisung verfahren, und es könnte nicht schaden, wenn man es wirklich bey den erstern 1 oder 6 Graden thäte: überhaupt aber wäre es zu weitläufig. Man kan, wenn die Sinus der einzeln Minuten gefunden worden sind, hernach die Sinus der Secunden ohne merklichen Fehler, viel leichter haben, und wie dieses geschieht, ist noch zu weisen, weil in den gemeinen Tafeln die Sinus der Secunden nicht anzutreffen sind, und man sie doch öfters gebraucht; in welchem Fall man sie erst selbst berechnen muß. Es sey AB der Sinus des Bogens IA von einer beliebigen Zahl von Minuten, CD sey der Sinus des Bogens IC, von einer Zahl Minuten, die um eine grösser ist als die vorige, und der Bogen AC betrage also eine Minute: so kan man CE leicht haben, wenn man den Sinus AB von dem Sinus CD abziehet; und in guten Tafeln stehen gemeiniglich diese Unterschiede neben dem Sinus. Nun sey AF von einer beliebigen Zahl Secunden; zum Exempel von 17. Weil nun AC 60' beträgt, so sage man AC: AF = 60': 17' = CE: FG. Es wird dadurch FG gefunden, und wenn man diese FG zur AB = GH hinzusetzt, so bekommt man FH, den Sinus des Bogens IF, welcher um 17 Secunden grösser ist als IA. Denn wenn AC eine gerade Linie wäre, so wäre die Proportion AC: AF = CE: FG gewiß vollkommen richtig VII, 12. Nun ist AC von einer unmerklichen Krümme; da dieser Bogen nicht mehr als eine Minute hält; also kan auch diese Proportion, nicht merklich fehlen.

§. 79. Hat man nun den Cosinus, wie auch den Sinus eines Winkels, so findet man die Tangenten eben des Winkels, wenn man spricht, wie der Cosinus des Winkels zu seinem Sinus, so der Radius

dius zu der Tangente eben dieses Winkels XIV, 52. Diese Rechnung XIV. begreift man leicht, und wir haben uns also dabey nicht aufzuhalten. *Wichtig.*

§. 80. In den gemeinen Tafeln wird der Radius von 10000000 Theilchen genommen, und in solchen Theilchen werden die Sinus und Tangenten aller Winkel ausgedrückt. Man kan aber auch die letztern zwei Ziffer derselben weglassen, und also die Sinus und Tangenten aus einem Radius ausdrücken, welcher nur 100000 Theilchen hat, welches zu der gemeinen Ausübung überflüssig genug ist. Wer die Anleitung wohl verstehen wil, so wir nunmehr zu derselben geben wollen, muß sich mit solchen Tafeln oder dem so genannten Canone triangulorum, oder Canone sinuum & tangentium versehen.

§. 81. Allein, da die Sinus und Tangenten durch gar große Zahlen ausgedrückt werden, so würden sie in der Anwendung eine weitläufige und beschwerliche Rechnung geben, wenn man dieselbe wie vor dem geschehen müssen, unmittelbar gebrauchen wolte. Man ist derowegen bedacht gewesen diese Arbeit zu erleichtern, und dieses konnten die Logarithmen vollkommen leisten. Man hat derowegen die Logarithmen aller Zahlen gefunden, welche die Sinus und Tangenten ausdrücken, und dieselbe gehörig in Ordnung gebracht. Dieses kan auf eben die Weise geschehen, wie die Logarithmen anderer Zahlen gefunden worden.

§. 82. Dergleichen Tafeln sind gleichsam das Instrument, dessen man sich bey der Berechnung der Dreyecke bedienet. Wir können uns nunmehr wirklich zu denselben wenden. Es gründet sich alles auf gar wenige Sätze, welche wir wiederholen, und sodann zeigen wollen, wie sie auf die wirkliche Berechnung anzuwenden sind. Der erste dieser Sätze, und welcher am meisten gebraucht wird, ist nachfolgender.

Nähere Gründe zur Berechnung der Seiten und Winkel der Dreyecke.

§. 83. In einem jeden Dreyeck verhalten sich jede zwei Seiten gegen einander, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen stehen. Es sey das Dreyeck ABC, in welchem man zweyen Winkel A und B nach Belieben angenommen, so ist: $\sin A : \sin B = BC : AC$. Denn wenn man aus der Spitze des dritten Winkels C auf die ihm entgegen gesetzte Seite AB die gerade Linie *F. 395.*

Ecc cc 2

CD

XIV. CD perpendicular fallen läßt, so bekommt man dadurch zwey rechtwinkliche Dreyecke CAD, CBD, ausser wenn der Winkel bey B gerade ist, in welchem Fall CD mit der CB zusammen fällt. Es verhält sich aber, wie wir XIV, 42. gesehen, in einem jeden geradwinklichten Dreyeck die größte Seite zu einer der übrigen, wie der Radius oder der größte Sinus, zu dem Sinus des Winkels, welcher der letztern Seite entgegen steht. Also hat man in den zwey rechtwinklichten Dreyecken ABC, CDB, wenn R wieder den Radius bedeutet:

$$AC : CD = R : \sin A$$

$$CB : CD = R : \sin B, \text{ und folgendes VIII, 32. weil}$$

die mittlern Glieder dieser Proportionen gleich sind: $AC : CB = \sin B : \sin A$, oder verkehrt: $\sin A : \sin B = BC : AC$.

Bei rechtwinklichten Dreyecken aber kommt dieser Satz mit demjenigen überein, so hier zum Grunde geleyet wird; denn der Sinus des Winkels B ist der Radius, wenn B gerade ist, und es verwandelt sich also in diesem Fall die gegenwärtige Proportion in die folgende $AC : CB$, oder $CD = R : \sin A$, welche von der zum Grund gelegten Proportion nicht verschieden ist. Man siehet aus dem Beweis, daß auf die Größe des Winkels C nichts ankommt. Und solte man bey den stumpfen Winkel B noch einigen Zweifel haben, so hat man sich nur zu erinnern, daß zwey Winkel die neben einander auf einer geraden Linie stehen, gleiche Sinus haben XIV, 44.

S. 84. Aus dieser Proportion $AC : CB = \sin B : \sin A$ folgern wir, wie allzeit geschehen kan VI, 92. $AC + CB : AC - CB = \sin B + \sin A : \sin B - \sin A$. Nun haben wir XIV, 68. gesehen, daß die Verhältniß $\sin B + \sin A : \sin B - \sin A$ der Verhältniß $t. B + A : t. B - A$ gleich sey. Man wird

also diese Verhältniß vor jene setzen, und also schließen können: $AC + CB : AC - CB = t. B + A : t. B - A$. Es verhält sich nemlich in

einem jeden Dreyeck die Summe zweyer Seiten $AC + CB$ zu ihrem Unterschied $AC - CB$, wie die Tangente der halben Summe der Winkel A und B, deren keiner zwischen diesen Seiten liegt, zu der Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel. Der Winkel C liegt zwischen den zwey erwähnten Seiten, und dessen wird in der gegebenen Proportion nicht erwähnt.

S. 85. Diese zwey Sätze sind zur Auflösung aller der Aufgaben hinlänglich, bey welchen unter den Theilen der Dreyecke, welche gegeben

geben sind, wenigstens ein Winkel vorkommet. Nur muß man sich XIV. dessen erinnern, daß in einem jeden Dreyeck, wenn zweyen Winkel bekannt sind, auch der dritte nicht unbekannt seyn könne. Denn man kan ihn allezeit finden, wenn man die Summe der zwey bekannten Winkel von zweyen geraden Winkeln abziehet IV, 229. welches durch Zahlen geschieht, wenn man die Summe der Maaße zweyer Winkel, von dem Maaße zweyer geraden, oder von 180 wegnimmt. Es sey F. 396. der Winkel A des Dreyecks $ABC = 65, 30$ und B enthalte $59, 26$, so ist die Summe dieser Maaße $= 124, 56$. Dieses von 180 , das ist, von $179, 60$ abgezogen läßt $55, 16$; und dieses ist das Maaß des Winkels C. Aus eben dem Grund, und auf eben die Art wird auch die Summe der zwey übrigen Winkel eines Dreyecks gefunden, wenn ein Winkel dieses Dreyecks bekannt ist. Es sey in dem Dreyeck ABC der Winkel C bekannt, und sein Maaß sey $55, 16$. Man ziehe dieses von 180 , oder welches eben so viel ist, $179, 60$ ab; so bleibt $124, 56$. Dieses ist die Summe der beyden Winkel $A+B$, und die Hälfte ihrer Summe ist demnach $62, 28$.

§. 86. Es können bey den Dreyecken, deren Berechnung wir nunmehr ohne weitem Anstand geben können, nachfolgende Aufgaben vorkommen, welche darinnen verschieden sind, daß immer andere und andere Theile derselben gegeben werden. Drey Theile eines Dreyecks müssen gegeben seyn, und wir haben zu weisen, wie aus denselben alle übrige Theile dieser Figuren zu berechnen sind, aber unter den gegebenen Theilen muß wenigstens eine Seite vorkommen XIV, 36. Ist nun nur eine Seite des Dreyecks gegeben, so müssen zweyen Winkel desselben gegeben seyn, sonst hätte man nicht drey bekannte Theile. Allein zweyen Winkel eines Dreyecks geben auch den dritten, und man siehet also, daß wenn eine Seite des Dreyecks bekannt ist, alle drey Winkel desselben bekannt seyn müssen. Und demnach lieget die bekannte Seite in Ansehung der bekannten Winkel in diesem Fall immer auf einerley Art. Sie lieget immer zwischen bekannten Winkeln, und ist einem bekannten Winkel entgegen gesetzt.

§. 87. Sind aber zwey Seiten in einem Dreyeck bekannt, so darf nur ein Winkel bekannt seyn. Dieser Winkel lieget nun entweder zwischen den bekannten Seiten, oder er ist einer derselben entgegen gesetzt. Und man hat also hier zwey verschiedene Fälle, deren Auflösungen besonders zu weisen sind. Es seyen in dem Dreyeck ABC die

Ecc c c 3

zwo

XIV. wo Seiten AC und AB gegeben, so ist außer denselben entweder der Winkel A bekannt, welcher zwischen AC und AB liegt, oder B, welcher der AC entgegen steht. Denn wenn man vor B den Winkel C als bekannt annehmen wil, so hat man eben das. Der Winkel C ist so wohl einer bekannten Seite AB entgegen gesetzt, als der Winkel B der bekannten Seite AC entgegen steht.

§. 88. Endlich können in einem Dreyeck alle drey Seiten gegeben seyn. Ein jeder Winkel desselben lieget in diesem Fall zwischen bekannten Seiten, und ist einer bekannten Seite entgegen gesetzt, und man kan sich also wieder bey dieser Aufgabe keine Fälle, die in der Auflösung von einander unterschieden wären, vorstellen. Bey allen diesen Umständen, sind alle Winkel der Dreyecke, und alle Seiten, die nicht gegeben werden, durch die Rechnung heraus zu bringen.

Wirkliche Berechnung der Dreyecke.

§. 89. Ist in einem Dreyeck eine Seite samt zweyen, das ist wie wir XIV, 86. gesehen, allen dreyen Winkeln, gegeben: so bleibt nichts zu suchen übrig, als die übrigen Seiten. Diese aber findet man vermittelst des einzigen Satzes von der Proportion der Sinus zweyer Winkel zu den ihnen entgegen gesetzten Seiten XIV, 83. Setzt AB sey die gegebene Seite, so sage man:

$$\sin C : \sin A = AB : CB \text{ und}$$

$$\sin C : \sin B = AB : AC.$$

Weil nun die Winkel alle bekannt, und ihre Sinus aus den Tafeln zu haben sind, so kan man vermittelst dieser Proportionen beyde Seiten CB und AC finden.

§. 90. Es sey der Winkel C von $55^{\circ} 16'$ so ist der Logarithmus seines Sinus aus der Tafel = 9,9142464, und wenn der Winkel A $65^{\circ} 36'$ hält, so ist der Logarithmus seines Sinus = 9,9590229. Wenn nun AB nach einem beliebigen Maassstab 57,32 Theilchen hat,

von welcher Zahl der Logarithmus 3,7583062 ist, so ist $CB = \frac{\sin A}{\sin C} \times$

AB, folgendes XIII, 160 $\log A + \log AB - \log C = \log CB$. Die Rechnung selbst aber vermittelst welcher $\log CB$ gefunden wird, steht also:

$$\log C = 9,9142464$$

$$\log A = 9,9590229$$

$$\log AB = 3,7583062$$

$$\hline 13,7473291$$

$$3,8030827$$

} subtr.

Reben

Neben diesem Logarithmus steht in der Tafel die Zahl 6345, und demnach hält CB 63, 545 Theilchen, dergleichen AB 57, 32 enthält. XIV. Wissniss.

S. 91. Sind in einem Dreyeck zwei Seiten gegeben und nur ein Winkel, so muß man allzeit die übrigen Winkel finden, ehe man weiter gehen kan. Man darf zu dem Ende nur einen der übrigen Winkel finden, so hat man den dritten. Es liegt aber der gegebene Winkel entweder zwischen den gegebenen Seiten oder nicht. Der letztere Fall ist etwas leichter aufzulösen und wir wollen also von demselben anfangen.

S. 92. Es sey in dem Dreyeck ABC der Winkel A wie auch die Seite AB und BC gegeben, und A sey von $65^{\circ} 30'$ $AB = 57,32$ und $BC = 63,545$, so findet man den Sinus des Winkels C wenn man schliesst: $CB : AB = \sin A : \sin C$, und es ist also der Logarithmus des Sinus dieses Winkels, oder $\sin C = \sin A + \log AB - \log CB$. Setzet man nun wieder wie vorher:

$$\begin{array}{r} \log CB = 3,8030827 \\ \log AB = 3,7583062 \\ \log \sin A = 9,9590229 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{add.} \\ \text{subtr.} \end{array}$$

$$\hline 13,7173291$$

so ist $\sin C = 9,9142464$, und schlägt man denselben unter den Logarithmen der Sinus auf, so steht der Winkel $55^{\circ} 10'$ darneben. Ist nun der Winkel C dergestalt gefunden worden, und A vorher bekannt gewesen; so findet man auch den dritten Winkel B, wie gewiesen worden ist.

S. 93. Wir haben hier BC grösser angenommen als AB, in welchem Fall nur ein Dreyeck aus den Seiten AB, BC und aus dem Winkel A beschrieben werden kan. IV, 256. Der Winkel C ist in diesem Fall allzeit spitzig. Denn wenn A gerade oder stumpf ist, so ist C nothwendig spitzig. Ist aber A spitzig, so ist doch C kleiner als A, weil die Seite AB die dem Winkel C entgegen steht, kleiner ist, als die Seite BC, die dem Winkel A entgegen steht: IV, 240. also ist C auch nummehro spitzig. Und man findet also bey dem Umstand, wenn $BC > AB$, den Winkel C allzeit aus den Tafeln unmittelbar. Denn in denselben stehen neben denen Sinus allzeit die spitzigen Winkel, zu welchen sie gehören.

S. 94. Ist aber wieder der Winkel A unsant den Seiten AB und BC. P. 397.

XIV. BC gegeben, und ist AB größer als BC: so kan man aus dem Winkel ~~Winkel~~ A, und aus den Seiten AB und BC nicht allein das Dreieck AEC, sondern auch ein anders ABD verfertigen: IV, 254. Und der Winkel C des erstern ist das Supplement des Winkels D des Dreiecks ADB. Denn das Dreieck BDC ist gleichschenkligh, weil $BC = BD$, und also ist der Winkel DCB dem Winkel BDC gleich. Nun ist $BCD + BCA$ ohnstreitig zweyen geraden Winkeln gleich, also giebt auch C mit BDA eine Summe, die zweyen geraden Winkeln gleich ist. Wenn man also den Winkel C oder D eines solchen Dreiecks berechnen sol, so muß man zum voraus wissen, ob er spitzig oder stumpf sey. Ausser dem kan man von demselben nichts gewisses sagen. Man kan seinen Sinus wie vorher finden, aber ein jeder Sinus gehöret zu zweyn Winkeln, die mit einander zweyen gerade Winkel ausmachen, dergleichen die Winkel D und C sind. In diesem Fall ist also nichts übrig, als daß man die Winkel alle beyde berechne.

S. 95. Es sey $A = 32^\circ, 14'$, und also $\angle A = 9.7270273$, CB sey von 10,00 und AB enthalte solcher Theile 15, 15. Wenn man nun auch hier schließet:

$$BC:AB = \angle A:\angle C \text{ (oder } \angle D)$$

und rechnet wie vor:

$$\angle BC = 3.0000000$$

$$\angle AB = 3.18041262$$

$$\angle A = 9.7270273$$

$$\underline{12.9074399}$$

add. } subtr.

so ist $\angle C = 9.9074399$, welcher so wohl zu dem Winkel C als D gehöret. Der spitzige Winkel dieses Sinus ist $53^\circ, 54'$, und der stumpfe bleibt übrig, wenn man den spitzigen von 180° abziehet. Demnach ist der Winkel $D = 53^\circ, 54'$, und $\angle CBA = 126^\circ, 6'$. Und hieraus findet man den Winkel $CBA = 21^\circ, 40'$, und den Winkel $DBA = 93^\circ, 52'$.

S. 96. Hat man dergestalt die Winkel eines Dreiecks alle berechnet, so wird die dritte Seite nach der vorigen Aufgabe gefunden. Ist man nicht vermögend gewesen den Winkel bey B ganz und gar zu bestimmen, wie dieses in dem Fall der 397 Figur vorkommet, so kan auch die demselben entgegen gesetzte Seite nicht vollkommen bestimmt werden. Das einzige, so man thun kan, ist, daß man so wohl die Seite AD aus dem Winkel ABD und den übrigen, als auch die Seite AC aus dem Winkel ABC und den übrigen, berechne: So wohl die

Die eine als die andere dieser Seiten kan bey der gegebenen Größe des Winkels A, und der Seiten AB, BC statt haben, und dieses weist die Rechnung. Es steht aber in derselben Gewalt nicht zu wissen, welche von den beyden Seiten AD, AC in dem Dreyeck wirklich vorkomme, welches man aus dem gegebenen Winkel A, und den zwey Seiten AB, BC = BD zusammen gesetzt hat. Man muß also in der Anwendung sich um andere Merkmale bekümmern, aus welchen man schliessen kan, ob ein Dreyeck, welches vor uns lieget, von der Beschaffenheit des ACB oder des ADB sey, das ist, ob der Winkel desselben, welcher der Seite AB entgegen steht, spitzig oder stumpf sey. Dieses ist selten etwas schweres, und das Augenmaß ist meistens hinlänglich, es uns zu zeigen.

S. 97. Ist aber der Winkel C gegeben, welcher zwischen zwey bekannten Seiten AC und BC lieget, und sind die übrigen Winkel des Dreyecks A und B zu finden; so müssen die zwey Seiten AC, CB ungleich seyn. Denn wenn sie gleich wären, und wäre also das Dreyeck gleichschentlicht, so brauchte man die übrigen Winkel nicht weiterläufig zu suchen: weil in einem gleichschentlichten Dreyeck alle Winkel gegeben sind, so bald deren einer bekannt ist. IV, 233. Sind nun aber die Seiten ungleich, so ist der gegebene Winkel C entweder gerade, wie in der 398 Figur, oder nicht. In dem ersten Falle findet man den Winkel A leicht aus der Proportion die unter den ersten XIV, 51. da gewesen ist

$$AC : CB = R : \tan A$$

Es sey CA von 87, 32 und CB von 52, 70 Theilen, so wird weil R allzeit 10.0000000 ist, die Rechnung also stehen:

$$\begin{array}{r} 1. AC = 3.9411137 \\ 1. CB = 3.7218106 \\ 1. R = 10.0000000 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{add.} \\ \text{subtr.} \end{array} \right\}$$

$$13.7218106$$

$$\tan A = 9.7806969$$

und wenn man diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten auffuchet, so findet man das Maas des Winkels A, nemlich 31°, 6' und einige Secunden, darneben.

S. 98. Ist aber der Winkel C schief, er mag übrigens spitzig oder stumpf seyn: so kan man doch, wie XIV, 85. gewiesen worden ist, die Summe der übrigen Winkel A+B, und die halbe Summe $\frac{A+B}{2}$

finden,

finden,

XIV. finden, und den Logarithmus der Tangente derselben $\frac{A+B}{2}$

aus den Tafeln nehmen. Nun ist auch: XIV, 84.

$$AC+CB:CB-CA::\frac{A+B}{2}:\frac{A-B}{2}$$

Da nun also AC, CB, und folgendes auch $\frac{A+B}{2}$, $\frac{A-B}{2}$ ebenfalls bekannt sind, so findet man, vermittelst der Tafel 1, $\frac{A-B}{2}$:

und schlägt man diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten in der Tafel nach, so stehet das Maas von $\frac{A-B}{2}$ darneben.

Also hat man die halbe Summe der zwey gesuchten Winkel $\frac{A+B}{2}$,

und ihren halben Unterschied $\frac{A-B}{2}$. Hieraus aber kan man den grössern Winkel durch die Addition, und den Kleinern durch die Subtraction finden. XIV, 52.

S. 99. Es sey $C=58^{\circ}10'$; so ist $A+B=180^{\circ}-58^{\circ}10'=121^{\circ}50'$ und folgendes $\frac{A+B}{2}=60^{\circ}55'$. Der Logarithmus der Tangente dieses

Wogens, oder 1, $\frac{A+B}{2}$ ist = 10,2819827. Es sey $AC=60,06$ und = 62,53, in welchem Fall der Winkel A grösser ist als B, weil ihm die grössere Seite entgegen stehet, so ist $CB+AC=122,59$ und $CB-AC=2,47$; folgendes:

$$\begin{array}{r} 1. CB+CA= 4,0884550 \\ 1. CB-CA= 2,3926970 \\ 1. A+B= 10,2819827 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{add.} \\ \text{subtr.} \end{array} \right\} \begin{array}{r} 12,6746797 \\ 8,6862247 \end{array}$$

Dem diesem Logarithmus stehet in der Tafel der Logarithmen der Tangenten, der Wogen $2^{\circ}46'$, welcher folgendes das Maas ist des Winkels $A-B$. Und also ist der Winkel $A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}=62^{\circ}25'+$

$2^{\circ}46'$

$2, 46 = 65, 11$, und der Winkel $B = A + B - A - B = 62, 25 = 2, 46$ XIV.

$= 59, 39$. Hat man dergestalt wieder alle Winkel des Dreiecks ABC, so ist es leicht die übrige Seite AB zu finden.

§. 100. Nun ist nichts übrig, als daß wir weisen wie aus dreien Seiten eines Dreiecks seine Winkel zu finden sind. Es müssen diese Seiten alle ungleich seyn, wenn die Sache einige Schwierigkeit haben sol. Denn wenn das Dreieck ABC dessen drey Seiten gegeben sind, gleichschenkligh ist, und man ziehet auf die Grundlinie desselben BC durch die Spitze A die Perpendicularlinie CD, welche BC in zwey gleiche Theile theilen wird: so ist DB, die Hälfte von BC, gegeben, weil BC gegeben ist, und man kan XIV, 92. in dem Dreieck ADB, dessen Winkel D gerade, und folgendes bekant ist, und dessen Seiten AB, BD gegeben sind, den Winkel BAD, und folgendes auch den Winkel B finden. Hat man aber einen Winkel eines gleichschenklighen Dreiecks, so hat man auch alle übrige.

§. 101. Sind aber die drey Seiten eines Dreiecks ABC alle ungleich, und ist BC die größte, AB die mittlere, und AC die kleinste dieser Seiten, so beschreibe man um die Spitze des Winkels A, welcher der größten Seite BC entgegen gesetzt ist, durch C den Eirkelkreis DEF, welcher die größte Seite in E, and die mittlere in F schneiden wird, und verlängere BA bis an den Umkreis in D, so ist $AD = AF = AC$, und $BD = BA + AD$ ist die Summe der zwo kleinern Seiten des Dreiecks, BF aber $= BA - AC$ ist der Unterschied dieser zwo Seiten: folgendes sind diese Linien BD und BF beyde gegeben. Nun aber ist, wie an seinem Orte VII, 70. erwiesen worden, $BC : BD = BF : BE$. Da nun die drey ersten Glieder dieser Proportion bekant sind, so kan man das vierte finden. Dadurch wird BE bekant, und wenn man BE von BC abziehet, so bekommt man auch EC. Nun ziehe man AE, so ist das Dreieck AEC gleichschenkligh, und man hat dessen Seiten $AC = AE$ und EB. Es kan also der Winkel ACE, wie gewiesen worden, gefunden werden. Man ziehe nemlich AG auf EC perpendicular, so ist $GC = \frac{1}{2} EC$, und folgendes bekant. Nun sage man $AC : GC = R : \sin GAC$, so findet man den Winkel GAC, und sein Complement ACB kan also nicht unbekant seyn. Auf eben die Art findet man aus AB und BG den Winkel B: man kan ihn aber auch, nach dem C bekant ist, nach der oben gegebenen Anweisung finden. XIV, 92.

XIV. §. 102. Dasjenige so von den gemeinen Dreyecken gewiesen worden ist, wird auch bey den dreyseitigen Ecken, oder den so genannten sphärischen Dreyecken aufgegeben, und nichts hat in der Sternkunst einen größern Nutzen, als daß man aus drey Theilen einer solchen Ecke, die drey übrigen Theile zu finden wisse. Wir nennen die Theile einer solchen Ecke wieder die drey Seiten derselben und ihre Winkel. Und zwar mögen hier die Theile gegeben seyn wie sie wollen. Denn es werden aus den Winkeln einer dreyseitigen Ecke ihre Seiten so wohl bestimmet, als sich aus den schicklich angenommenen Seiten ihre Winkel geben; wie wir gesehen, als wir diese Ecken betrachtet haben. XII, 71.

Vorbereitung zur Erfindung der Regeln, nach welchen die dreyseitigen Ecken zu berechnen sind.

§. 103. Die Regeln nach welchen diese Auflösungen geschehen, fließen aus den Regeln vor die gemeinen Dreyecke gar leicht, wenn man sich nur die Sache geschickt vorstellt. Vors erste müssen die Regeln ausföndig gemacht werden, nach welchen sich die geradewinklichten Ecken auflösen lassen; so dann aber diejenigen, welche vor die schiefwinklichten Ecken von dreyen Seiten gelten.

F. 401. §. 104. Es kan aber die Hypotenuse einer dreyseitigen Ecke, die einen geraden Winkel hat, entweder spitzig oder stumpf seyn. Den ersten Fall stellet die 401 Figur vor, da die Ebene NRr auf der RMr perpendicular stehet, und mit dieser bey R, r gerade Winkel einschliesset; und NCM die Hypotenuse vorstelllet, welche den zwo dreyseitigen Ecken $NCMR$ und $NCMr$ gemeinschaftlich ist. In diesem Fall sind die beyden Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, entweder beyde spitzig wie NCR und MCR , oder sie sind beyde stumpf wie NCr und MCr . XII, 89. Und zwar sind die Seiten des Dreyecks $NCMR$ die Ergänzungen der Seiten des Dreyecks $NCMr$ zu zween geraden Winkeln, oder zu 180° . Die Winkel aber bey N und M sind in der Ecke $NCMR$ ebenfalls spitzig; in der Ecke $NCMr$ aber sind diese Winkel stumpf: XII, 82. und es ergänzet der Winkel bey M der Ecke $NCMR$ den Winkel bey M der nebenstehenden Ecke $NCMr$; und der Winkel bey N der erstern Ecke $NCMR$ ergänzet den Winkel bey N der zweyten $NCMr$ zu zweyen geraden Winkeln. Demnach haben so wohl die Seiten dieser zwo Ecken, welche auf einerley Art liegen NCR und NCr , wie auch MCR und MCr einerley Sinus und Tangenten; als

als auch die Winkel der beyden Ecken bey M und N : und da also die XIV. Hypotenuse NCM den beyden Ecken gemeinschaftlich, und die Winkel R, r beyderseits gerade sind, so kan man nicht anders, man muß die Sinus und Tangenten der Seiten und Winkel der Ecke NCMR, deren Seiten und Winkel spitzig sind nehmen, wenn man die Sinus und Tangenten der Seiten und Winkel in der Ecke NCMr anzeigen wil. XIV, 44, 56. Und wenn man also die Ecke NCMR berechnet, und aus drey Theilen derselben die übrigen findet, so thut man in der That eben dieses auch mit der Ecke NCMr. Es kan die eine nicht ohne die andere berechnet werden: und wenn wir demnach zeigen, wie bey der Ecke NCMR zu verfahren sey, wenn man aus drey Theilen derselben die übrigen finden wil, so wird eben dadurch auch gewiesen, wie die Ecke NCMr zu berechnen ist.

S. 105. Die andere Art einer geradwinklichten dreyseitigen Ecke, deren Hypotenuse stumpf ist, ist in der 402 Figur gezeichnet. In derselben muß man sich NRC auf MRm perpendicular vorstellen; wodurch die Winkel bey R beyde gerade werden. Die Fläche MNm aber machet mit der Fläche MRm einen spitzigen Winkel, den wir mit M und m bezeichnen. Dadurch wird auch die diesem Winkel M oder m entgegen gesetzte Seite NCR spitzig. XII, 82. Hat man nun RCM mit Fleiß stumpf angenommen, so ist auch die Seite NCM stumpf. Denn diese Seite stehet in der dreyseitigen Ecke NCRM dem geraden Winkel R entgegen, und ist folgendes die Hypotenuse, welche stumpf seyn muß, weil eine von den Seiten, die den geraden Winkel R einschließen, nemlich NCR spitzig ist, und die andere RCM stumpf. XII, 82. Man siehet aber auch hier leicht, daß die fortgeführten Seiten dieser Ecke NCRM eine andere dergleichen Ecke NCRM machen, welche die Seite NCR; wie auch den Winkel M = m mit der vorigen NCRM gemeinschaftlich hat, und deren übrige Seiten und Winkel, die Seiten und Winkel der vorigen zu 180 ergänzen. Denn die Seite NCM ergänzt augenscheinlich die Seite NCM zu zweyen geraden Winkeln, und MCR thut eben das in Ansehung der RCM. Die zweyen Winkel bey N aber machen zusammen gesetzt ebenfalls zweyen gerade Winkel. Also haben wieder die Seiten und Winkel der dreyseitigen Ecken NCRM und NCRM, welche an einander liegen, gleiche Sinus und Tangenten: und wenn das eine dieser Dreyecke berechnet wird, so wird das andere zugleich berechnet; weil so wohl die als bekannt angenommen, als auch die gesuchten, Sinus und Tangenten, sich vor die

XIV. Eine Ecke so wohl als für die andere schicken. Wir haben uns also wieder bey der Ecke NCRM nicht aufzuhalten, sondern nur zu zeigen, wie die Ecke NCRM zu berechnen sey, in welcher so wohl die Seiten NCM, MCR, NCR als auch die den zwey letztern bey N und M entgegen gesetzte Winkel spitzig sind.

§. 106. Es kan uns dabey nicht aufhalten, daß es geradwinklichte Ecken gebe, bey welchen auch eine Seite einen rechten Winkel hält, oder bey welchen ausser dem bey R noch ein gerader Winkel anzutreffen ist. Denn man kan überhaupt einen geraden Winkel als den grössten unter allen spitzigen, oder als den kleinsten unter allen stumpfen Winkeln betrachten, und unter dieser Benennung und den Einschränkungen, welche dieselbe an die Hand giebet, hernach dasjenige auf ihn anwenden, was von den spitzigen oder stumpfen Winkeln erwiesen wird.

F. 401. §. 107. Damit wir nun die Regeln heraus bringen, welche wir
402. suchen, und welche uns anleiten sollen, aus jeden drey Theilen einer geradwinklichten dreyseitigen Ecke, den vierten Theil zu finden: so stelle man sich vor, daß man in den beyden letztern Figuren eine vierte Fläche NRM dergestalt geleyet habe, daß die gerade Linie CM auf derselben perpendicular stehe; und daß diese Fläche von den drey Seiten der Ecke NCRM geschnitten, und durch diese Schnitte das Dreyeck NMR hervor gebracht werde. So sind die Winkel CMR, CMN beyde gerade, weil die Linie CM, die auf der Fläche NMR perpendicular steht, mit allen Linien in dieser Fläche, die durch M gehen, gerade Winkel macht; X, 30. und der Winkel NMR misst also die Neigung der Fläche NMC auf die Fläche MCR; und ist dem Winkel M der dreyseitigen Ecke NCMR gleich. X, 42. Ausser dem aber ist die Fläche CMR auf die Fläche NMR perpendicular, weil sie durch die Linie CM geht, die auf NMR perpendicular ist; X, 47. und also steht hinwiederum NMR auf CMR gerade. Da nun aber auch die Fläche NCR auf eben der CMR gerade steht, und diese Flächen NRM, NRC einander in NR schneiden; so ist auch diese Linie NR auf die Fläche MCR perpendicular, X, 49. und der Winkel NRM in dem Dreyeck NRM, ist so wohl als der Winkel NRC, gerade. X, 30.

§. 108. Wir haben also durch diesen Schnitt, vermittelst der Fläche NMR die Seiten der geradwinklichten dreyseitigen Ecke NCRM alle zu geradwinklichten Dreyecken gemacht, und über dieses das vierte geradwinklichte Dreyeck NMR erhalten, dessen Winkel NMR dem Win-

Winkel der Ecke M gleich ist, ob zwar der Winkel MNR des Dre-
ecks, von dem Winkel N der dreyseitigen Ecke verschieden ist; weil NC
auf NR und NM schief steht. Wir können also nunmehr zu desto
größerer Deutlichkeit die Seiten einer solchen Ecke neben einander in
eine Ebene legen. Und dieses zwar folgender gestalt. Wobey man
allzeit die mit einerley Buchstaben bezeichnete Linien und Winkel sich
das erste mal in der 403, und das zweyte mal in der 401 oder 402
Zeichnung, vorstellen muß. Man ziehe MC und mache sie der MC
gleich. Durch M ziehe man auf MC die Linie NR perpendicular, und
mache $MN = MN$ und $MR = MR$; so kan man von N und R nach
C die Linien NC und RC ziehen, wodurch das geradwinklichte Dre-
eck NCM der Seite NCM, und das ebenfals geradwinklichte Dre-
eck MCR der Seite MCR gleich und ähnlich wird. Demnach ist der
Winkel NCM der Seite NCM, und der Winkel MRC der Seite
MCR gleich, aber auch $NC = NC$ und $RC = RC$. Es ist aber NCM
in den beyden dreyseitigen Ecken die Hypotenuse, weswegen wir diesen
Winkel mit einem H bezeichnet haben.

§. 109. Man setze auf die CR die RN perpendicular, mache sie
der RN gleich, und ziehe NC, so ist wieder das rechtwinklichte Dre-
eck RCN der Seite RCN gleich, und folgender der Winkel RCN
gleich dem Winkel RCN; aber auch $NC = NC$. Diese NC kommt
in unserer 403 Figur nochmals vor, weil die einzige NC in der dreys-
seitigen Ecke NRCM zu zwey Seiten gehört, nemlich zu NCM und
NCR, welche in der gegenwärtigen Figur von einander abgesondert
werden müssen. Die Winkel MCR, RCN sind diejenigen, deren Glä-
chen in der dreyseitigen Ecke den geraden Winkel R einschließen. Man
kan eine derselben, welche man wil vor die Grundseite annehmen, so ist
die andere die Perpendicularseite. In unsern Figuren stellet MCR die
Grundseite, und NCR die Perpendicularseite vor, deswegen ist MCR
mit B, und NCR mit P bezeichnet. Man kan also diese Benennun-
gen nach Belieben verwechseln; allein weil wir in den Figuren den
Winkel an der Grundseite mit M, und den Winkel an der Perpen-
dicularseite mit N bezeichnet haben; so muß man diese Benennungen
zugleich verwechseln, wenn man jene verwechselt: das ist, so bald
man die Seite P, die man vorher als die Perpendicularseite ange-
sehen, vor die Grundfläche B annimmt, so muß man auch den Winkel,
welchen man vorher als den Winkel an der Grundseite angesehen, und
mit M bezeichnet hatte, als den Winkel an der Perpendicularseite an-
sehen, und wenn man sich nach unsern Figuren richten wil, mit N be-
zeichnen.

XIV. zeichnen; im Gegentheil aber muß man den Winkel, welchen man **Winkel** vorher N genennet, nunmehr M nennen.

S. 110. Man verlängere nunmehr CR bis RM der Seite RM des Dreiecks RCM gleich wird, und ziehe NM; so wird das rechtwinklichte Dreieck NRM dem Dreieck an den Ecken NRM gleich und ähnlich, und der Winkel desselben M, wird dem Winkel, welchen wir in der Ecke ebenfalls mit M bezeichnet haben, gleich. XIV, 107. Die Linie NM aber wird der Linie NM gleich, welche eine Seite in dem Dreieck NCM abgiebet, weil beyde der Linie NM in der Ecke gleich sind. Es sind also überhaupt in den gegenwärtigen drey Zeichnungen, die Linien und Winkel, welche einander gleich sind, mit einerley Buchstaben bezeichnet. Folgendes können wir die Regeln, welche wir suchen, aus der 403 Figur allein schließen, welches die Sache gar leicht macht; doch wird man nicht übel thun, wenn man zugleich die Augen von Zeit zu Zeit auf die vorhergehenden zwey Figuren zurück wirft.

Regeln zur Berechnung der geradenwinklichten dreyseitigen Ecken.

S. 111. Man sehe MC als den Radius an, so ist NM die Tangente des Winkels NCM oder H, und MR ist die Tangente des Winkels MCR, welchen wir B nennen. XIV, 47. Eben diese Linien kommen auch in dem Dreieck MRN vor, und es verhält sich in diesem Dreieck MN zu MR, wie der Sinus des geraden Winkels R, das ist, wie der Radius, zu dem Cosinus des Winkels M. XIV, 42. Wir haben also:

$$MN : MR = rH : rB, \text{ und}$$

$$MN : MR = r : rCM, \text{ folgendes ist}$$

$$r : rCM = rH : rB.$$

Und dieses ist so gleich eine der gesuchten Regeln, vermittelt welcher man, wenn in einer rechtwinklichten Ecke, ausser den geraden Winkel, der Winkel M und die Hypotenuse H gegeben wird, die Grundseite B unmittelbar finden kan.

S. 112. Da aber auch die Glieder einer jeden Proportion sich dergestalt versehen lassen, daß dasjenige Glied, welches man wil, die letzte Stelle einnehme, und da in unserm Exempel man auch sagen kan:

$$rCM : r = rB : rH,$$

$$\text{und } rH : rB = r : rCM,$$

so siehet man, daß eben diese Regel auch dienen könne, aus dem Winkel M, an der Grundseite, und aus der Grundseite B die Hypotenuse H zu finden: wie auch, aus der Hypotenuse H, und aus der Grundseite B den Winkel M zu schließen, welcher an der Grundseite liegt. Wir erinnern dieses ein für allemal. Denn es ist nichts leichter als dieses auf alle ähnliche Fälle anzuwenden.

§. 113. Wir können aber auch in dieser Regel die Benennungen verwechseln, und an statt B schreiben P, welchem zu folge auch N an statt M gesetzt werden muß. XIV. 109. Dadurch bekommt die Regel dieses Ansehen:

$$r : \sin N = \sin H : \sin P.$$

wird aber im Grunde von der vorigen nicht verschieden.

§. 114. Die zweite Regel heraus zu bringen, nehme man NC vor den Radius an, so ist NM der Sinus des Winkels NCM, und folgender $\sin H$; und NR ist der Sinus von NCR $\sin P$. Und da man die Linien NM, RN auch vermittelst des Dreiecks MRN mit einander vergleichen kan, so kan man wieder aus zwei Proportionen, wie vorher, schließen. In dem Dreieck NRM ist:

$$NM : RN = r : \sin M. \text{ Vorher war}$$

$$NM : RN = \sin H : \sin P, \text{ folgender ist:}$$

$$r : \sin M = \sin H : \sin P.$$

Dieses ist die zweite Regel und auf andere Fälle eingerichtet. Man kan in derselben wieder an statt P, B schreiben, und N an statt M setzen, so wird eben diese Regel durch andere Benennungen ausgedrückt, welche sie zur Anwendung bequemer macht. Sie steht unter diesen Benennungen also: $r : \sin N = \sin H : \sin B$.

§. 115. Die dritte Regel erhält man, wenn man RC vor den Radius annimmt. Dadurch wird RM der Sinus des Winkels B und NR wird die Tangente zu P. Eben diese Linien kan man auch vermittelst des Dreiecks NRM vergleichen, in welchem sie ebenfalls vorkommen. Es ist also

$$RM : RN = \sin B : \sin P, \text{ und}$$

$$RM : RN = r : \sin M, \text{ folgender}$$

$r : \sin M = \sin B : \sin P$, und dieses ist die Regel, welche wir suchten, in welcher man wieder die Benennungen P, B, wie auch M und N verwechseln, und dadurch eben diese Regel also ausdrücken kan:

$$r : \sin N = \sin P : \sin B,$$

XIV.
Abschnitt.

§. 116. Aus diesen drei Regeln kann man nun die übrigen alle schließen, und man braucht nicht einmal eine Figur dazu. Es ist klar, daß, da in einer solchen Proportion, als diejenigen sind, die wir bereits gegeben haben, drei Buchstaben vorkommen, welche drei Theile einer dreiseitigen Ecke bedeuten, man aus jeden zwey Theilen, die außer dem geraden Winkel gegeben sind, und durch zwey dieser Buchstaben bedeutet werden, den dritten Theil finden könne, welchen der dritte Buchstaben bedeutet. Man muß sich also nur bemühen, vermittlest der bekannten Proportions-Regeln und demjenigen, so wir gewiesen, als wir die Sinus und Tangenten zu erklären uns bemüheten aus den bereits gefundenen Regeln andere zu schließen, in welchen andere Buchstaben verknüpft werden: welches geschehen kann, weil die drei gefundenen Regeln zusammen alle Theile einer geradwinklichten Ecke enthalten. Wir haben diese Regeln, zu einiger Erleichterung der folgenden Schlüsse hier zusammen gesetzt.

$$\text{Reg. I. } r : scM = rH : rB,$$

$$\text{oder } r : scN = rH : rP.$$

$$\text{Reg. II. } r : rH = fM : fP,$$

$$\text{oder } r : rH = fN : fB.$$

$$\text{Reg. III. } r : fB = rM : rP,$$

$$\text{oder } r : fP = rN : rB.$$

§. 117. Nunmehr sehen wir uns vor, eine Regel heraus zu bringen, in welcher die drei Buchstaben M, N und P alleine vorkommen, welches in keiner der bereits gefundenen Regeln zutrifft. So ist

$$\text{Reg. II. } r : rH = fM : fP$$

$$\text{wie auch } r : rH = fN : fB,$$

$$\text{folgender } fM : fP = fN : fB. \quad \text{Nun ist ferner}$$

$$\text{Reg. III. } r : rM = fB : rP$$

$$\text{und überhaupt } fP : scP = rP : r$$

$$\text{wie auch } rM : fM = r : scM, \text{ XIV, 52.}$$

Setzt man nun die Verhältnisse dieser vier letztern Proportionen zusammen, so erhält man VIII, 40.

$$\text{Reg. IV. } r : scP = fN : scM.$$

Man kann die Buchstaben dieser Regel wieder wechseln, und dieselbe dadurch, folgendergestalt, ausdrücken:

$$r : scB = fM : scN.$$

§. 118. Die

§. 118. Die nächste Regel sol die Buchstaben B, P und H enthalten. Diese kan man also machen. Es ist:

XIV.
Wespaß

Reg. IV. $r : scP = fN : scM$

Reg. I. $r : zH = fM : zB$,

überhaupt $zH : fH = r : fH$ XIV. 72.

Reg. II. $fH : r = fB : fN$.

überhaupt $r : scB = zB : fB$

und $scB : r = scB : r$.

Man setze alle diese Verhältnisse zusammen, so wird

Reg. V. $r : scP = scB : scH$.

Man kan die Buchstaben P, B auch in dieser Regel versehen, allein sie wird dadurch ganz und gar nicht geändert, wie man leicht sieht.

§. 119. Die letzte Regel endlich sol die Buchstaben M, N und H enthalten. Diese kan man folgendergestalt heraus bringen. Es ist:

Reg. V. $r : scP = scB : scH$

Reg. IV. $scP : r = scM : fN$

und $fM : scN = r : scB$

überhaupt $scN : zN = fN : r$, XIV. 72.

wie auch $zM : fM = r : scM$.

Man setze diese Verhältnisse wieder zusammen, so kommt:

Reg. VI. $zM : zN = r : scH$

oder $r : scH = zM : zN$.

Auch hier kommt durch die Verwechselung der Benennungen M, N, nichts bequemens.

§. 120. Wir haben also nachfolgende zehn Regeln heraus gebracht:

I. $r : scM = zH : zB$.

VII. $r : scN = zH : zP$.

II. $r : fH = fM : fP$.

VIII. $r : fH = fN : fB$.

III. $r : fB = zM : zP$.

IX. $r : fP = zN : zB$.

IV. $r : fN = scP : scM$.

X. $r : fM = scB : scN$.

V. $r : scB = scP : scH$.

VI. $r : scH = zM : zN$.

Deren vier letztere zwar aus den vier erstern durch die bloße Verwechselung der Benennungen P, B, und N, M, leicht können gemacht werden, aber doch wie bereits angemerkt worden, einige Bequemlichkeit in der Anwendung geben. Und diese Regeln sind hinlänglich alle geradwinkliche dreysieitige Ecken aufzulösen, welches das einzige ist, so wir noch erwägen müssen.

Eee ee 2

§. 121. Man

XIV.
Abschnitt.

§. 121. Man hat nemlich in einer dergleichen Ecke, ausser dem geraden Winkel, noch fünf Theile, drey Seiten nemlich B, P, H, und zweyen Winkel M, N. Aus jeden drey Theilen einer solchen Ecke sol jeder vierter Theil gefunden werden: der gerade Winkel aber stehet allezeit unter den bekannten drey Theilen; folgendes sind ausser demselben noch zwey bekannte Theile, aus welchen ein jeder dritter zu finden ist. Nun enthält eine jede unserer Regeln, ausser dem Zeichen des Sinus eines geraden Winkels r , drey Buchstaben, welche drey Theile des Dreysiecks bedeuten, aus denen zweyen, nach Anleitung der Regeln, der dritte durch die gemeine Proportionsregel, oder bequemer, durch die Logarithmen, gefunden werden kan: Es folget also, daß, wenn in unsern zehn Regeln jede drey der fünf Buchstaben B, P, H, M, N, vorkommen, welche man nur zusammen setzen kan, die Regeln zur Ansehung aller Fälle hinlänglich seyn werden.

§. 122. Es lassen sich aber drey und drey der fünf Buchstaben B, P, H, M, N auf diese Arten zusammen setzen:

BPH	BHM	BMN	PHM	PMN	HMN
BPM	BHN		PHN		
BPN					

und man siehet leicht, daß man sie nicht auf mehrere Arten zusammen setzen könne, wenn man auf die Ordnung Acht hat, welche wir bey dieser Zusammensetzung beobachtet haben, da wir nemlich erstlich die leßtern; und so dann nach und nach auch die vorhergehenden Buchstaben so oft verändert, als dieses geschehen können. Nun sind diese zehn Zusammenfügungen der Buchstaben alle in den zehn Regeln enthalten, welche angegeben worden, wie man sehen kan, wenn man sich die Mühe geben wil, beydes zusammen zu halten; es sind also die Regeln vor alle Fälle, die bey den geradewinklichten Ecken vorkommen können, hinlänglich.

Anwendung dieser Regeln.

§. 123. Es ist kaum nöthig, daß wir zeigen, wie diese Regeln zu gebrauchen sind, so leicht ist dieser Gebrauch. Doch kan ein oder anderes Exempel nicht schaden. Es sey in einer geradewinklichten dreyseitigen Ecke, oder in einem sphärischen Dreysieck, aus der Grundseite, und aus der Hypotenuse der Winkel zu finden, welcher zwischen diesen beyden Seiten lieget; so ist dasjenige bekannt, so wir mit B bezeich-

bezeichnet haben, wie auch die Seite H, und wird der Winkel gesucht, XIV. bey welchem in unsern Figuren allezeit M stehet. Man nehme dem- Abschnitz. nach aus den zehn gegebenen Proportionen diejenige, in welcher H, B und M vorkommen, diese ist die erste, $r : \text{sc} M = r H : r B$, aber da hier M gesucht wird, so versehe man die Glieder dieser Proportion dergestalt, daß M das letzte werde, und mache $r H : r B = r : \text{sc} M$, so siehet man, daß man sagen müsse, wie die Tangente der Hypotenuse zur Tangente der Grundseite: so der Radius zu dem Cosinus des gesuchten Winkels M, welcher demnach vermittelst der Logarithmen leicht kan gefunden werden.

Es sey aus dem Winkel an der Perpendicularseite und aus dem Winkel an der Grundseite, die Grundseite zu finden, so hat man N, M, und B wird gesucht. Diese drey Buchstaben kommen in der zehenden Regel $r : \text{sc} M = \text{sc} B : \text{sc} N$ vor. Verseht man nun die Glieder der derselben dergestalt, daß das gesuchte B in die vierte Stelle komme, so stehet sie also: $\text{sc} M : r = \text{sc} N : \text{sc} B$, und man siehet, daß man sagen müsse, wie der Sinus des bekannten Winkels M zu dem Radius, so der Cosinus des ebenfalls bekannten Winkels N, zu dem Cosinus des Winkels B, welchen man suchte.

Es sey aus der Hypotenuse und aus der Perpendicularseite die Grundseite zu finden, so ist H und P gegeben, und B wird gesucht. Die fünfte Regel $r : \text{sc} B = \text{sc} P : \text{sc} H$ enthält diese drey Buchstaben. Verseht man die Glieder derselben und machet $\text{sc} P : \text{sc} H = r : \text{sc} B$, so siehet man, daß man sagen müsse: wie der Cosinus der Perpendicularseite, zu dem Cosinus der Hypotenuse, so der Radius zu dem Cosinus der gesuchten Grundseite B.

S. 124. Es ist übrigens bey diesen Auflösungen zu merken, daß, da die Sinus und Tangenten welche man findet, zu spitzen Winkeln so wohl als zu den stumpfen gehören, welche jene zu zweyen rechten Winkeln ergänzen, man wissen muß ob die Seite oder der Winkel, welchen man suchet, spitzig oder stumpf sey, wenn man das eigentliche Maas desselben aus dem vermittelst der Regel gefundenen Sinus oder Tangenten bestimmen will. Dazu dienen die Eigenschaften, welche wir von diesen Ecken XII, 82. angemerkt haben, daß nemlich B und N, wie auch P und M entweder zugleich spitzig, oder zugleich stumpf seyen. Wie auch, daß wenn H spitzig ist, P und B entweder beyde spitzig oder beyde stumpf seyn, XI, 89. da denn, dem vorigen zu folge, auch die Winkel M und N entweder beyde spitzig oder bey-

XIV. Abschnitt. De stumpf seyn müssen. Ferner daß, wenn H stumpf ist, nothwendig eine der Seiten P, B spitzig, und die andere stumpf seyn müsse; und daß folgendes, bey diesem Umstand, auch einer der Winkel N, M spitzig sey, und der andere stumpf. Endlich daß, wenn die Seiten B, P, oder die Winkel M, N beyde spitzig oder stumpf sind, die Hypotenuse H spitzig sey; und stumpf, wenn einer der Winkel M, N, oder eine der Seiten B, P spitzig, und die andere stumpf ist, XII, 36. Es lassen sich aber doch vermittlest dieser Regeln die Arten der gefundenen Seiten oder Winkel, ob sie nemlich spitzig oder stumpf seyen, nicht allezeit bestimmen, und dieses deswegen, weil aus einerley gegebenen Stücken sich in gewissen Fällen, die wir XIII, gewiesen, zweyerley dreyseitige Ecken zusammen setzen lassen.

Regeln zur Berechnung der dreyseitigen Ecken, deren Winkel schief sind.

F. 404. §. 125. Was nun die dreyseitigen Ecken anlangt, deren Winkel alle schief sind, so kan man dieselbe größtentheils nicht anders berechnen, als wenn man sie aus zwey geradewinklichten Ecken zusammen setzt; oder heraus bringet, indem man eine dreyseitige Ecke die einen geraden Winkel hat, von einer andern dergleichen Ecke wegnimmt. Wir haben bereits XII, 91. gewiesen, wie dieses zu thun sey. Es sey NC, Mm eine dreyseitige Ecke, deren Winkel bey M und m von einerley Art sind, entweder beyde spitzig, oder beyde stumpf: so kan man durch NC eine Seite NRC auf MCm perpendicular legen, welche die Seite MCm in die zwey Theile MCR, RCm, und das schiefwinklichte Dreyeck in die zwey rechtwinklichten Dreyecke NCMR, und nCmR theilen wird. Der Winkel des schiefwinklichten Dreyecks, welcher der getheilten Seite MCm entgegen steht, ist in diesem Fall aus den zwey Winkeln der geradewinklichten Dreyecke N und n zusammen gesetzt, und da wir diesen Winkel allezeit Nn nennen wollen, so ist in dem gegenwärtigen Falle, $Nn = N + n$. Uebrigens ist die Perpendicularseite $NCR = P$, den beyden geradewinklichten Dreyecken gemeinschaftlich, NCM ist die Hypotenuse des einen, die wir H nennen, und nCm die Hypotenuse des andern, die wir mit h bezeichnen wollen, MCR ist die Grundseite des einen B, und RCm die Grundseite des andern, die wir uns unter b vorstellen, MCm aber, die wir der Kürze halber Bb nennen, ist hier $= B + b$.

§. 126. Sind

§. 126. Sind aber die Winkel M und m verschiedener Art, der gleichen die 405 Figur vorstellt, da die schiefwinklichte dreiseitige Ecke wieder mit $NCMm$ bezeichnet worden; so fällt die Fläche, welche durch NC geht, und auf die Fläche, in welcher MCm liegt, perpendicular ist, außer der Seite MCm , und man bekommt, wenn man sich diese Fläche NCR vorstellt, zwar wieder zwei rechtwinklichte Ecken, nemlich $NCMR$ und $nCmR$. Allein die schiefwinklichte Ecke $NCMm$ wird nicht durch die Zusammensetzung derselben herausgebracht, sondern sie bleibt übrig, wenn man die $nCmR$ von der $NCMR$ wegnimmt. Indessen ist die Perpendicularseite $NCR = P$ wieder diesen beiden rechtwinklichten Ecken gemeinschaftlich, aber die Seite MCm , welche wir, wie vorhero Bb nennen, ist nunmehr der Unterschied der Grundseiten der geradenwinklichten Ecken $MCR - mCR$. Nennen wir also MCR wieder B , und setzen $mCR = b$, so ist hier $Bb = B - b$. Eben so ist es mit dem Winkel, welcher der Seite MCm entgegen steht, an dessen Spitze wir Nn gesetzt, so diesen Winkel bezeichnen soll. Wenn wir allezeit den Winkel MNR nennen N , und bezeichnen den Winkel mnr mit n , so ist $Nn = N - n$. Indessen wird in beiden Fällen aus dem $Bb = B + b$ oder $B - b$ und aus dem B , die andere Grundseite b gar leicht gefunden, und eben so giebt sich aus $Nn = N + n$ oder $N - n$ und dem Winkel N , der Winkel n . Sonst nennen wir auch hier NCM , H und nCm bezeichnen wir mit h , weil dieses die Hypotenusen der geradenwinklichten Ecken sind.

§. 127. Um aber die Regeln heraus zu bringen, nach welchen dergleichen Ecken zu berechnen sind; darf man nur diejenigen, so für die rechtwinklichten Ecken gefunden worden, XIV, 120, auf die beiden geradenwinklichten Ecken anwenden, welche wir uns in der schiefwinklichten vorstellen. Dadurch geben sich die Regeln für die schiefwinklichten Ecken, wenn man nemlich die Regeln dergestalt zusammen nimmt, daß die Theile der geradenwinklichten Ecken, welche in der schiefwinklichten nicht enthalten sind, ausfallen. Die Art zu schliessen selbst wird dieses am deutlichsten weisen. Zum Ueberfluß können wir noch anmerken, daß man in allen diesen Regeln anstatt H auch h setzen könne, wenn man zugleich vor M , m vor N , n , und vor B , b , schreibt. Denn man thut dadurch in der That nichts anders, als daß man die allgemeine Regeln durch diejenige Benennungen

XIV. Abschnitt. nungen ausdrucket, welche wir den Theilen der dreyseitigen Eck n C m R gegeben. Die Benennung P aber darf nicht geändert werden, weil P den beyden geradewinklichten Ecken N C M R und n C m R gemeinschaftlich ist.

§. 128. Nun ist:

Reg. II. $r : fH = fM : fP$, und folgendes auch

$r : fh = fm : fP$, und also VIII, 32.

$fH : fh = fm : fM$.

Dieses ist gleich die erste Regel vor. die schiefwinklichte Dreyecke. Stehet man bey dieser Regel etwas stille, so findet man, daß sie eine grosse Gemeinschaft mit der Regel XIV, 83. habe, vermittelt welcher wir die meisten Ausfüßungen der ebenen Dreyecke verrichten können. In diesen Dreyecken verhalten sich jede zwos Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen, und hier verhalten sich die Sinus zweier Seiten, wie die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen. Denn m stehet der Seite H entgegen, und M ist der Seite h entgegen gesetzt. Eben dieses trifft auch bey den Regeln, für die geradewinklichte Dreyecke ein, aus welchen die gegenwärtige geschlossen worden ist, weil H dem geraden Winkel entgegen stehet, dessen Sinus r ist, und P dem Winkel M. Man kan also diese Regel leicht im Gedächtniß behalten, welches bey den übrigen allen nicht möglich seyn durfte, und auch eben nicht nothwendig ist, weil man bey dem Gebrauch derselben leicht eine Tafel nachschlagen kan, dergleichen diejenige ist, die wir geben werden.

§. 129. Die zweyte Regel berechnen wir folgendergestalt. Es ist die dritte der Regel für die geradewinklichte Ecken:

$r : fB = rM : rP$, und folgendes

$r : fb = rm : rP$, demnach VIII, 32.

$fB : fb = rm : rM$, welches die Regel ist, die wir suchten,

§. 130. Die dritte Regel folget aus der vierten für die geradewinklichte Ecken. Diese war:

$r : f c P = fN : f c M$, folgendes ist auch

$r : f c P = f n : f c m$, und also

$fN : f c M = f n : f c m$, oder

$fN : f n = f c M : f c m$. Dieses ist unsere dritte Regel.

§. 131. Aus

S.
nem S.
portion
fN: fm
fN + fm

Anwendung dieser Regeln.

Zur bequemen Anwendung dieser Regeln, dienet nachstehende Tafel:

Erste Regel		Zweite Regel		Beweis
Es wird eine Seite gesucht.				
und fch	H, M,	h	$fm : fM = fH : fh$	§. 128.
Folgend	Bb, M,	h	$r : fcM = zH : zB$	$fcB : fcb = fch : fch$ §. 120, I. §. 132.
ten Eck	n, H, M,	h	$r : zM = fch : zcN$	$fcn : fcN = zH : zh$ §. 120, VI. §. 134.
	m, H,	Bb	$r : fcM = zH : zB$	$zm : zM = fB : fb$ §. 120, I. §. 129.
	H, h,	Bb	$r : fcM = zH : zB$	$fch : fch = fcB : fcb$ §. 120, I. §. 132.
ren man	n, m,	H	$\frac{z.cM + cm}{z} : \frac{z.cM - cm}{z}$ $= \frac{z.N^2 + n}{z} : \frac{z.N^2 - n}{z}$	$zM : r = zcN : fch$ §. 131 §. 120, VI.
Es wird ein Winkel gesucht.				
wie vorher	h, H,	m	$fh : fH = fM : fm$	§. 128
und fch	r, H,	m	$r : zM = fch : zcN$	$fN : fn = fcM : fcm$ §. 120, VI. §. 130.
so ist z. cN	Bb, H,	m	$r : fcM = zH : zB$	$fb : fB = zM : zm$ §. 120, I. §. 129.
unsere fch	H, M,	Nn	$r : zM = fch : zcN$	$zh : zH = fcN : fcn$ §. 120, VI. §. 134.
§. 13	H, m,	Na	$r : zM = fch : zcN$	$fcM : fcm = fN : fn$ §. 120, VI. §. 130.
geradwin	Bb, h	M	$\frac{z.cH + ch}{z} : \frac{z.cH - ch}{z}$ $= \frac{z.cB + cb}{z} : \frac{z.cB - cb}{z}$	$zH : zB = r : fcM$ §. 133 §. 120, I

XIV. nungen ausdrucket, welche wir den Theilen der dreysseitigen Ecke
 Abschnitt. n C m R gegeben. Die Benennung P aber darf nicht geändert wer-
 den, weil P den beyden geradewinklichten Ecken N C M R and n C m R
 gemeinschaftlich ist.

§. 128. Nun ist:

Reg. II. $r : fH = fM : fP$, und folgendes auch

$r : fh = fm : fP$, und also VIII, 32.

$fH : fh = fm : fM$.

Dieses ist gleich die erste Regel vor die schiefwinklichte Dreyeck.
 Stehet man bey dieser Regel etwas stille, so findet man, daß sie ei-
 ne große Gemeinschaft mit der Regel XIV, 83. habe, vermittelst
 welcher wir die meisten Auflösungen der ebenen Dreyecke verrichten
 können. In diesen Dreyecken verhalten sich jede zwö Seiten, wie
 die Sinus der Winkel, welche ihnen entgegen liegen, und hier ver-
 halten sich die Sinus zweier Seiten, wie die Sinus der Winkel, wel-
 che ihnen entgegen liegen. Denn m stehet der Seite H entgegen, und
 M ist der Seite h entgegen gesetzt. Eben dieses trifft auch bey den
 Regeln, für die geradewinklichte Dreyecke ein, aus welchen die ge-
 genwärtige geschlossen worden ist, weil H dem geraden Winkel ent-
 gegen stehet, dessen Sinus r ist, und P dem Winkel M. Man kan
 also diese Regel leicht im Gedächtniß behalten, welches bey den übr-
 igen allen nicht möglich seyn durfte, und auch eben nicht notwendig
 ist, weil man bey dem Gebrauch derselben leicht eine Tafel nach-
 schlagen kan, dergleichen diejenige ist, die wir geben werden.

§. 129. Die zweyte Regel berechnen wir folgendergestalt. Es
 ist die dritte der Regel für die geradewinklichte Ecken:

$r : fB = rM : rP$, und folgendes

$r : fb = rm : rP$, demnach VIII, 32.

$fB : fb = rm : rM$, welches die Regel ist, die wir
 suchten,

§. 130. Die dritte Regel folget aus der vierten für die gerade-
 winklichte Ecken. Diese war:

$r : fcP = fN : fcM$, folgendes ist auch

$r : fcP = fn : fc m$, und also

$fN : fcM = fn : fc m$, oder

$fN : fn = fcM : fc m$. Dieses ist unsere dritte Regel.

§. 131. Aus

Anwendung dieser Regeln.

Zur bequemen Anwendung dieser Regeln, dienet nachstehende Tafel:

S. nem E. portion fN: fm fN + fm Nun ist und fch Folgend S. ten Eck ren man S. 13 fcB fcB wie vorh und fch so ist z. c unsere fcd S. 13 geradwin r r fcd Und diese gen Eck	<p>Anwendung dieser Regeln.</p> <p>Zur bequemen Anwendung dieser Regeln, dienet nachstehende Tafel:</p> <table> <tr> <th>Erste Regel</th><th>Zweite Regel</th><th>Beweis</th></tr> <tr> <td colspan="3">Es wird eine Seite gesucht.</td></tr> <tr> <td>H, M, h fm: fM = fH: fh</td><td></td><td>§. 128.</td></tr> <tr> <td>Bb, M, h r: fcM = zH: zB</td><td>fcB: fcb = fcH: fch</td><td>§. 120, I. §. 132.</td></tr> <tr> <td>n, H, M, h r: zM = fcH: zcN</td><td>fcN: fcN = zH: zh</td><td>§. 120, VI. §. 134.</td></tr> <tr> <td>m, H, Bb r: fcM = zH: zB</td><td>zm: zM = fB: fb</td><td>§. 120, I. §. 129</td></tr> <tr> <td>H, h, Bb r: fcM = zH: zB</td><td>fcH: fch = fcB: fcb</td><td>§. 120, I. §. 132</td></tr> <tr> <td>n, m, H $\frac{z.cM + cm}{z} : \frac{z.cM - cm}{z} = \frac{z.N^2 + n}{z} : \frac{z.N^2 - n}{z}$ </td><td>zM: r = zcN: fcH</td><td>§. 131 §. 120, VI.</td></tr> <tr> <td colspan="3">Es wird ein Winkel gesucht.</td></tr> <tr> <td>h, H, m fh: fH = fM: fm</td><td></td><td>§. 128</td></tr> <tr> <td>n, H, m r: zM = fcH: zcN</td><td>fN: fn = fcM: fcm</td><td>§. 120, VI. §. 130</td></tr> <tr> <td>Bb, H, m r: fcM = zH: zB</td><td>fb: fB = zM: zm</td><td>§. 120, I §. 129</td></tr> <tr> <td>H, M, Nn r: zM = fcH: zcN</td><td>zh: zH = fcN: fcN</td><td>§. 120, VI. §. 134</td></tr> <tr> <td>H, m, Nn r: zM = fcH: zcN</td><td>fcM: fcm = fN: fn</td><td>§. 120, VI. §. 130</td></tr> <tr> <td>Bb, h, M $\frac{z.cH + ch}{z} : \frac{z.cH - ch}{z} = \frac{z.cB^2 + cb}{z} : \frac{z.cB^2 - cb}{z}$ </td><td>zH: zB = r: fcM</td><td>§. 133 §. 120, I</td></tr> </table>	Erste Regel	Zweite Regel	Beweis	Es wird eine Seite gesucht.			H, M, h fm: fM = fH: fh		§. 128.	Bb, M, h r: fcM = zH: zB	fcB: fcb = fcH: fch	§. 120, I. §. 132.	n, H, M, h r: zM = fcH: zcN	fcN: fcN = zH: zh	§. 120, VI. §. 134.	m, H, Bb r: fcM = zH: zB	zm: zM = fB: fb	§. 120, I. §. 129	H, h, Bb r: fcM = zH: zB	fcH: fch = fcB: fcb	§. 120, I. §. 132	n, m, H $\frac{z.cM + cm}{z} : \frac{z.cM - cm}{z} = \frac{z.N^2 + n}{z} : \frac{z.N^2 - n}{z}$	zM: r = zcN: fcH	§. 131 §. 120, VI.	Es wird ein Winkel gesucht.			h, H, m fh: fH = fM: fm		§. 128	n, H, m r: zM = fcH: zcN	fN: fn = fcM: fcm	§. 120, VI. §. 130	Bb, H, m r: fcM = zH: zB	fb: fB = zM: zm	§. 120, I §. 129	H, M, Nn r: zM = fcH: zcN	zh: zH = fcN: fcN	§. 120, VI. §. 134	H, m, Nn r: zM = fcH: zcN	fcM: fcm = fN: fn	§. 120, VI. §. 130	Bb, h, M $\frac{z.cH + ch}{z} : \frac{z.cH - ch}{z} = \frac{z.cB^2 + cb}{z} : \frac{z.cB^2 - cb}{z}$	zH: zB = r: fcM	§. 133 §. 120, I
Erste Regel	Zweite Regel	Beweis																																												
Es wird eine Seite gesucht.																																														
H, M, h fm: fM = fH: fh		§. 128.																																												
Bb, M, h r: fcM = zH: zB	fcB: fcb = fcH: fch	§. 120, I. §. 132.																																												
n, H, M, h r: zM = fcH: zcN	fcN: fcN = zH: zh	§. 120, VI. §. 134.																																												
m, H, Bb r: fcM = zH: zB	zm: zM = fB: fb	§. 120, I. §. 129																																												
H, h, Bb r: fcM = zH: zB	fcH: fch = fcB: fcb	§. 120, I. §. 132																																												
n, m, H $\frac{z.cM + cm}{z} : \frac{z.cM - cm}{z} = \frac{z.N^2 + n}{z} : \frac{z.N^2 - n}{z}$	zM: r = zcN: fcH	§. 131 §. 120, VI.																																												
Es wird ein Winkel gesucht.																																														
h, H, m fh: fH = fM: fm		§. 128																																												
n, H, m r: zM = fcH: zcN	fN: fn = fcM: fcm	§. 120, VI. §. 130																																												
Bb, H, m r: fcM = zH: zB	fb: fB = zM: zm	§. 120, I §. 129																																												
H, M, Nn r: zM = fcH: zcN	zh: zH = fcN: fcN	§. 120, VI. §. 134																																												
H, m, Nn r: zM = fcH: zcN	fcM: fcm = fN: fn	§. 120, VI. §. 130																																												
Bb, h, M $\frac{z.cH + ch}{z} : \frac{z.cH - ch}{z} = \frac{z.cB^2 + cb}{z} : \frac{z.cB^2 - cb}{z}$	zH: zB = r: fcM	§. 133 §. 120, I																																												

XIV. *Wskulir.* §. 136. Diese Tafel wird also gebracht. Wenn ein Dreieck aufzulösen, so zeichne man dasselbe nur schlecht weg, und nenne denjenigen Theil desselben, welchen man suchet Q, es mag nun dieser Theil eine Seite oder ein Winkel seyn. Den Theil aber, welcher dem gesuchten entgegen steht, nenne man O. Es wird also, O ein Winkel, wenn Q eine Seite ist, und eine Seite, wenn Q ein Winkel ist. Ferner schreibe man an Q zu beyden Seiten A und a, welche Buchstaben demnach allezeit diejenigen Theile bedeuten werden, die unmittelbar an den gesuchten zu beyden Seiten liegen. Endlich schreibe man an O zu beyden Seiten B und b. Das erste B neben dem A, und das zweyte b neben dem a. Es werden dadurch die Buchstaben in folgender Ordnung stehen:

1 Figur

Wenn eine Seite gesucht wird.

O
B b
A Q a

2 Figur

Wenn ein Winkel gesucht wird.

B
A O
Q a b

§. 137. Nunmehr sieht man aus der vorgelegten Aufgabe leicht, was für Theile des Dreiecks gegeben sind, welches man berechnen sol. Diese Theile bemerke man. Ist zum Exempel eine Seite aus den drey Winkeln der dreyseitigen Ecke zu finden; so sind in der ersten Figur die gegebenen Theile O, A, a. Ist aber ein Winkel aus den drey Seiten zu finden, so sind in der zweyten Figur die gegebenen Theile O A a und dasjenige, so man suchet, ist allezeit Q. Diese Buchstaben O, A, a müste man also bey Auflösung dieser Aufgabe bemerken, und eben so verfähret man allezeit. Ist eine Seite aus dem Winkel zu finden, welcher ihr entgegen steht, und aus den zwey übrigen Seiten, so sind die gegebenen Theile in der ersten Figur O, B, b; und ist ein Winkel aus den zwey Seiten zu finden, zwischen welchen er lieget, und aus einem von den übrigen Winkeln, so sind die bekannten Dinge A, a, B, oder A, a, b. Denn dieses letztere kan nichts anders bedeuten als das erstere, wie man aus der Figur siehet. Hat man nun die Theile des Dreiecks auf die Art bezeichnet, so suche man diese Buchstaben in der ersten Abtheilung der Tafel, unter der Benennung, Fälle, so hat man so gleich in eben der Zeile die Regeln, nach welchen das Dreieck aufzulösen ist.

S. 138. Doch ehe man dieselbe anwendet, so sind die gegebenen Seiten und Winkel, wie auch dasjenige, so gesucht wird, noch mit den Benennungen auszudrücken, deren wir uns in der 404 und 405 Zeichnung bedienet haben. Wie dieses zu verrichten sey, weist die zweyte Abtheilung der Tafel, über welcher das Wort, bekannt, steht: und zwar dergestalt. Es stehen in derselben drey Buchstaben, welche den drey Buchstaben der ersten Abtheilung entgegen gesetzt sind, und welche die Theile der Ecken in der 304 und 305 Zeichnung, wie wir sie oben XIV, 125. 126. benennet haben, bedeuten. Man sehe, daß der erste Buchstaben dieser zweyten Abtheilung so viel bedeute, als der erste Buchstabe der ersten Abtheilung, und eben dieses nehme man von dem zweyten und von dem dritten an, so sieht man, was in den sphärischen Dreyecken, die die eben erwähnten Zeichnungen vorstellen, vor Theile gegeben sind. Und vor den gesuchten Theil Q nehme man diejenige Seite oder den Winkel, welcher in der dritten Abtheilung der Tafel unter der Aufschrift Q angezeigt wird. Nur muß man nicht aus der Acht lassen, daß die Tafel zwey Theile hat, deren erstern man gebrauchen muß, wenn man eine Seite sucht, und den zweyten, wenn man einen Winkel haben wil, und es sind diese Dinge keinesweges zu verwechseln.

S. 139. Zum Exempel: Es ist aus einer Seite eines schiefwinklichten Dreyecks, und den zwey Winkeln, die an derselben liegen, eine Seite zu finden, die einem von den gegebenen Winkeln entgegen steht: so sind die bekannten Theile ABO oder a b O. Diese Buchstaben nun stehen in der dritten Reihe, und in der nächsten Abtheilung neben ihnen stehen Nn, H, M. Es ist demnach $A = Nn$, $B = H$, und $M = O$, Q aber ist h. Und man hat in einer dreyseitigen Ecke, oder sphärischen Dreyecke aus dem bekannten Winkel Nn, aus der Seite H und dem Winkel M, die Seite h zu finden.

S. 140. Wie nun aber dieses zu verrichten sey, weisen die zwey Regeln die nun in eben der Reihe weiter folgen. Wir wollen in unserm Exempel bleiben, da aus Nn, H und M die h zu finden ist. Die erste Regel welche dazu dienet, ist $r : M = sc H : sc N$. Vermitteltst derselben findet man also N, weil M und H bekannt sind. Nun hatte man auch $Nn = N + n$ oder $N - n$. Man kan also auch n finden, und nachdem dieses geschehen, so sind in der Regel, welche auf die vorige in eben der Reihe folget, $sc n : sc N = r H : r h$, die drey erstern Glieder bekannt, und es kan also das vierte Glied gefunden werden, welches man suchte.

§ f f f f 2

S. 141.

XIV.
Abschnitt.

§. 141. Auf eben die Art verfähret man bey allen Regeln, und wir sehen nichts, was einen Leser, welcher die Geduld gehabt, uns bisher zu folgen, aufhalten könne. Dasjenige so wir bey den rechtwinklichten Ecken XIV, 124. bemerkt haben, daß zuweilen einige Zweydeutigkeit daraus entspringe, daß ein jeder Sinus oder eine Tangente, zweyen Winkeln zukommet, hat auch hier statt, und wird so oft es möglich ist, durch die eben daselbst gegebenen Regeln gehoben, und durch diejenige, welche die Lage der Perpendicularfläche aus der Art der Winkel M und m bestimmet.

§. 142. Daß aber die Regeln, deren Gebrauch wir dergestalt gewiesen haben, hinlänglich sind, alle schiefwinklichte dreyseitige Ecken zu berechnen, kan folgender gestalt erhalten. Da wir den gesuchten Theil immer Q, und die übrigen Theile A, a, B, b, O genennet haben, so müssen die Regeln, wenn sie vollständig seyn sollen, zeigen, wie aus jeden dreyen der letztern Theile Q zu finden sey. Setzet man nun jede drey der letztern fünf Buchstaben A, a, B, b, O wie man nur kan, zusammen, so kommen dadurch nachfolgende Verknüpfungen heraus

A a B	A B b	A b O	a B b	a b O	B b O.
A a b	A B O		a B O		
A a O					

Es sind aber in diesen Verknüpfungen diejenigen, in welchen bloß die kleinen Buchstaben a, b mit den größern A, B verwechselt sind, von denselben nicht verschieden, und bedeuten nichts anders als jene. Lasset man also diese als überflüssig weg, so bleiben bloß diese sechs Verknüpfungen der gegebenen Theile übrig, A a B, A a O, A B b, A B O, A b O, B b O. Und alle diese kommen in der Tafel XIV, 135. unter der Aufschrift der Fälle vor, so wohl wenn der gesuchte Theil eine Seite ist, als auch, wenn ein Winkel gesucht wird, wie man so gleich sehen wird, wenn man sich die Mühe geben will, diese sechs Verknüpfungen in der Tafel aufzusuchen. Ja wir haben auch die übrigen, die von den gegenwärtigen nur in der Benennung unterschieden sind, in die Tafel gebracht, damit dieselbe desto bequemer werde, indem sie zu beyderley Benennung eingerichtet ist.

E N D E.

Pag. 665. lin. 2. lies beidemal $\frac{a-a}{b-a} = a$ für $\frac{a-a}{b-a} + a$

ead. . . . 13. . . . $\frac{624}{4}$ für $\frac{24}{4}$

ead. . . . 19 jenem für einem

ead. . . . 24 lies ohne Absatz: das ist, $a - b$:

$$a = a - a : s - a$$

ead. . . . 26 $\frac{a-a}{a-b} = a + a$ für $\frac{a-b}{a-b}$

$$= a \times a$$

666 9 $\frac{a-a}{a-b} = a$ für $\frac{a-a}{a-a} = a$

ead. . . . 19 $\frac{aa}{a-b}$

ead. . . . 26 $6 \frac{1}{4 \frac{1}{3}}$

667 6 desjenigen für dasienige.

ead. . . . 11 $- au + au$

683 11 $\overline{a+b^n}$ für $\overline{a+b^n}$ Eben dieses

und dergleichen versehen, kommen auch
l. 32, und insonderheit p. 685, 686 öfters
vor: zuweilen steht auch bloß $a + b^n$ vor
 $\overline{a+b^n}$

684 8 $\overline{a+b^n} = 10 + 1^6$ für $\overline{a+b^n} = 10 + 1^6$

685 6 Umstand, für Verstand

686 25 $\overline{a+b^n} = \frac{10}{1}$

Pag.

pag. 688. l. 9.) lies $= a^{r:s} \times (1 - \frac{r}{s} \cdot \frac{b}{a} + \frac{r}{s} \cdot \frac{r-s}{2s} \times \frac{b^2}{a^2} -$
 $\frac{r}{s} \cdot \frac{r-s}{2s} \cdot \frac{r-2s}{3s} \times \frac{b^3}{a^3} + \&c.$

pag. 689. l. 1.) lies $\frac{r}{s} \cdot \frac{r-s}{2s} \cdot \frac{r-2s}{3s}$ wird $\frac{r}{s} \cdot \frac{-s}{2s} \cdot \frac{-2s}{3s}$
 $= \frac{r}{3s}$. Das folgende Glied $\frac{r}{s} \cdot \frac{r-s}{2s} \cdot \frac{r-2s}{3s} \cdot \frac{r-3s}{4s}$ verwan-

belt sich in dieses $\frac{r}{s} \cdot \frac{-s}{2s} \cdot \frac{-2s}{3s} \cdot \frac{-3s}{4s} = \frac{-r}{4s}$

lin. 6.) $\overline{a+b}^{r:s} = a^{r:s} \times (1 + \frac{r}{s} \cdot \frac{b}{a} + \frac{r}{s} \cdot \frac{b^2}{a^2} + \frac{r}{3s} \cdot$

$\frac{b^3}{a^3} - \frac{r}{4s} \cdot \frac{b^4}{a^4} + \&c.$

lin. 8.) $\overline{a-b}^{r:s} = a^{r:s} \times (1 - \frac{r}{s} \cdot \frac{b}{a} - \frac{r}{2s} \cdot \frac{b^2}{a^2}$

$- \frac{r}{3s} \cdot \frac{b^3}{a^3} - \frac{r}{4s} \cdot \frac{b^4}{a^4} - \text{und so fort.}$

pag. 697 lin. 29 lies die, für der

707 . . . 4 . . . &c. für 2 | c

713 . . . 16 . . . l. $a-d : a : l. a : a+d$

714 . . . 7 . . . $\frac{d^2}{2}$ für $\frac{d}{2}$

716 . . . 7 del. vor

725 . . . 11 lies um für und

728 . . . 2 AD für ABD

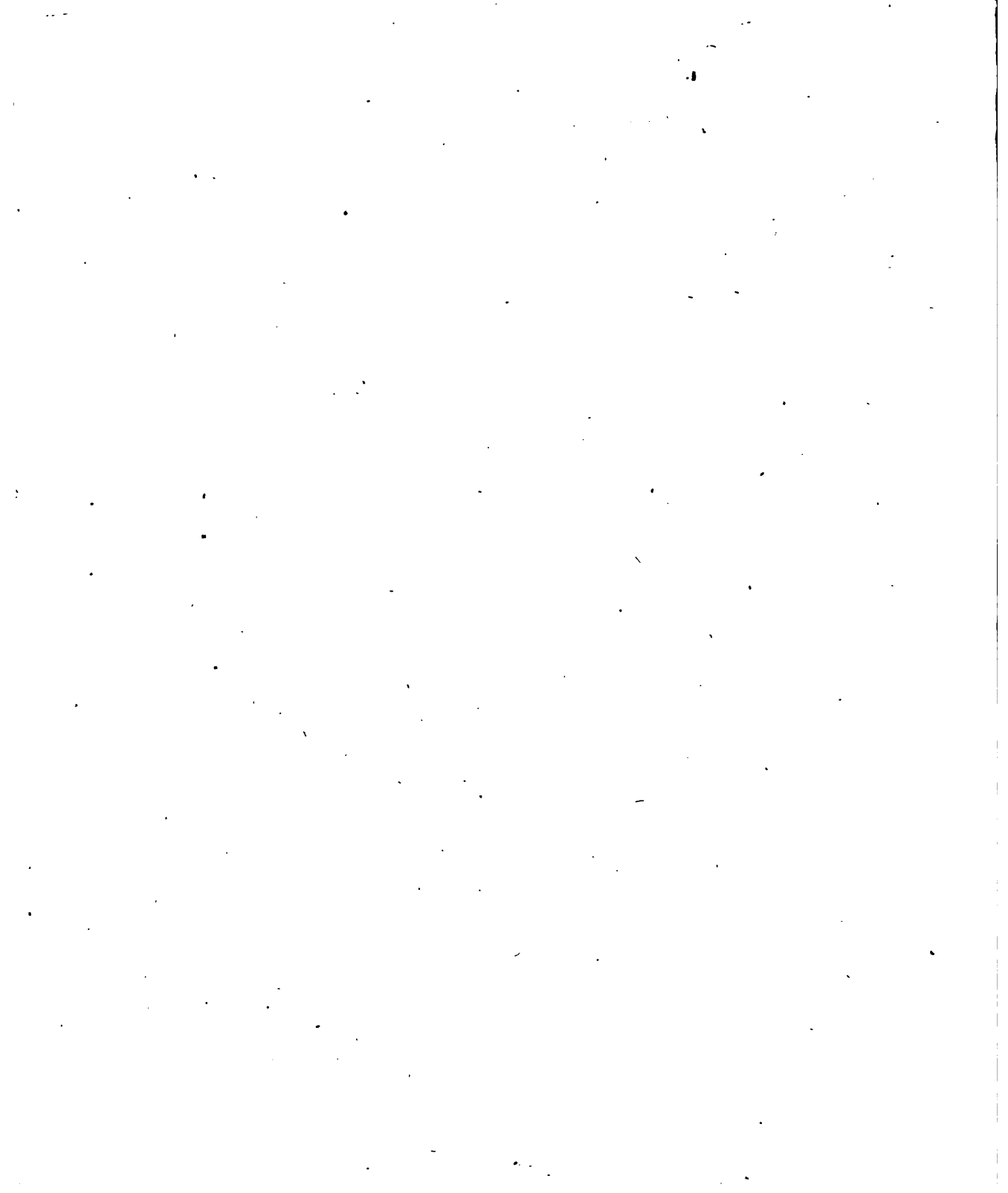
ead. 20, 22, 31 S für s

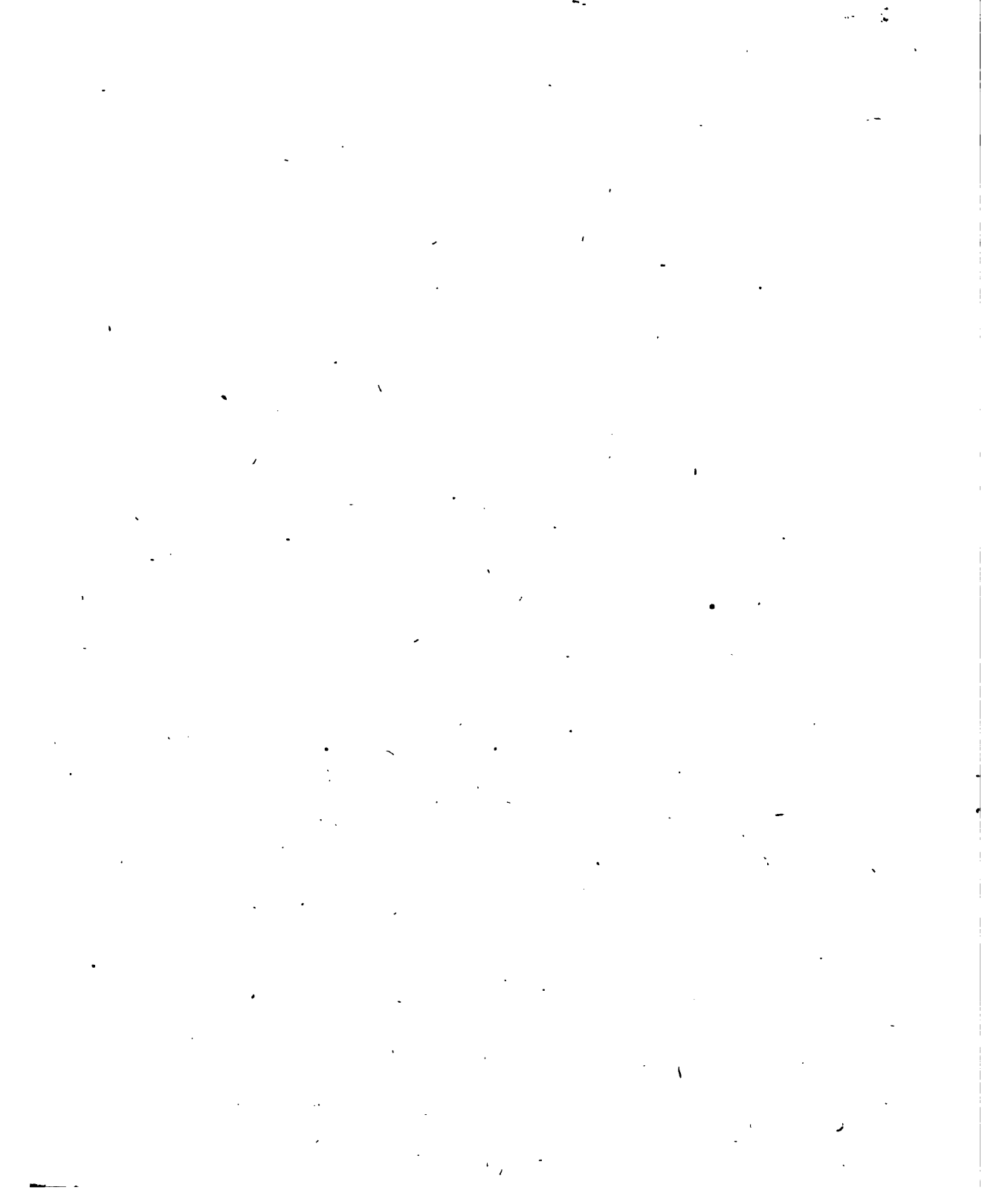
756. . . 8. lies ADC für ABC

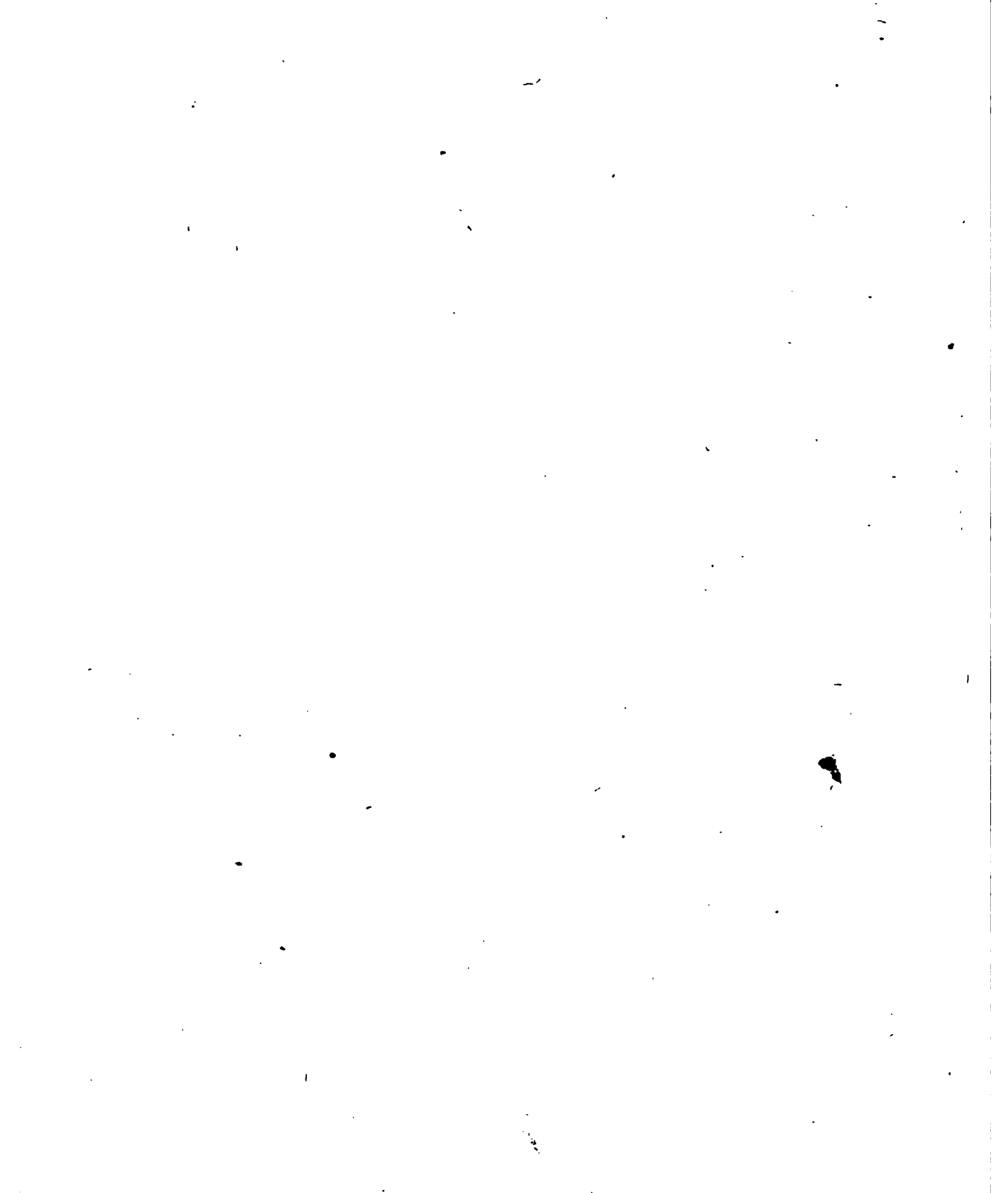
762 . . . 15 . . . BC = 62, 53.

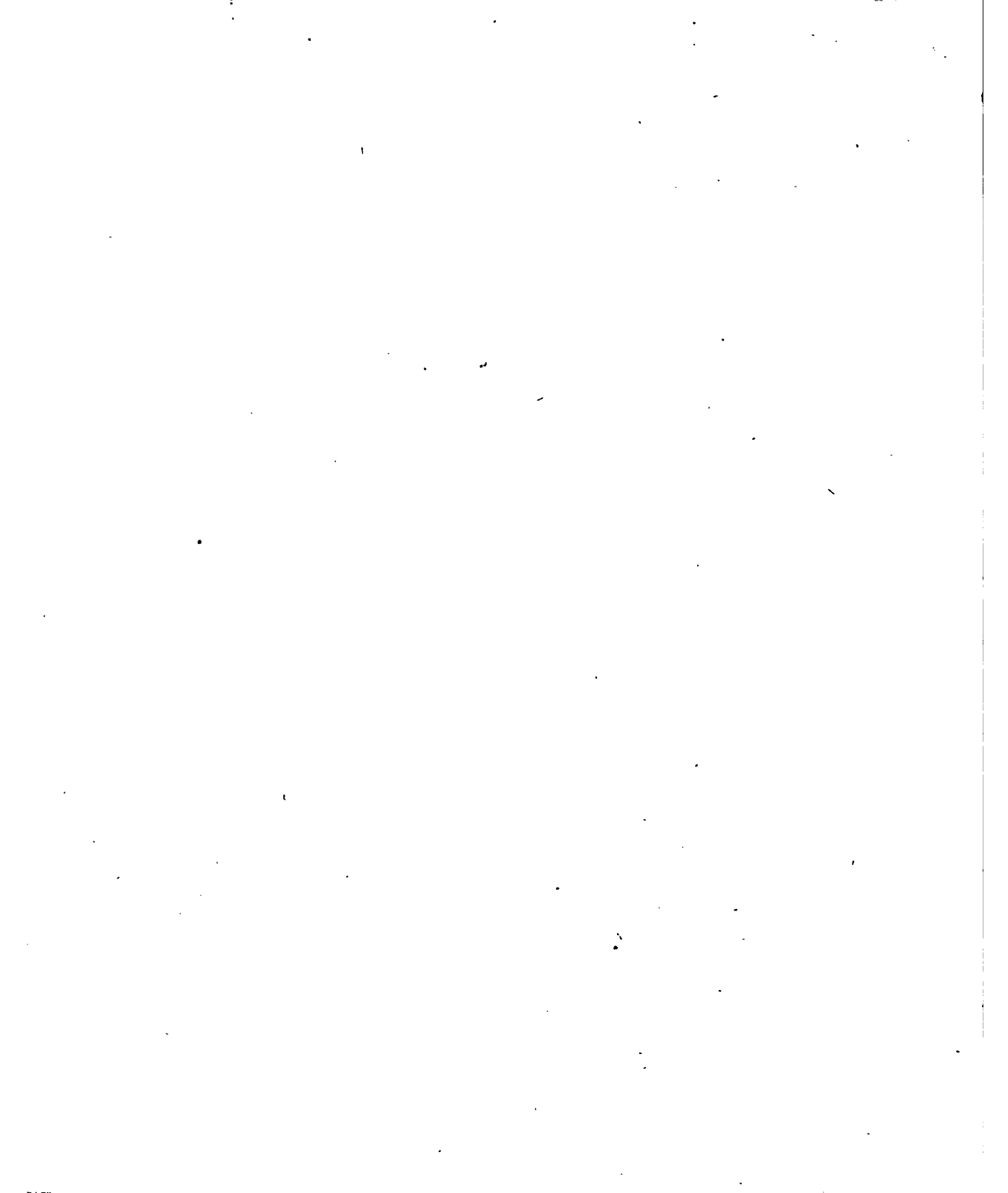
763 . . . 9 . . . AD für CD

777 . . . 4 . . . scM : sen für scM scM

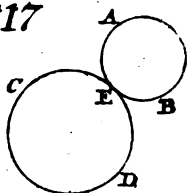




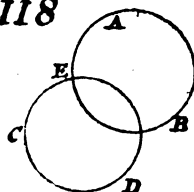




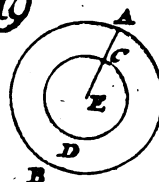
117



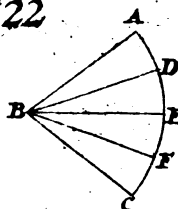
118



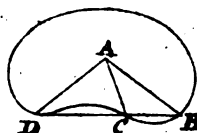
119



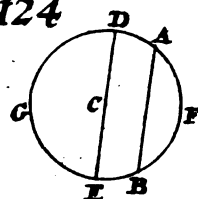
122



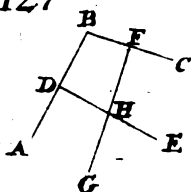
123



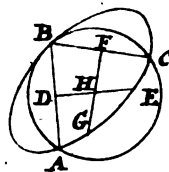
124



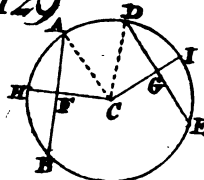
127



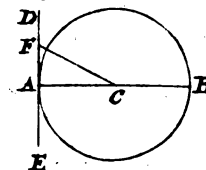
128



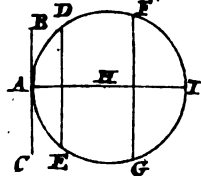
129



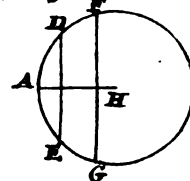
132



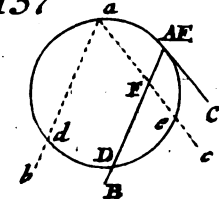
133



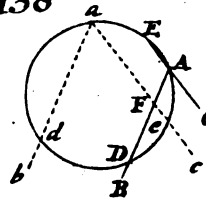
134



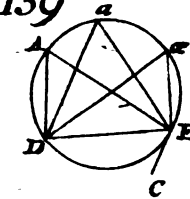
137



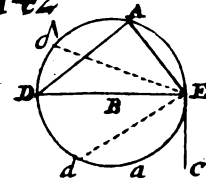
138



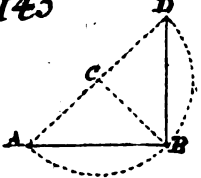
139



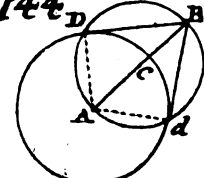
142

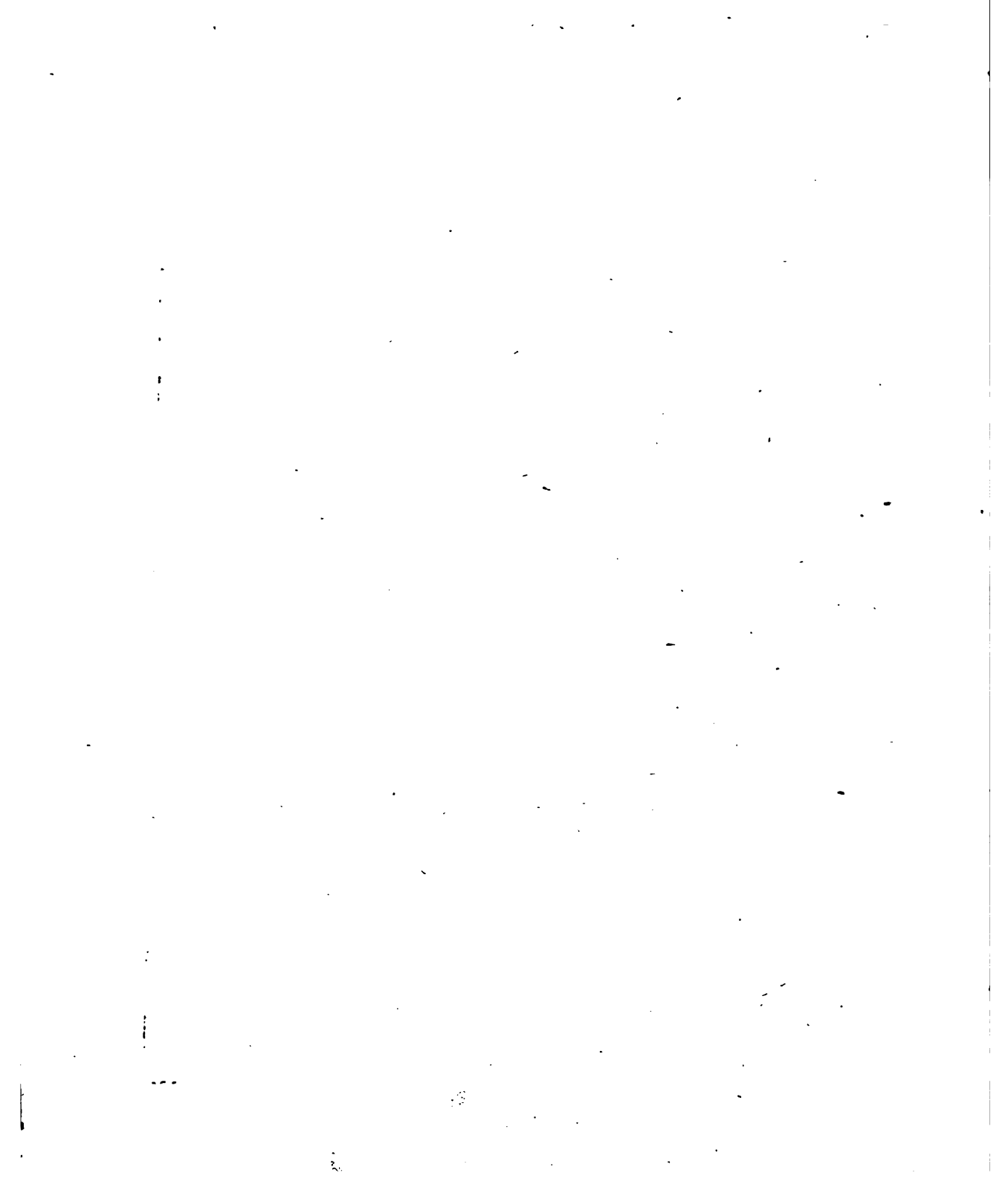


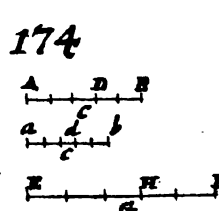
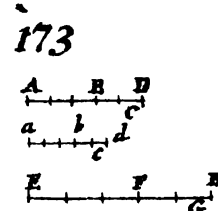
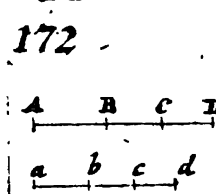
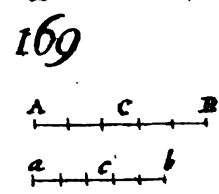
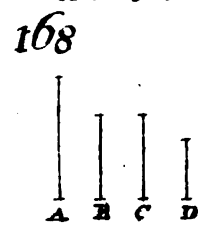
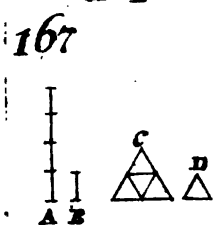
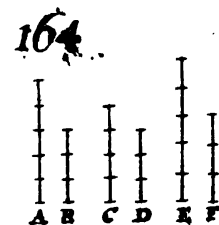
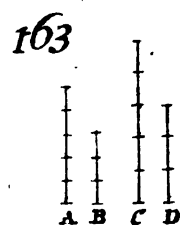
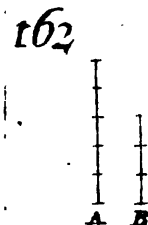
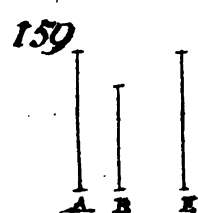
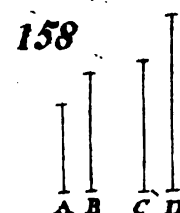
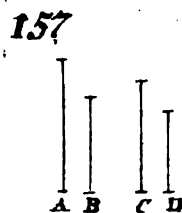
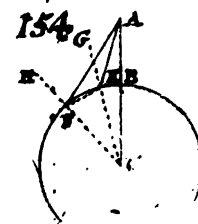
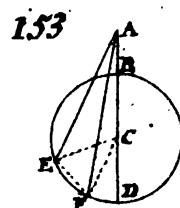
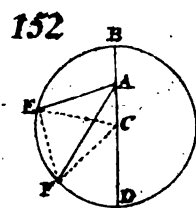
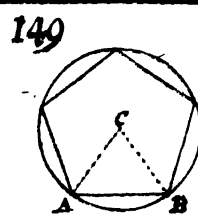
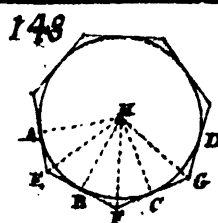
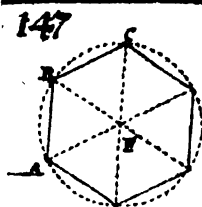
143

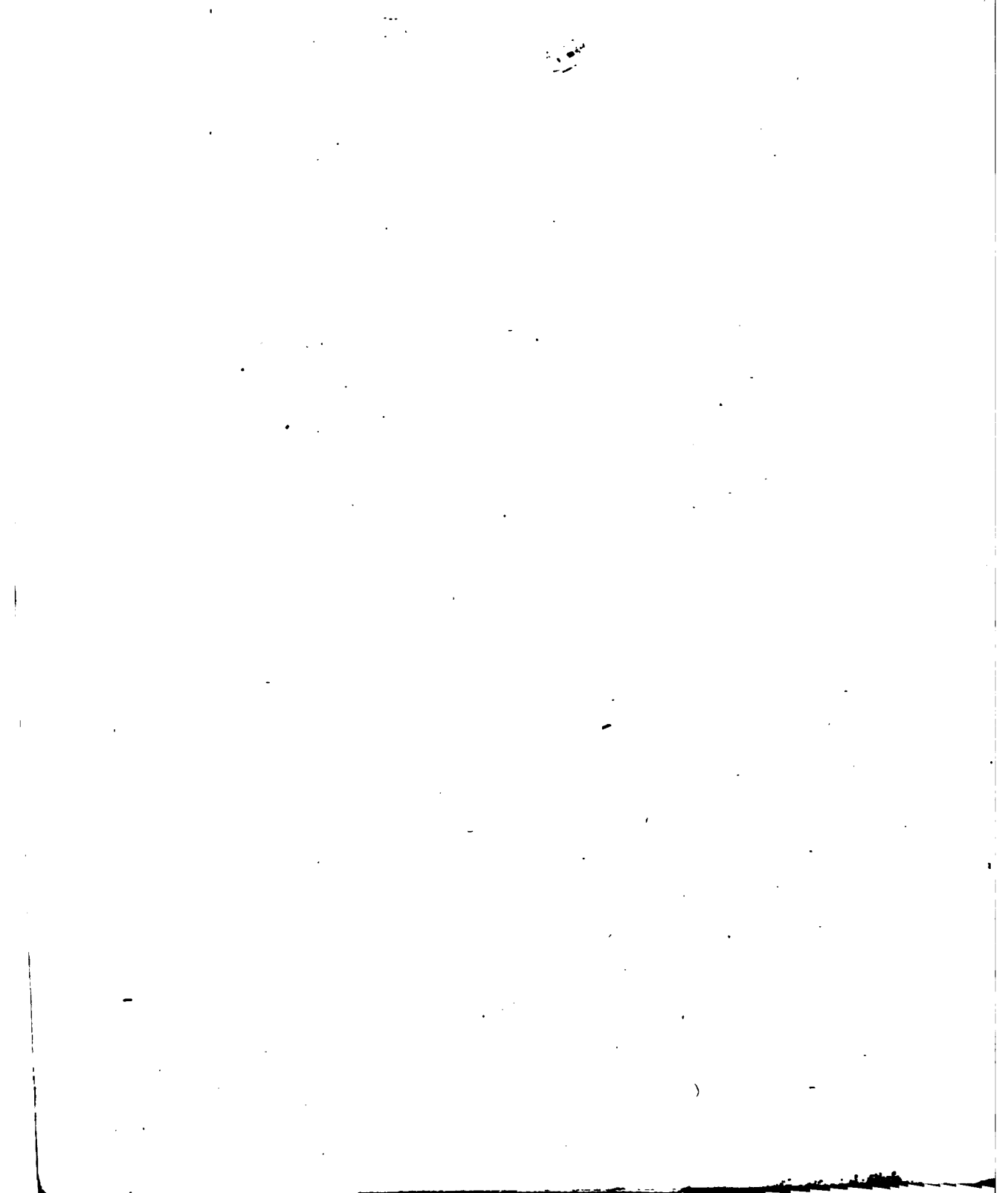


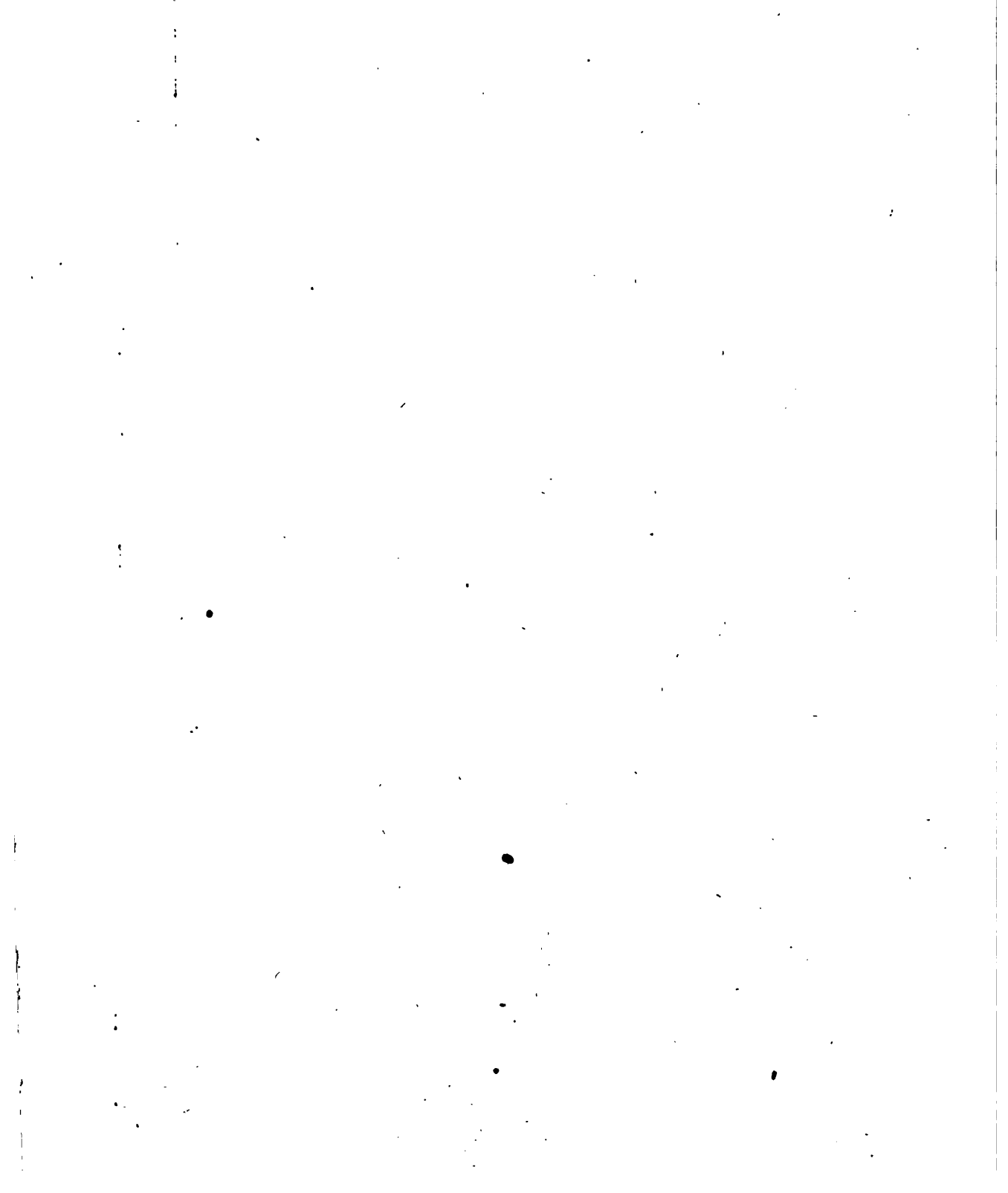
144



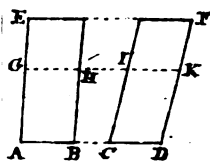




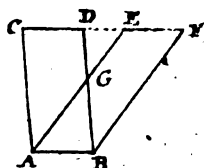




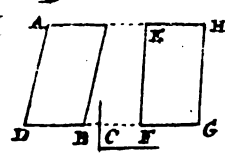
207



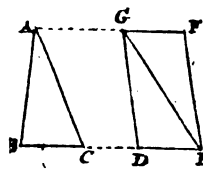
208



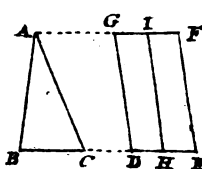
209



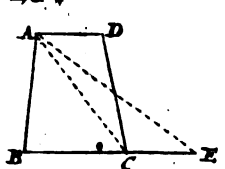
212



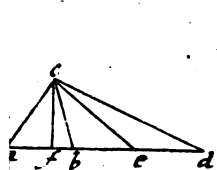
213



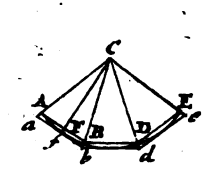
214



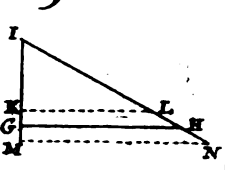
217



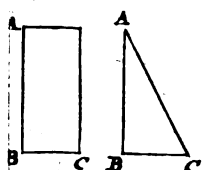
218



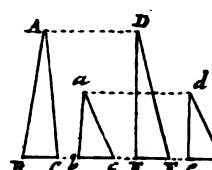
219



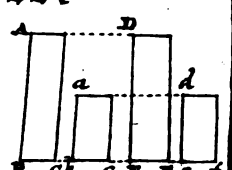
222



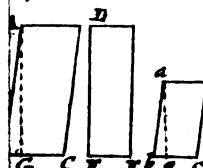
223



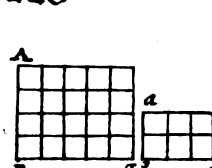
224



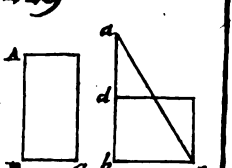
227



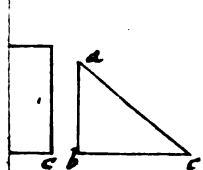
228



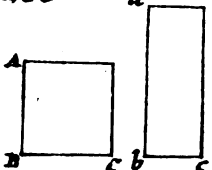
229



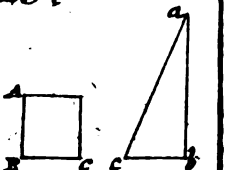
32

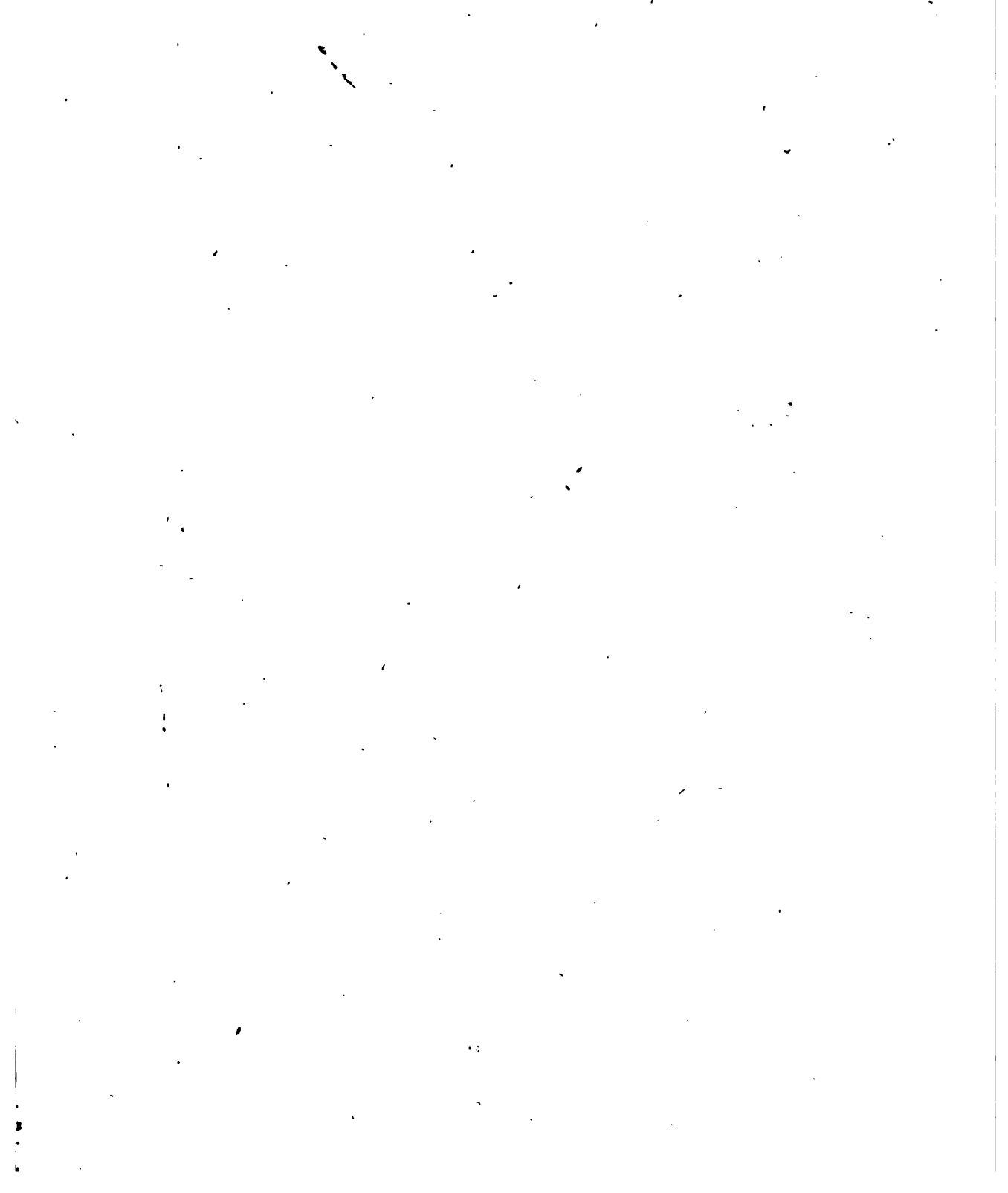


233

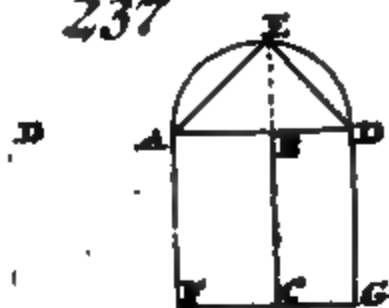


234





237



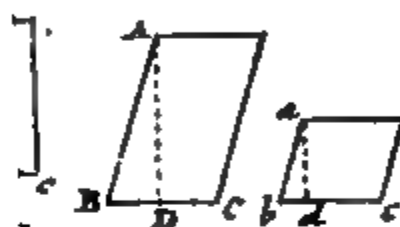
238



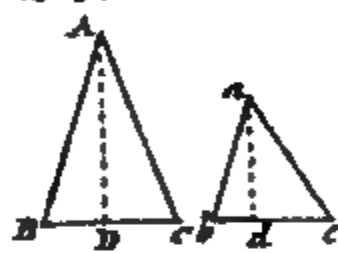
239



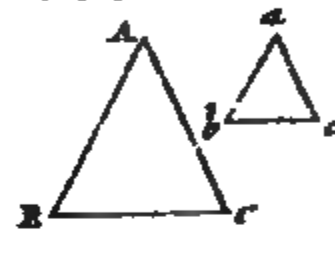
242



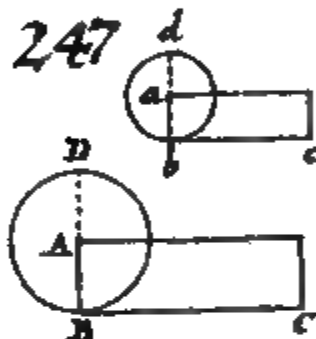
243



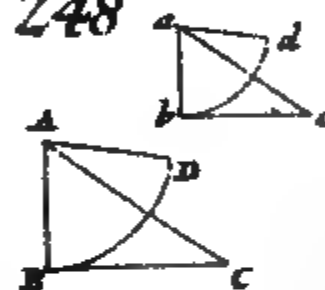
244



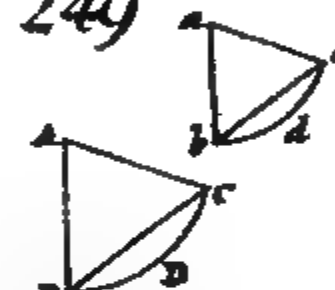
247



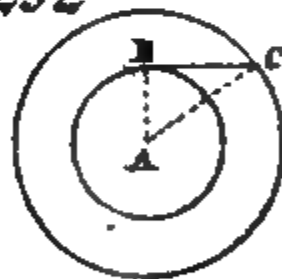
248



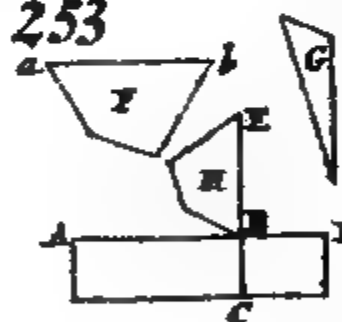
249



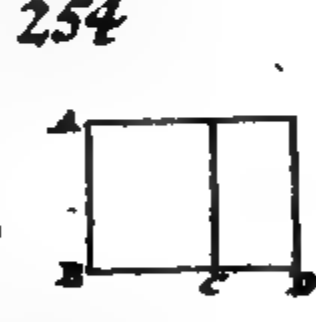
252



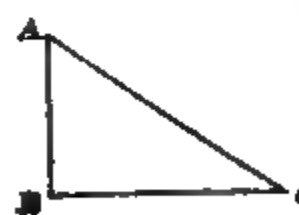
253



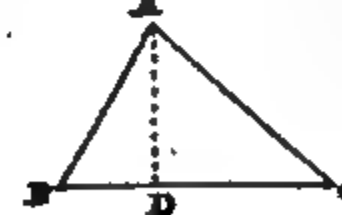
254



257



258



259



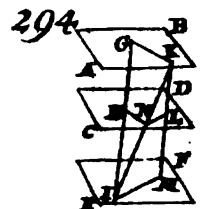
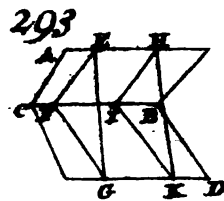
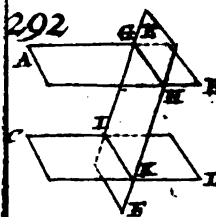
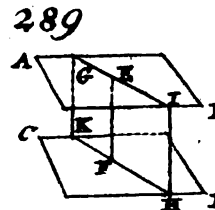
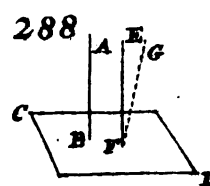
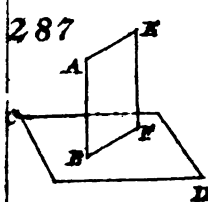
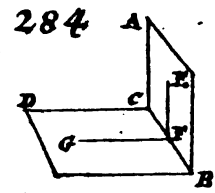
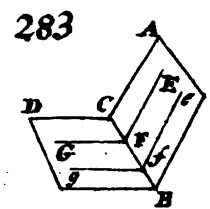
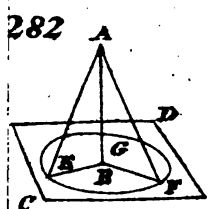
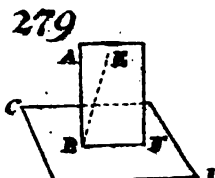
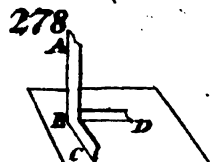
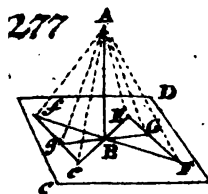
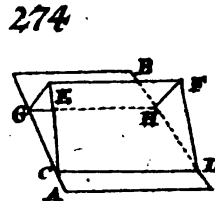
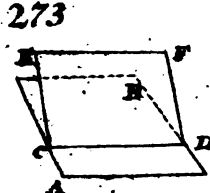
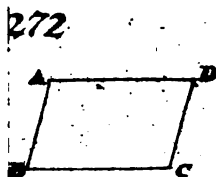
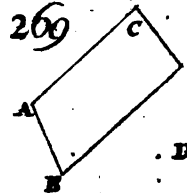
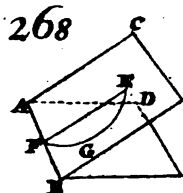
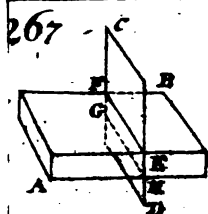
262

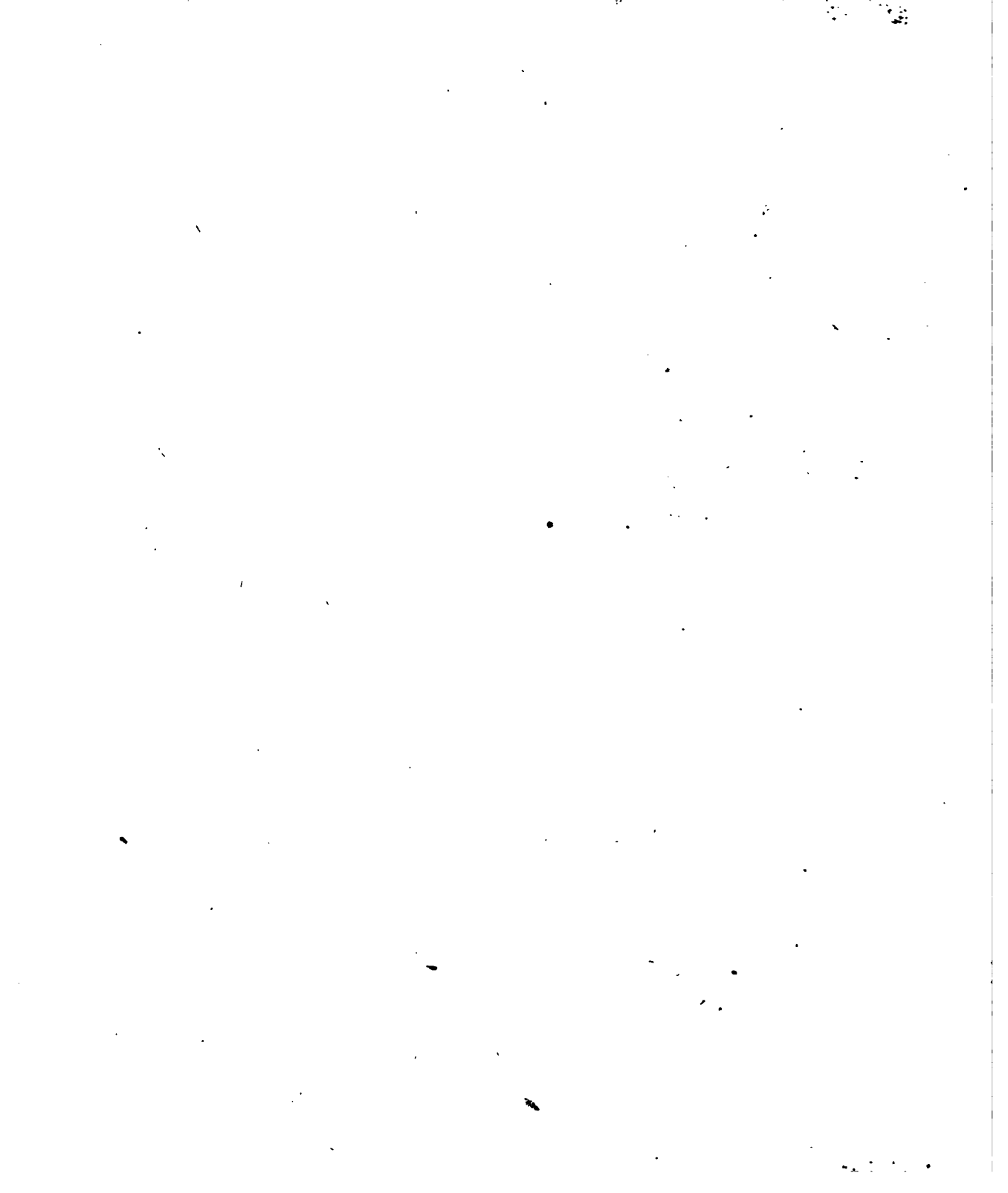


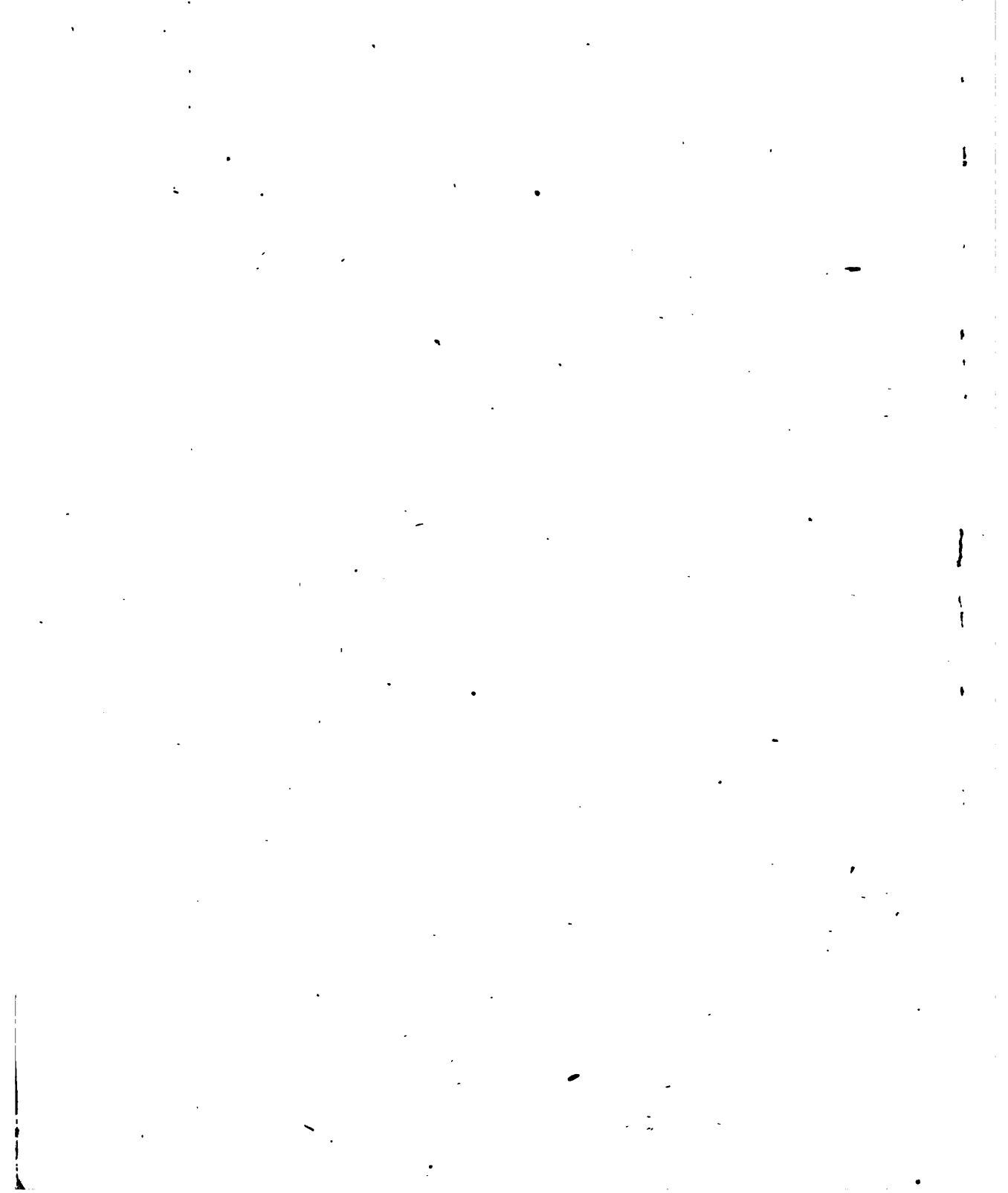
263



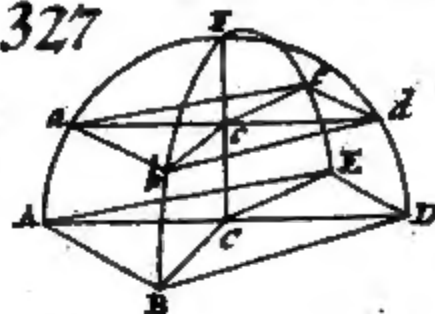
2







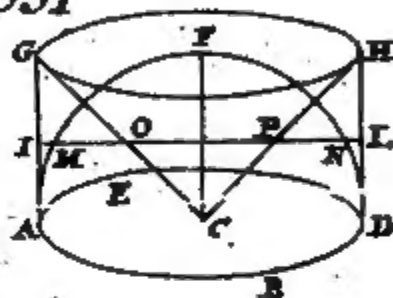
327



328



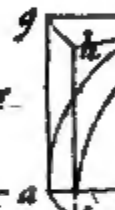
331



332



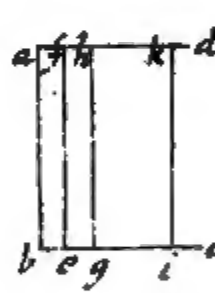
335



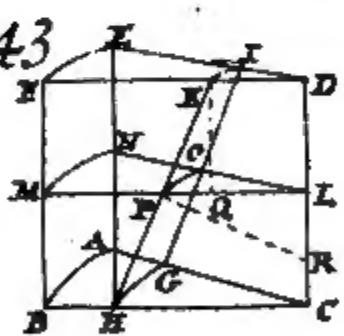
336



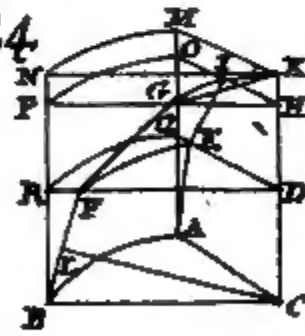
340



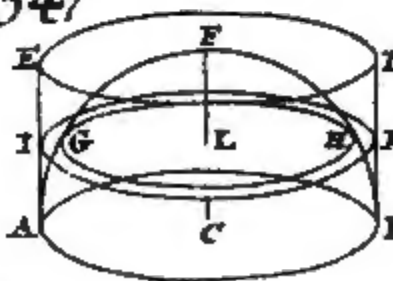
343



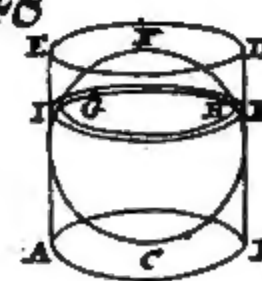
344



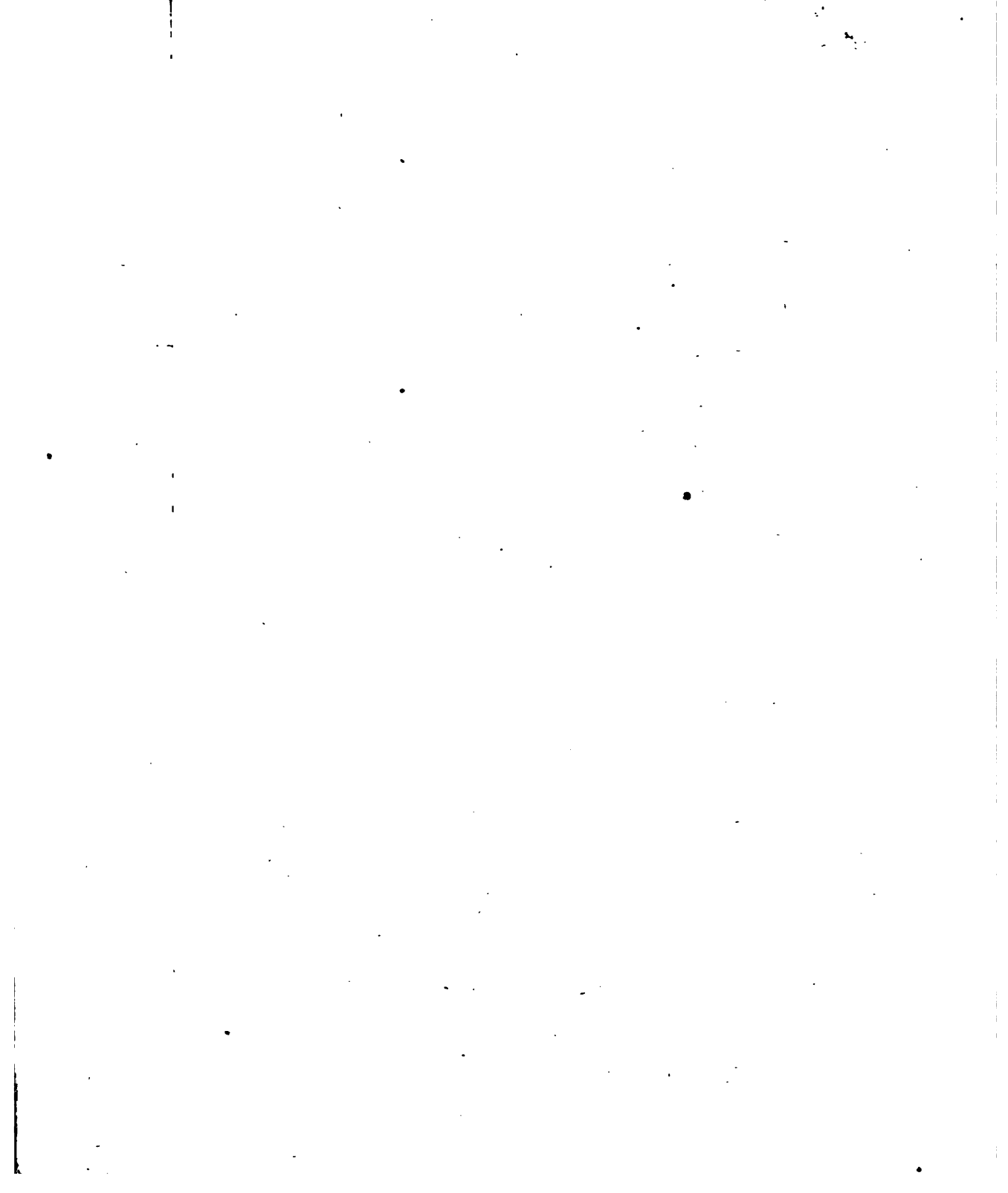
347



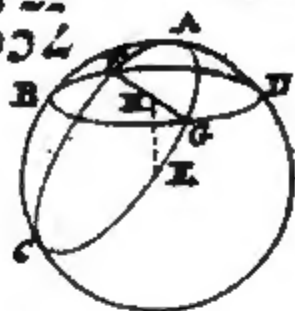
348



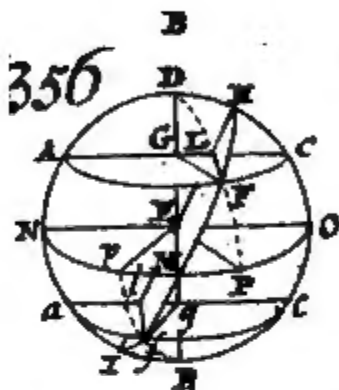
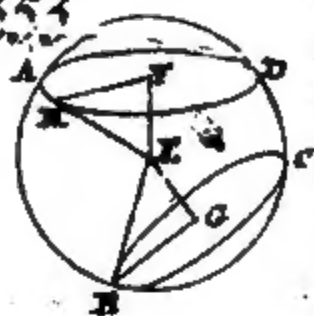
Tab. XII.



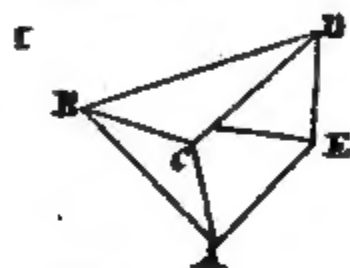
352



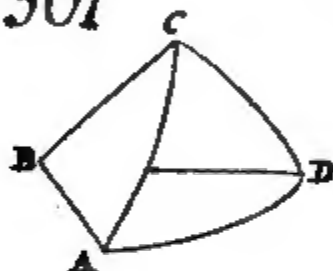
353



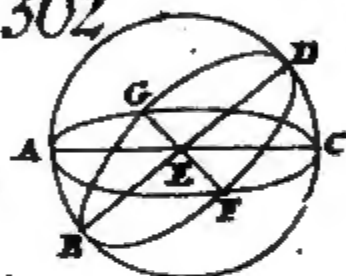
358



361



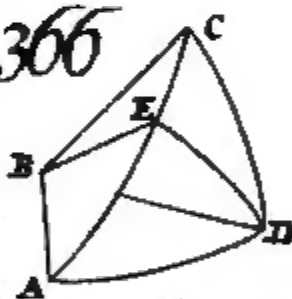
362



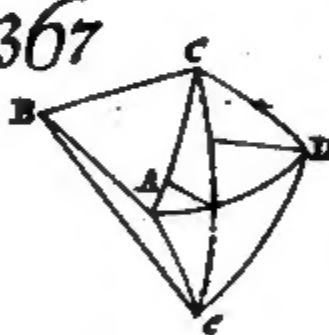
363



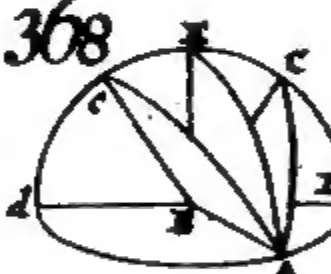
366



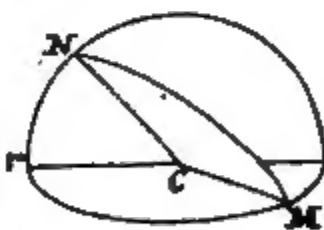
367



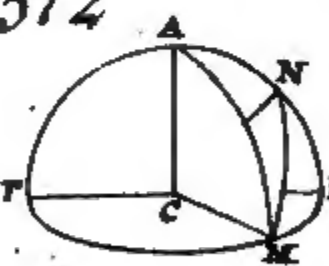
368



371



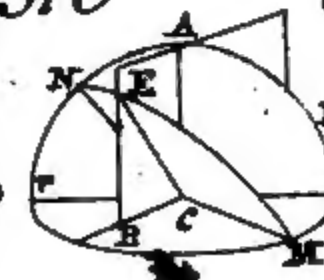
372



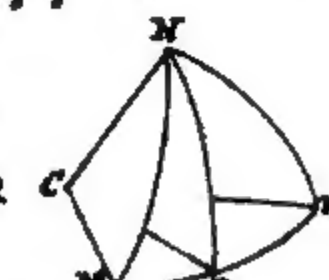
373



376



377



378

